

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique**



**Université Echahid Hamma Lakhdar – El Oued**



**Faculté de Technologie**

**Département de Génie Electrique**

**Cours:**

***Asservissements Echantillonnés et  
Régulation Numérique***

**Niveau : 1<sup>ère</sup> Année Master Machines Electriques**

**Préparé et Enseigné par :**

*Dr. BEKAKRA Youcef*  
Maître de Conférences -A-

## Chapitre I : Modélisation des Signaux et des Systèmes Echantillonnés

### I.1 Introduction :

Dans les cours d'automatique des années précédentes, vous avez étudié la commande des systèmes linéaires continus. Le schéma de correction utilisé était alors le suivant (Figure I.1) :

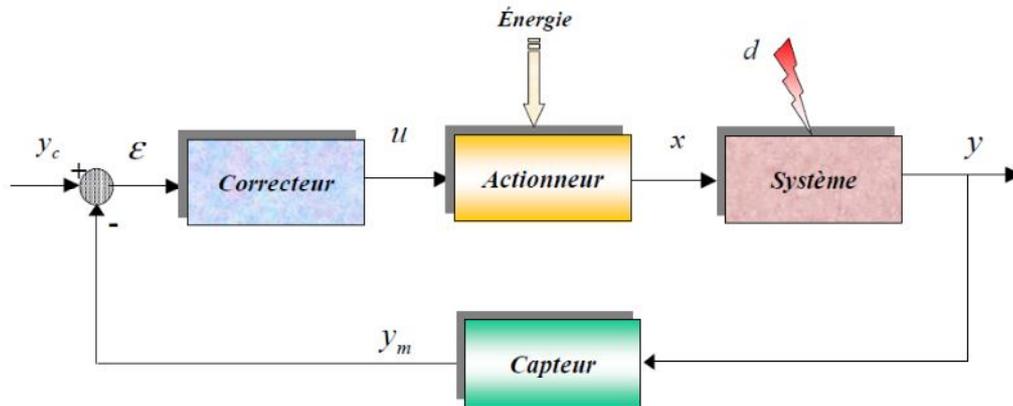


Figure I.1 Schéma de correction des systèmes linéaires continus

Dans ce schéma, on distingue différents *signaux* :

$y(t)$ , la **sortie** du processus à réguler,

$y_m(t)$ , la **mesure** de la sortie  $y(t)$  par l'intermédiaire d'un capteur,

$y_c(t)$ , la valeur de **consigne** de  $y_m(t)$ ,

$\varepsilon(t)$ , l'**erreur**, c'est-à-dire l'écart entre la consigne et la mesure,

$u(t)$ , la variable de **commande** pour l'actionneur,

$x(t)$ , la variable d'**action**,

$d(t)$ , une **perturbation** quelconque agissant sur le système, et différents systèmes :

- le **système étudié**, qui est un processus physique pour lequel on a obtenu une modélisation, c'est-à-dire un ensemble d'équations mathématiques décrivant le plus fidèlement possible son comportement physique.

- le **capteur** qui permet d'obtenir une mesure de la sortie du système à corriger, mesure utilisée pour générer l'erreur,

- le **correcteur** qui, s'il est conçu de manière adéquate, permet de calculer, sur la base de l'écart entre la consigne et la mesure de sortie, la commande à appliquer en entrée du système pour annuler cet écart,

- l'**actionneur**, relais physique de la commande, qui permet sa mise en œuvre en agissant directement sur le système.

Dans ces différents cours n'ont jamais été abordées les questions de mise en œuvre d'une telle commande, une fois son calcul effectué. C'est l'objet principal du cours à venir, qui concerne la **commande automatique des systèmes par ordinateur numérique**. Le schéma de principe est donné par la Figure I.2 :

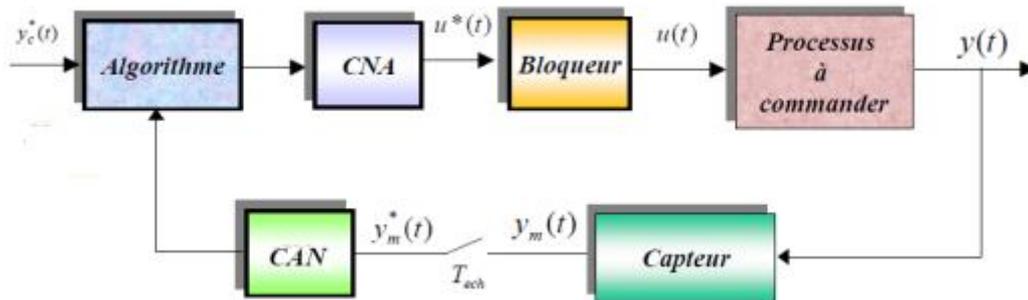


Figure I.2 Schéma de correction des systèmes par ordinateur numérique

L'utilisation d'un tel ordinateur placé dans la boucle de correction nécessite l'emploi de **convertisseurs** des informations d'entrée et de sortie du ordinateur : il impose donc en particulier le choix à l'entrée du ordinateur d'une fréquence de discrétisation temporelle (**échantillonnage**), ainsi que celui d'un mode de lissage des informations binaires sortant du ordinateur afin d'adapter celles-ci à l'entrée des actionneurs (**reconstitution**). Il est dans ce cas possible de représenter la boucle de correction comme suit.

• L'opération d'**échantillonnage** (représenté de manière symbolique par un interrupteur) est la transformation d'une fonction continue du temps  $f(t)$  en une suite d'unités d'informations  $f^*(t)$  sur cette fonction à des instants discrets du temps nommés **instants d'échantillonnage**. On a :

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT),$$

avec  $\delta(t)$  l'impulsion de Dirac.

soit graphiquement :

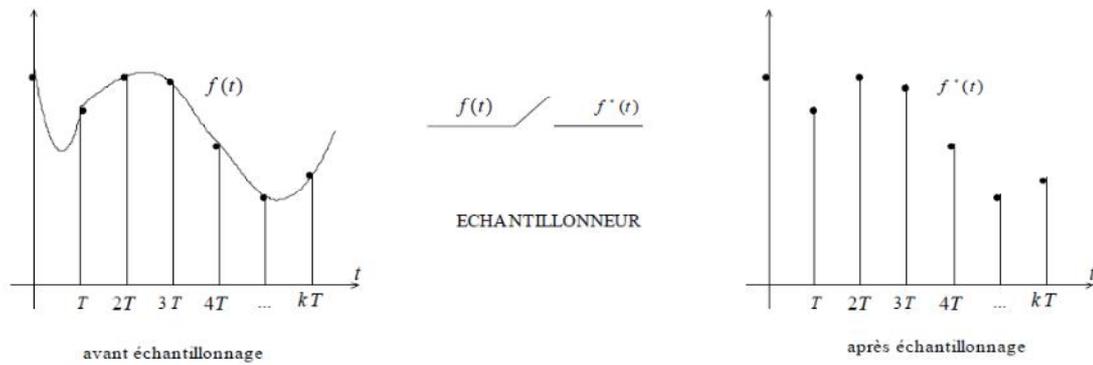


Figure I.3

Le réel  $T$  est la **période d'échantillonnage**, constante pour un processus donné. L'échantillonneur est commandé par l'horloge du calculateur, il peut être assimilé à un interrupteur normalement ouvert qui se ferme aux instants d'échantillonnage  $t = 0$ ,  $t = T$ ,  $t = 2T$ , etc...

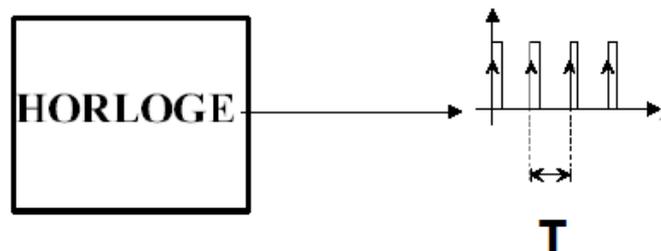


Figure I.4

- Le **convertisseur CAN** (analogique  $\rightarrow$  numérique) effectue ensuite la conversion d'un signal échantillonné  $f^*(t)$  en un signal numérisé  $f_n$  (nombres entiers binaires en 8 bits, 12 bits, 16 bits) apte à être traité par le calculateur. Celui-ci exécute l'**algorithme de commande** programmé par l'utilisateur, et génère, en utilisant l'erreur entre la sortie mesurée et sa consigne, un signal numérisé de commande du système.
- Le **convertisseur CNA** (numérique  $\rightarrow$  analogique) effectue alors la conversion inverse de celle du CAN.
- L'opération de **reconstitution**, ou de **blocage**, consiste enfin à transformer une fonction  $f^*(t)$  définie aux instants d'échantillonnage en une fonction continue du temps  $f(t)$  telle que, pour tout  $k$ .

$$f(t) = f^*(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T[ ,$$

Soit graphiquement :

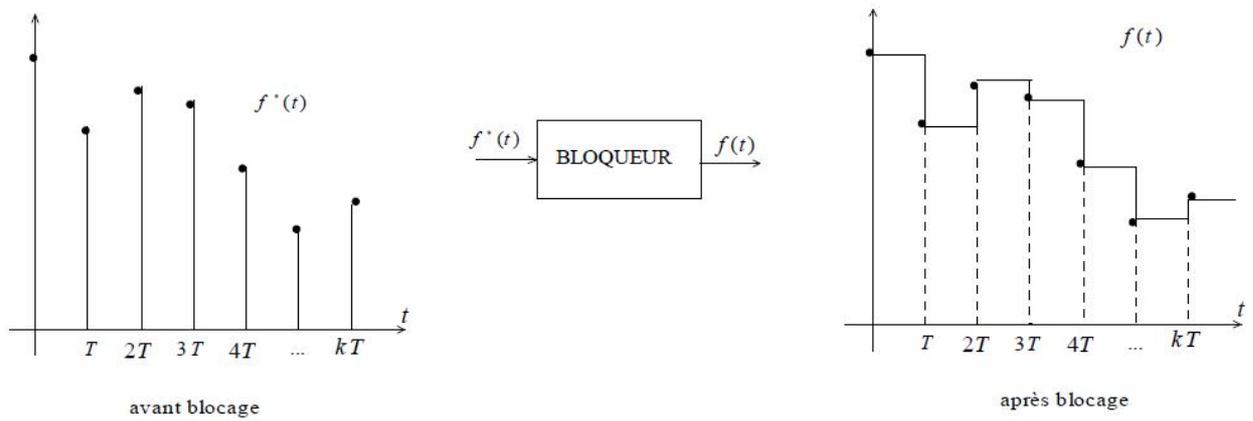


Figure I.5

Le bloqueur sert donc à *maintenir constant le signal de commande* entre deux instants d'échantillonnage.

Le schéma fonctionnel général d'une régulation numérique ainsi que l'allure des différents signaux sont représentés par la figure I.6 :

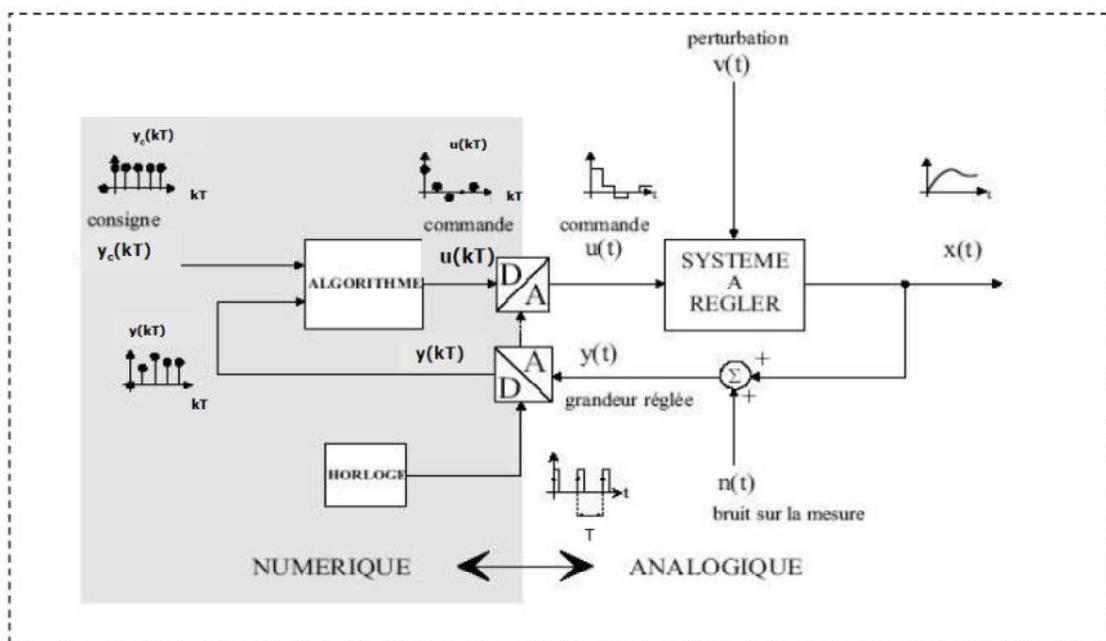


Figure I.6

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités (Figure I.7). De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

**Remarque :** On parle aussi de systèmes et de signaux à temps discret par opposition à la notion de temps continu.

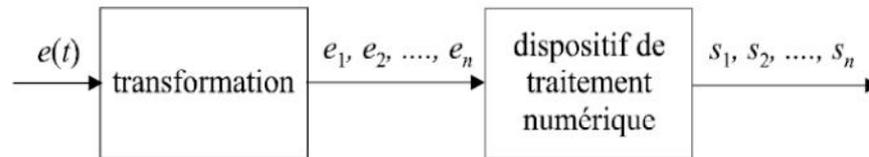


Figure I.7 Traitement numérique d'un signal

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatible avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (figure I.8).

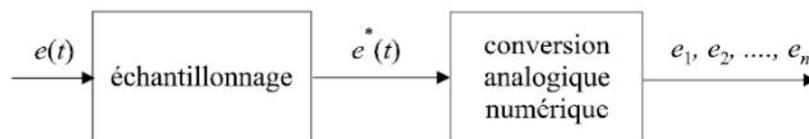


Figure I.8 Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal

Par convention, on notera  $e^*(t)$  le signal échantillonné avant sa conversion analogique numérique.

## I.2 Principes Fondamentaux de l'Echantillonnage des Signaux :

### I.2.1 Définition :

L'échantillonnage d'un signal temporel  $f(t)$  consiste à transformer celui-ci en une suite discrète  $f(nT_e)$  de valeurs prises à des instants  $nT_e$ .  $T_e$  est appelée période d'échantillonnage (en anglais *sampling*).

Les instants  $nT_e$  sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage  $p(t)$ , nulle partout, sauf au voisinage des instants  $nT_e$ . Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne, est représentée sur la figure I.9. Le résultat d'une opération d'échantillonnage, visible sur la figure I.10.

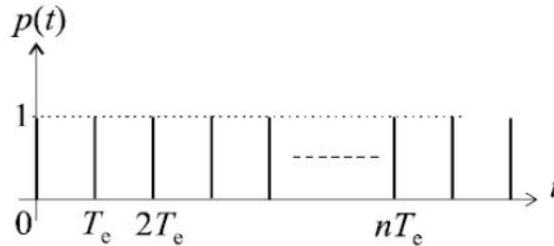
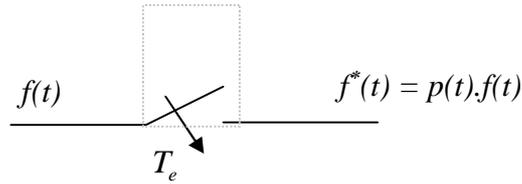


Figure I.9 Fonction d'échantillonnage

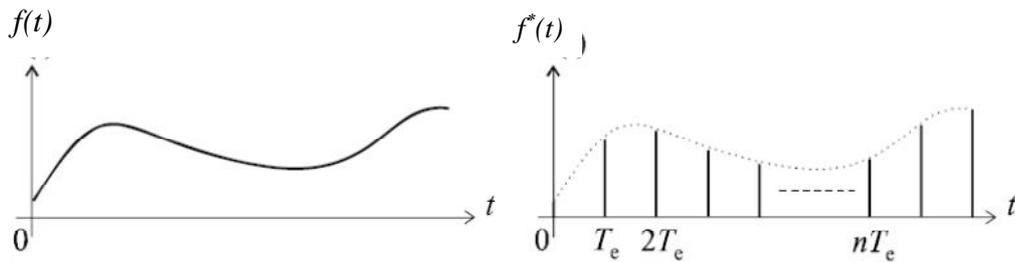


Figure I.10 Échantillonnage d'un signal quelconque

L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal  $f(t)$ , la suite :

$$f(0), f(T_e), f(2T_e), \dots, f(nT_e)$$

que l'on note, en général :  $f^*(t) = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

ou encore :  $f(k) = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

**Remarque :** En toute logique, cette suite ne correspond pas encore à des valeurs numériques. Ce signal échantillonné est un signal analogique à temps discret. Toutefois, on notera de la même manière la suite numérique obtenue après conversion analogique numérique.

### I.3 Exemples de Signaux Échantillonnés Simples :

#### I.3.1 Impulsion unité :

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

$$\delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} \delta^*(nT_e) = 1 \text{ pour } n = 0 \\ \delta^*(nT_e) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

**Remarque** : Nous considérerons comme nuls pour  $t$  négatif, tous les signaux que nous étudierons. La figure I.11 propose une représentation schématique de cette impulsion unité.

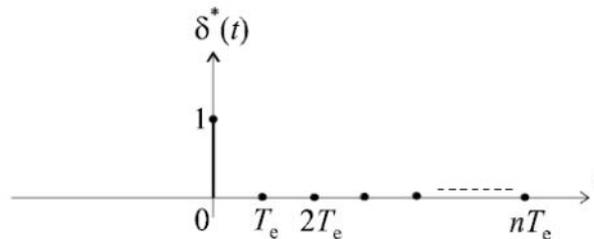


Figure I.11 Impulsion unité

#### I.3.2 Échelon unité :

On définit l'échelon unité échantillonné par le signal :

$$u^*(t) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} u^*(nT_e) = 1 ; \forall n \geq 0 \\ u^*(nT_e) = 0 ; \forall n < 0 \end{cases}$$

La figure I.12 propose une représentation schématique de cet échelon unité.

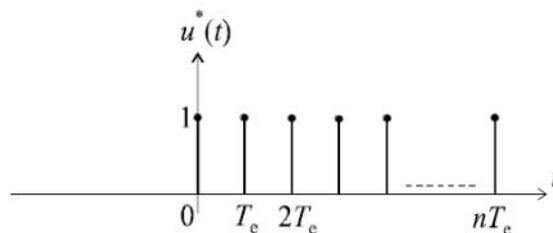


Figure I.12 Échelon unité

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t) = \delta^*(t) + \delta^*(t - T_e) + \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

$$\text{Soit : } u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta^*(t - kT_e)$$

$$\text{On pose parfois : } \delta^*(t - kT_e) = \delta_k$$

$$\text{Ce qui nous conduit à la notation : } u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta_k$$

## I.4 Transformée en z des Signaux Échantillonnés :

### I.4.1 Définition :

Soit  $f(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une période  $T_e$ .

La transformée de Laplace pour les signaux continus s'écrit :

$$F(p) = TL(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Dès lors, avec ce qui précède il est possible de définir la transformée de Laplace d'un signal discret à la donnée d'une période  $T_e$ .

$$F^*(p) = TL(f^*(t)) = \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-pt} dt$$

En ce cas, le signal  $f^*(t)$  étant non nul que pour certaines valeurs discrètes du temps on trouve :

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p}$$

C'est à partir de ce résultat que la transformée en z des signaux discrets a été proposée.

On appelle transformée en z de la séquence  $\{f_k\}$ ,  $k \in N$  la série entière définie par :

$$F(z) = TZ[\{f_k\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) z^{-k} \quad \text{où } (z = e^{T_e p})$$

En résumé :

$$\begin{array}{l} f(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \\ \downarrow \text{par échantillonnage} \\ f(kT_e) \xrightarrow{TZ} F(z) = F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) z^{-k} \end{array}$$

$$\text{Où : } f^*(t) = f(kT_e) = f_k$$

On peut remarquer que cette expression permet de calculer  $F(z)$  à partir de  $f(t)$ . Mais le signal est souvent connu non pas par  $f(t)$ , mais sa transformée de Laplace  $F(p)$ .

D'où l'intérêt de la relation suivante -que l'on admettra- qui exprime  $F(z)$  en fonction de  $F(p)$  :

$$F(z) = \sum_{\text{sur les pôles } p_i} \left[ \text{résidus de } \frac{F(\xi)}{1 - e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}} \right] \text{ de } F(\xi)$$

Théorème  
de Résidus

Pour appliquer cette relation, on utilise le plus souvent les résultats suivants du calcul des résidus :

- Si  $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$  a des pôles **simples**  $p_i$  :

$$F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{T_e p_i} \cdot z^{-1}}$$

En notant  $D'(\xi) = \frac{dD(\xi)}{d\xi}$

- Si  $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$  a des pôles **multiples**, le résidu  $r_i$  relatif au pôle  $p_i$  d'ordre  $n$  a pour valeur :

$$F(z) = r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left\{ (\xi - p_i)^n \cdot \frac{F(\xi)}{1 - e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}} \right\} \right]_{\xi=p_i}$$

**N.B :** Toutes ces relations sont valables aussi bien pour les pôles  $p_i$  **réels** que pour les pôles  $p_i$  **complexes**.

#### I.4.2 Intérêt de la transformée en z :

Nous allons retrouver avec la transformée en z, le même intérêt que celui que nous avons trouvé à la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu. Lorsque nous saurons modéliser le fonctionnement d'un système numérique par une fonction de transfert en z, nous disposerons d'un outil complet permettant de décrire, donc d'étudier leur fonctionnement.

Tout comme l'on écrivait :  $F(p) = G(p).E(p)$

On écrira alors :  $F(z) = G(z).E(z)$

Ce formalisme, qui peut paraître quelque peu ésotérique au départ n'est rien d'autre que la méthode de modélisation, donc de description, des signaux et systèmes échantillonnés.

**I.4.3 Propriétés de la transformée en z :**

La transformée en z est une simple variante de la transformée de Laplace et elle conserve ses propriétés à quelques modifications près. Voici les principales propriétés :

**a) Linéarité :**

Pour les signaux à temps continu on rappelle que :

$$TL[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.TL[f(t)] + \beta.TL[g(t)]$$

De même, on a pour la transformée en z :

$$TZ[\alpha.\{f_k\} + \beta.\{g_k\}] = \alpha.TZ[\{f_k\}] + \beta.TZ\{g_k\}$$

**b) Théorème du retard :**

On désigne par  $f(t - a)$  le signal identique à  $f(t)$  mais retardé de la durée  $a$ . on a :

$$TL[f(t - a)] = e^{-ap} TL[f(t)] = e^{-ap} F[p]$$

De même, si  $f_{k-h}$  est le signal à temps discret  $f_k$  retardé de  $h$  périodes :

$$TZ[\{f_{k-h}\}] = z^{-h}.TZ[\{f_k\}] = z^{-h}.F(z)$$

Ce résultat permet de signaler que l'opérateur  $z^{-1}$  s'apparente à l'opérateur "retard d'une période".

**c) Théorème de la sommation :**

Pour les signaux à temps continu on parle de théorème de l'intégration et il s'écrit :

$$TL\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F[p]$$

Pour les signaux à temps discret on a :

$$TZ\left[\left\{\sum_{i=0}^k f_i\right\}\right] = \frac{z}{z-1}.TZ[\{f_k\}] = \frac{z}{z-1}.F(z)$$

**d) Multiplication par le temps :**

Pour tout signal temporel  $f(t)$  on a :

$$TZ[t.f(t)] = -zT_e \cdot \frac{d}{dz} (TZ[f(t)])$$

**e) Théorème de la valeur initiale :**

La valeur initiale d'un signal à temps continu se déduit de sa transformée de Laplace comme suit:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

La version discrète de ce théorème est donnée par :

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

**f) Théorème de la valeur finale :**

Si  $pF(p)$  est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont à partie réelle négative alors le signal  $f(t)$  converge pour  $t \rightarrow +\infty$  et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

De même, si  $\frac{z-1}{z} F(z)$  est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont dans le cercle unité alors le signal  $f_k$  converge pour  $r \rightarrow +\infty$  et on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

#### I.4.4 Exemples de Calculs de Transformées en z :

**a) Impulsion unité :**

L'impulsion unité étant définie par :

$$\delta_k = 1 \text{ pour } k = 0$$

$$\delta_k = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

On a :

$$F(z) = \Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

**b) Échelon unité :**

L'échelon unité étant défini par :

$$\begin{cases} u^*(kTe) = 1 ; \forall k \geq 0 \\ u^*(kTe) = 0 ; \forall k < 0 \end{cases}$$

On a :

$$F(z) = U(z) = TZ \left[ u^*(kT_e) \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

### c) Exponentielle décroissante :

Soit  $f(t)$  le signal défini par  $f(t) = e^{-at}$  pour  $t \geq 0$ , donc  $f(kT_e) = e^{-akT_e}$  ;  $k \geq 0$  ; bien plus souvent

rencontré sous la forme :  $F(p) = \frac{1}{p+a}$

La transformée en z de ce signal:

- A partir de la définition, on trouve :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{aT_e} \right)^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{e^{aT_e} z} \right)^k$$

D'où par sommation de la série :

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT_e} z}} = \frac{e^{aT_e} z}{e^{aT_e} z - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

- Par le calcul des résidus :

$$F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)} = \frac{1}{\xi + a} \text{ a un seul pôle simple, soit } -a$$

$$\left. \begin{array}{l} N(\xi) = 1 \\ D(\xi) = \xi + a \Rightarrow D'(\xi) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{Te\xi} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

### d) Réponse impulsionnelle d'une « double constante de temps » :

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

On peut appliquer le théorème de résidus, dans le cas des pôles simples :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } \begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = (p+a)(p+b) \Rightarrow D'(p) = 2p + a + b \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(z) = \frac{N(-a)}{D'(-a)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} + \frac{N(-b)}{D'(-b)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-bT_e} \cdot z^{-1}}$$

$$\text{Soit : } F(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - e^{-bT_e} \cdot z^{-1}}$$

### e) Rampe unité :

La rampe unité en temps continu est définie par :

$$f(t) = t \text{ pour } t \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad F(p) = \frac{1}{p^2}$$

**Méthode 01 :**

En remarquant que  $f(t) = t.u(t)$  ( $u(t)$  : échelon unitaire) et en utilisant la propriété étudiée précédemment, on obtient :

$$\text{Soit : } F(z) = -zT_e.TZ[u(t)] = -zT_e \frac{dU(z)}{dz} = -zT_e \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right)$$

$$\text{D'où : } F(z) = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$$

**Méthode 02 :**

- A partir de la définition, on trouve :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} kT_e \cdot z^{-k} = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot z^{-k}$$

Cette fois, ce n'est pas une série géométrique, mais on remarque que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ en dérivant les 2 membres par } z, \text{ on trouve : } \sum_{k=0}^{+\infty} (-k) \cdot z^{-k-1} = \frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\text{En multipliant les 2 membres par } (-z) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot z^{-k} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\text{Finalement, on obtient : } F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT_e \cdot z^{-k} = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$$

**Méthode 03 :**

- A partir de résidus, on remarque que  $F(p)$  possède un seul pôle double à l'origine ; son résidu vaut, d'après la relation donnée précédemment :

$$F(z) = r = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{d\xi} \left\{ (\xi-0)^2 \cdot \frac{\frac{1}{\xi^2}}{1-e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}} \right\} \right]_{\xi=0} = \left[ \frac{T_e \cdot e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}}{(1-e^{T_e \xi} \cdot z^{-1})^2} \right]_{\xi=0} = \frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$$

$$\text{Donc } F(z) = r = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$$

**f) Signal ayant une transformée  $F(p)$  plus complexe :**

Soit à calculer la transformée en z de  $F(p) = \frac{a}{p^2(p+a)}$ , on décompose  $F(p)$  en éléments simples :

$$\frac{a}{p^2(p+a)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p+a)}$$

- On multiplie les 2 membres par  $p^2$ , puis on fait  $p=0$  ; il vient  $1=A \Rightarrow A=1$
- On multiplie les 2 membres par  $(p+a)$ , puis on fait  $p=-a$  ; il vient  $\frac{1}{a} = C \Rightarrow C = \frac{1}{a}$
- On multiplie les 2 membres par  $p$ , puis on fait  $p \rightarrow +\infty$  ; il vient  $0=B+C$   
 $\Rightarrow B = -C = -\frac{1}{a}$

Donc :

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(p+a)}$$

La transformée en z étant linéaire, il s'ensuit :

$$F(z) = TZ \left[ \frac{1}{p^2} \right] - \frac{1}{a} TZ \left[ \frac{1}{p} \right] + \frac{1}{a} TZ \left[ \frac{1}{(p+a)} \right] \Rightarrow F(z) = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

**I.4.5 Tableau de la Transformées en z :**

$f(t)$	$f^*(t) = f(kT_e)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$ : impulsion unité	$\delta(kT_e)$	1	1
$u(t)$ : échelon unité	$u(kT_e)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t.u(t)$ : rampe unité	$kT_e \cdot u(kT_e)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{1}{2!} (kT_e)^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-at}$	$e^{-akT_e}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$t.e^{-at}$	$kT_e e^{-akT_e}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{T_e \cdot z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT_e}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT_e})}{(z-e^{-aT_e})(z-1)}$
$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT_e)e^{-akT_e}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\frac{z[z-e^{-aT_e}(1+aT_e)]}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT_e)e^{-akT_e}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$\frac{z[z(1-e^{-aT_e}-aT_e e^{-aT_e})+e^{-2aT_e}-e^{-aT_e}+aT_e e^{-aT_e}]}{(z-e^{-aT_e})^2(z-1)}$
$\sin(at)$	$\sin(akT_e)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{z \cdot \sin(aT_e)}{z^2 - (2\cos(aT_e))z + 1}$
$\cos(at)$	$\cos(akT_e)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{z(z - \cos(aT_e))}{z^2 - (2\cos(aT_e))z + 1}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$e^{-akT_e} \cos(bkT_e)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT_e}\cos(bT_e))}{z^2 - 2e^{-aT_e}(\cos(bT_e))z + e^{-2aT_e}}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$e^{-akT_e} \sin(bkT_e)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT_e}\sin(bT_e)}{z^2 - 2e^{-aT_e}(\cos(bT_e))z + e^{-2aT_e}}$

**-Théorème de Shannon :**

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  **doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.**

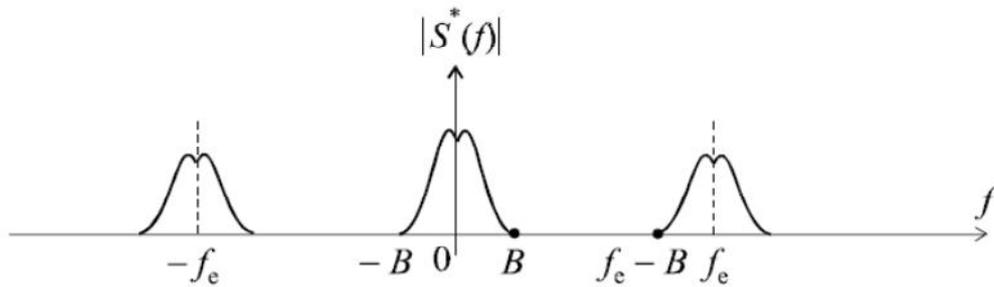


Figure I.13 Spectre d'un signal échantillonné

Si  $B$  est la largeur spectrale du signal  $s(t)$ , autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de  $s^*(t)$ , qui se trouve centré sur la fréquence  $f_e$ , s'étend de  $f_e - B$  à  $f_e + B$ .

La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

$$B < f_e - B$$

Soit :

$$f_e > 2.B$$

**I.6 Transformée de Fourier à Temps Discret :****I.6.1 Définition :**

Soit  $s(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence  $f_e$  (soit une période  $T_e$ ), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon. Soit  $S(z)$  sa transformée en  $z$ .

Rappelons que :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

et que la transformée en  $z$  a été obtenue en posant  $z = e^{pT_e}$  :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

Exactement comme nous pouvons calculer la transformée de Fourier d'un signal à temps continu en posant  $p = j\omega$  (à condition qu'il soit à énergie finie, rappelons-le), nous pouvons tout autant poser  $e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$  à condition, bien sûr, que la somme, ainsi transformée, converge vers une valeur finie, ce que nous supposons.

On obtient alors :

$$S^*(j\omega) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j\omega k T_e} \quad \text{ou encore} \quad \sigma(f) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j2\pi k f T_e}$$

La fonction  $\sigma(f)$  est appelée transformée de Fourier à temps discret du signal  $s_k$ . Son module représente, bien sûr, le spectre du signal échantillonné.

## I.7 Comportement Fréquentiel des Systèmes Echantillonnés :

### I.7.1 Principes Généraux :

Considérons un système de fonction de transfert en  $z$  égale à  $G(z)$  sollicité par un signal d'entrée possédant une transformée en  $z$ ,  $E(z)$  et délivrant un signal de sortie de transformée en  $z$ ,  $S(z)$  (figure I.14).

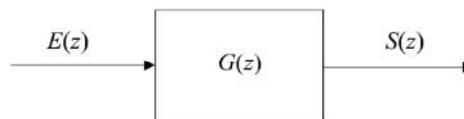


Figure I.14 Schéma général d'un système échantillonné

Le système est régi par l'équation :  $S(z) = G(z).E(z)$

En posant  $z = e^{j\omega T_e}$ , on obtient :  $S(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e}).E(e^{j\omega T_e})$

Les termes  $E(e^{j\omega T_e})$  et  $S(e^{j\omega T_e})$  représentent respectivement les transformées de Fourier à temps discret des signaux d'entrée et de sortie. Par conséquent,  $G(e^{j\omega T_e})$  représente le comportement fréquentiel du système : il s'agit de sa fonction de transfert en fréquence.

Comme pour les systèmes continus, ce comportement peut être représenté graphiquement, par exemple sous forme de diagramme de gain.

La fonction  $G(\omega) = |G(e^{j\omega T_e})|$  correspond, notamment, au gain réel du système en fonction de la pulsation  $\omega$ . On prendra soin, toutefois, de toujours limiter le tracé à l'intervalle  $[0, f_e/2]$ , afin de respecter le théorème de Shannon : l'expression trouvée n'a en effet aucun sens au delà de  $f_e/2$ .

### I.7.2 Exemple :

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence :

$$s_k = \frac{1}{2}(e_k + s_{k-1})$$

En appliquant la transformée en  $z$  à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2} [E(z) + z^{-1} \cdot S(z)]$$

D'où : 
$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Soit :

$$G(\omega) = \left| \frac{0.5}{1 - 0.5 \cdot e^{-j\omega T_e}} \right| = \frac{0.5}{|1 - 0.5(\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e)|}$$

Finalement : 
$$G(\omega) = \frac{0.5}{\sqrt{(1 - 0.5 \cos \omega T_e)^2 + 0.25 \sin^2 \omega T_e}} \Rightarrow G(\omega) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos \omega T_e}}$$

Ou encore :

$$G(f) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos 2\pi f T_e}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos 2\pi \frac{f}{f_e}}}$$

Il convient de tracer cette fonction pour  $f$  variant de 0 à  $f_e/2$ . Sur cet intervalle,  $\cos 2\pi f T_e$  décroît de 1 à -1.  $G(f)$  est donc une fonction strictement décroissante.

On a : 
$$G_{max} = G(0) = \frac{0.5}{\sqrt{0.25}} = 1$$

et : 
$$G_{min} = G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos \pi}} = \frac{0.5}{\sqrt{2.25}} = \frac{1}{3}$$

La figure I.15 représente le diagramme de gain fréquentiel du système.

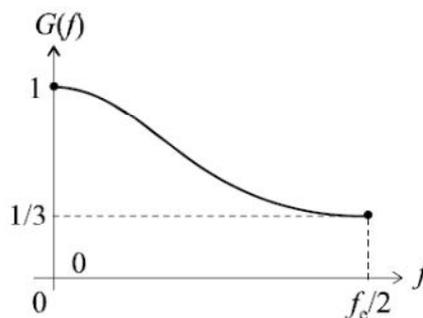


Figure I.15 Diagramme de gain du système

**Remarque :** Au contraire des systèmes à temps continus, l'usage pour les systèmes échantillonnés, consiste à tracer la courbe de gain directement en coordonnées cartésiennes linéaires. On peut certes exprimer le gain en décibels, mais on préférera utiliser une échelle linéaire pour l'axe des abscisses.

## I.8 Relations entre les Modèles à Temps Continu et à Temps Discret :

### I.8.1 Problématique :

Considérons (Figure I.16) un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert  $G(p)$ . Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s'interroger sur l'existence d'un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel.

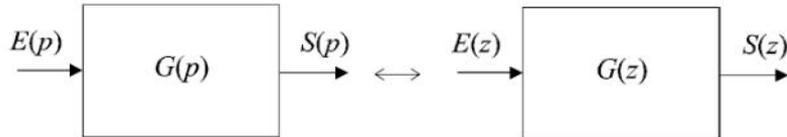


Figure I.16 Recherche d'une équivalence temps continu – temps discret

Le système échantillonné  $G(z)$  sera réputé équivalent au système  $G(p)$  si, soumis à un signal d'entrée  $E(z)$  correspondant à l'échantillonnage du signal continu  $e(t)$  représenté par  $E(p)$ , il délivre à sa sortie un signal  $S(z)$  correspondant à l'échantillonnage du signal  $s(t)$  qui aurait été délivré par le système  $G(p)$ .

### I.8.2 Équivalence à la Dérivation :

La variation  $dx/dt$  en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette équivalence est d'autant plus vraie que la fréquence d'échantillonnage est grande. Or la transformée en  $z$  de l'expression de droite est :

$$TZ\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} X(z)(1 - z^{-1})$$

De même, le terme  $dx/dt$  a pour transformée de Laplace :  $pX(p)$ .

Par conséquent, l'équivalence naturelle entre une fonction de transfert continue en  $p$  et sa fonction de transfert échantillonnée en  $z$  est :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

- **Comparaison fréquentielle des deux modèles :**

$$G(p) \xrightarrow{p=j\omega} G(j\omega)$$

$$G(z) \xrightarrow{z=e^{j\omega T_e}} G(j\omega)$$

La transformation  $p \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$  va donc se traduire par  $p \leftrightarrow \frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e}$

Il est clair que  $\frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e} \neq j\omega$  mais, pour des valeurs faibles de la fréquence  $\omega/2\pi$ , on peut

écrire : 
$$\frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e} \approx \frac{1-(1-j\omega T_e)}{T_e} = j\omega$$

Nous en concluons que le modèle échantillonné censé être équivalent au modèle à temps continu en utilisant l'équivalence à la dérivation est relativement correct pour les basses fréquences.

### I.8.3 Équivalence à l'Intégration :

a) *Définition :*

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. Nous mentionnons ici cette

équivalence sans la justifier : 
$$p \leftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

## I.9 Fonction de Transfert en z de Systèmes Echantillonnés :

### I.9.1 Définition de la Fonction de Transfert Echantillonné :

Considérons un système continu et linéaire de fonction de transfert  $G(p)$  qui est attaqué par un signal échantillonné  $e^*(t)$ .

La sortie  $s(t)$  du système continu est évidemment, par nature un signal continu, présent à chaque instant. Dans le domaine de Laplace, elle s'exprime sous la forme :  $S(p) = E^*(p).G(p)$

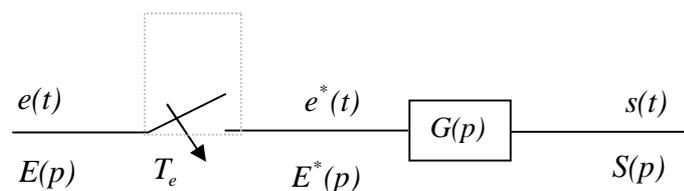


Figure I.17

Mais l'expression de  $S(p)$  est d'un emploi peu commode, car elle contient des termes en  $p$  et  $e^{Tp}$ . Pour simplifier l'analyse du système, on procède de la façon suivante : on ne s'intéresse aux valeurs prises par la sortie qu'aux valeurs prises par la sortie qu'aux seuls instants

d'échantillonnage ; cela revient à considérer en série un échantillonneur *fictif* , synchrone du premier.

On peut alors définir la fonction échantillonnée du système, de la manière suivant :

$$H^*(p) = \frac{S^*(p)}{E^*(p)} , \text{ ou encore } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

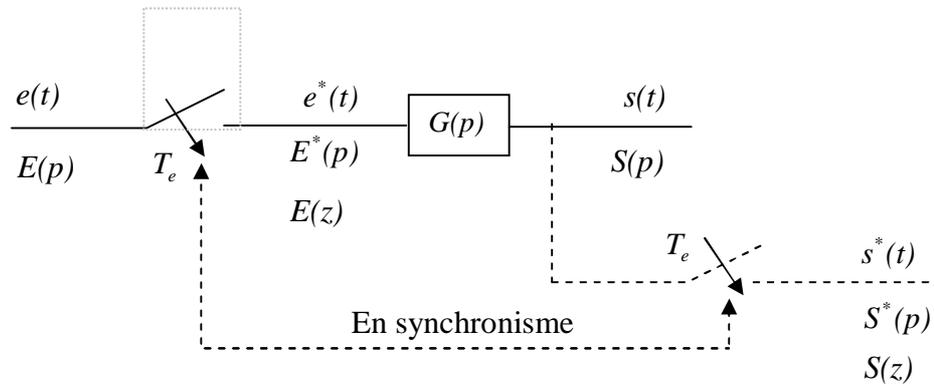


Figure I.18

Donc :

La fonction de transfert échantillonné du système suivant :



est la transformée en z  $G(z)$  de la fonction de transfert continue  $G(p)$ .

**I.9.2 Notions de schéma bloc :**

Rappels sur la réduction des schémas-blocs :

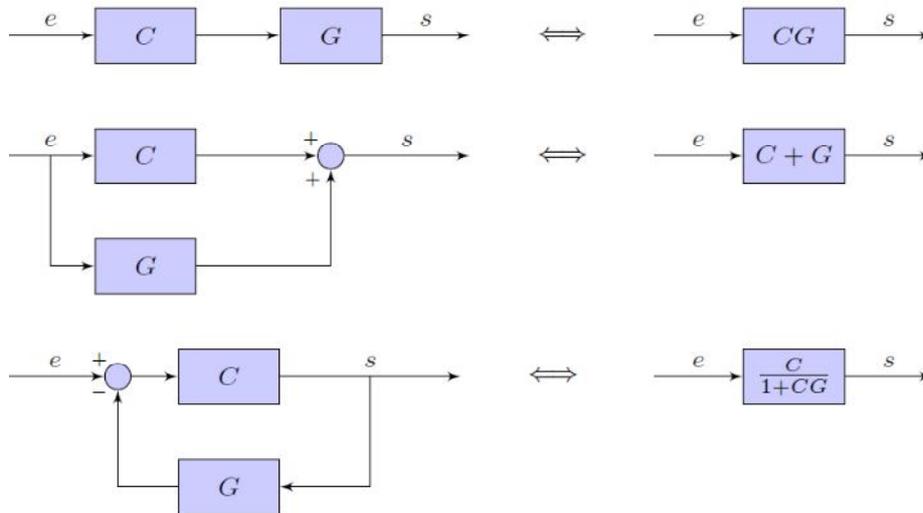


Figure I.19 Opérations fondamentales de réduction des graphes. Le schéma de droite est équivalent à celui de gauche

### I.9.3 Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0 :

Le bloqueur d'ordre 0 (en anglais "Zero Order Hold") est l'objet physique qui permet de passer d'un signal numérique échantillonné, qui ne contient que de l'information et seulement aux instants d'échantillonnage, à un signal analogique continu par morceaux.

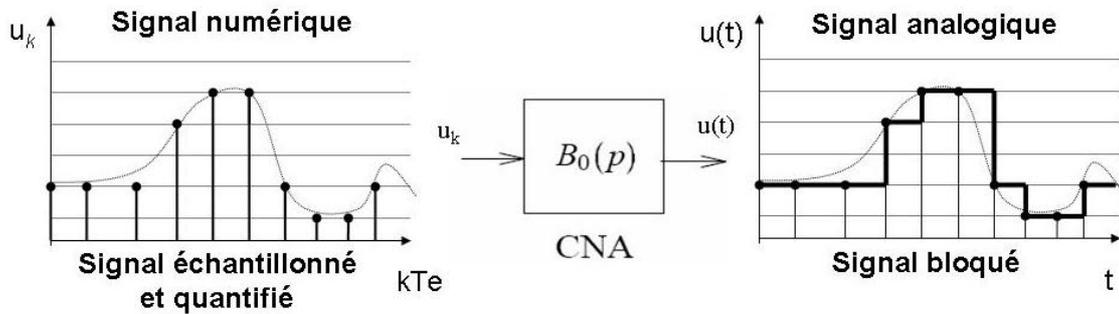


Figure I.20 Signaux d'entrée et de sortie d'un bloqueur d'ordre 0

On cherche la transformée en z du schéma bloc donnée en figure I.21.

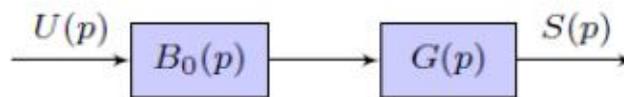
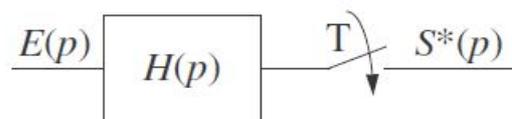


Figure I.21 Fonction de transfert continue précédée d'un bloqueur d'ordre 0

### I.9.4 Fonction de Transfert en série :

a. Premier cas :



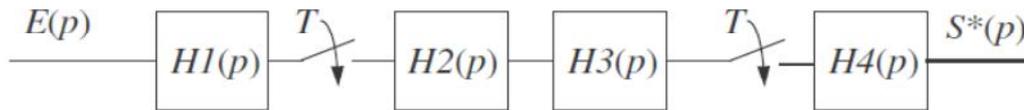
$$S(p) = E(p).H(p)$$

$$S^*(p) = \overline{EH}^*(p) \text{ Cette notation indique que l'on échantillonne le produit } E(p).H(p).$$

**Remarque n° 1 :** On vérifie que  $\overline{EH}^*(p) \neq E^*(p).H^*(p)$

Ainsi si  $S(z) = \overline{EH}(z)$  on ne peut pas définir une fonction de transfert.

**b. Deuxième cas :**



On trouve facilement que :

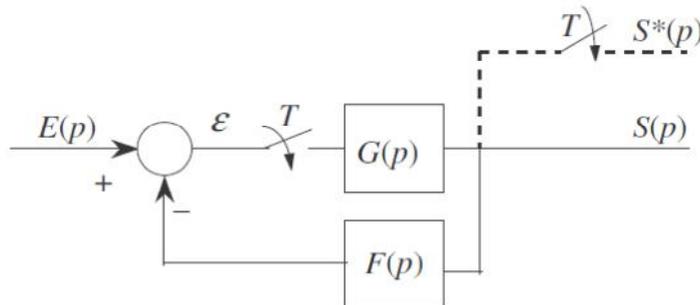
$$S^*(p) = \overline{EH_1}^*(p) \cdot \overline{H_2H_3}^*(p) \cdot H_4^*(p) \quad \Rightarrow \quad S(z) = \overline{EH_1}(z) \cdot \overline{H_2H_3}(z) \cdot H_4(z)$$

**En résumé :**

- Si deux éléments continus  $H_1$  et  $H_2$  sont séparés par un échantillonneur, la fonction de transfert échantillonnée équivalente est égale au produit des fonctions de transferts échantillonnées ;
- Si les deux éléments ne sont pas séparés par un échantillonneur la fonction de transfert échantillonnée équivalente est égale à la transformée en z du produit  $H_1(p) \cdot H_2(p)$ .

**I.9.5 Fonction de Transfert en Boucle Fermée :**

Calculons *la fonction de transfert en boucle fermée FTBF(z)*, ainsi que *l'erreur séquentielle*  $\varepsilon(z)$  (erreur aux instants d'échantillonnage) du système ci dessous. Ce système comporte un élément de retour (un capteur) de fonction de transfert  $F(p)$ .



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot F(p) \\ S(p) &= \varepsilon^*(p) \cdot G(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon^*(p) \cdot G(p) \cdot F(p)$$

Où :

$$\varepsilon^*(p) = E^*(p) - \varepsilon^*(p) \cdot \overline{GF}^*(p) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{GF}^*(p)}$$

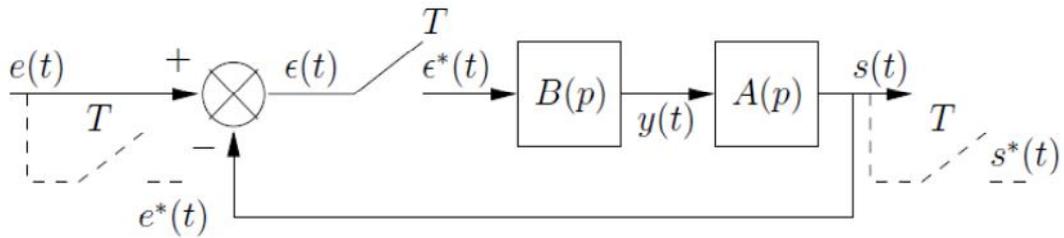
$$\varepsilon^*(z) = \frac{E(z)}{1 + \overline{GF}(z)} \quad \text{ainsi} \quad \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GF}(z)} = FTBF(z)$$

En résumé :

CONFIGURATION DU SYSTEME BOUCLE	SORTIE $S(z)$
	$\frac{G(z)}{1 + \overline{G \cdot H}(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{G(z)}{1 + G(z) \cdot H(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{G_2(z) \cdot \overline{E \cdot G_1}(z)}{1 + \overline{H \cdot G_1 \cdot G_2}(z)}$
	$\frac{G_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + \overline{G_1(z) \cdot G_2 \cdot H}(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{\overline{E \cdot G}(z)}{1 + \overline{G \cdot H}(z)}$

**Exemple illustratif :**

On considère, le système de la figure suivante :



Où :  $A(p) = \frac{A_0}{p + a}$

Et

$B(p) = B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$

Où  $A_0$  et  $a$  sont des scalaires réels.

Montrer que la fonction de transfert en  $z$  ;  $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$  a pour expression :

$$F(z) = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} = \frac{A_0}{a} \frac{1 - e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e}) + \frac{A_0}{a}(1 - e^{-aT_e})}$$

**I.9.6 Bloqueur d'Ordre Zéro :**

Durant un intervalle d'échantillonnage  $[nT, (n+1)T]$ , le bloqueur d'ordre zéro maintient le signal continu à une valeur constante, égale à la valeur de l'échantillon  $e_n$ . Le signal ainsi obtenu est donc constant par morceaux.

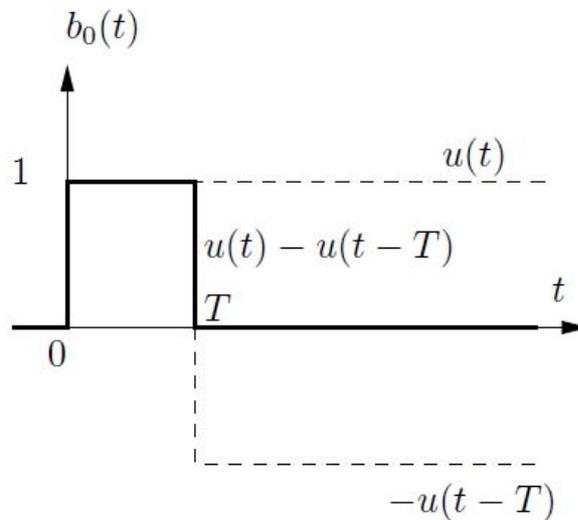


Figure I.22 Construction d'un signal créneau

On utilisera l'abréviation BOZ pour désigner un bloqueur d'ordre zéro.

On dit aussi que le *bloqueur d'ordre zéro* permet l'extrapolation linéaire de degré 0 entre  $nT$  et  $(n+1)T$  à partir de la valeur  $e_n$ .

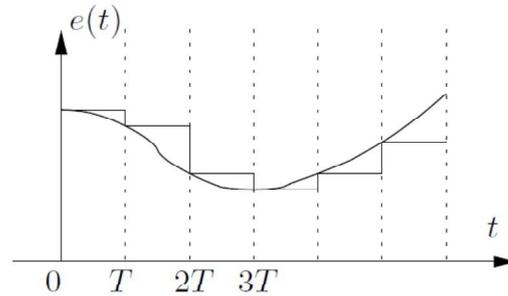


Figure I.23 Comportement du bloqueur d'ordre zéro

**Propriété :**

La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre zéro est donnée par :  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$

**I.6.10 Modélisation des CAN et CNA :**

**a. Cas du CAN (Convertisseur Analogique Numérique) :**

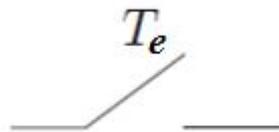


Figure I.24 Représentation usuelle du CAN

**b. Cas du CNA (Convertisseur Numérique Analogique) :**

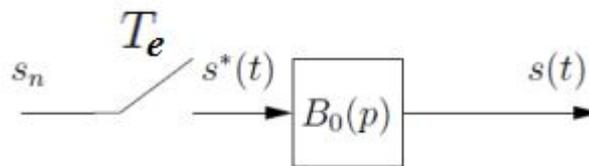


Figure I.25 Représentation usuelle du CNA

**I.6.11 Structure Typique d'Asservissement Numérique :**

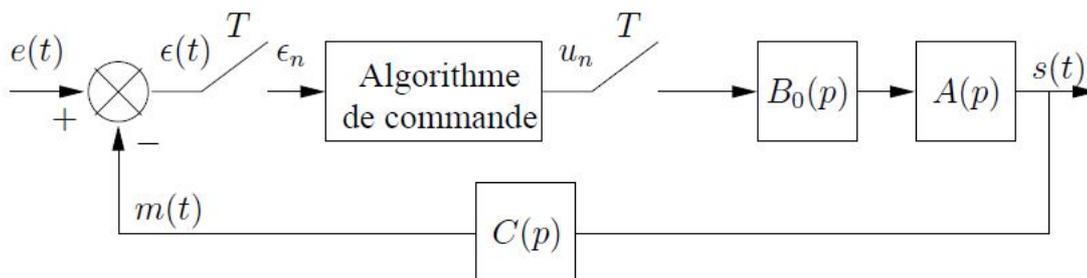


Figure I.26 Structure typique d'asservissement numérique