Université d'El-Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020-2021
1-ère année master Mathématiques
Calcul Différentiel

Série d'exercices n1

Exercice 1. Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, $x \in [0,1]$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application définie par $\varphi(f) = (f \circ \sin)(x)$. Montrer que φ est une application linéaire continue sur E. Déduire sa différentielle. Est-ce que $\varphi \in C^1(E)$?

Exercice 2. Soient E un evn et $\varphi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ une application définie par $\varphi(u,v) = v \circ u$. Montrer que φ est différentiable sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Déterminer sa différentielle.

Exercice 3. Soient E, F des evn et $f : E \to F$ une application satisfaisant

$$\forall x, h \in E : \ \|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\|^{\sqrt{2}}.$$

L'application f est-elle différentiable en $x \in E$? Si oui, calculer $Df(x)$.

Exercice 4. Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ une application définie par $\varphi(h) = f \circ h$. Montrer que $\varphi \in C^1(E)$.

Exercice 5. Soient E un evn et $f, g : E \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|x\|$. L'application f (resp. g) est-elle différentiable en 0_E ? Si oui, calculer $Df(0_E)$ (resp. $Dg(0_E)$).

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 \sin(\frac{y}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et continues sur $\mathbb{R}^2$? est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. Soient f, u et v des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de dérivées partielles des f, u et v.

Exercice 8. Soient E, F et G des evn, $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue et $u : \mathbb{R} \to E$, $v : \mathbb{R} \to F$ des applications de classe C^1. On définit $\varphi(t) = f(u(t), v(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En utilisant les données, calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 9. Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et

$$\begin{aligned}\varphi : C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi(f) = \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2 + 1}.\end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de φ en $f \in E$ suivant le vecteur $v \in E, v \neq 0_E$.
2. Montrer que φ est différentiable en $f \in E$ et déterminer $D\varphi(f)$.

Exercice 10. Considérons $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et

$$\begin{aligned}\varphi : E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi(f) = \int_0^1 (f(x))^2 dx.\end{aligned}$$

1. Montrer que φ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Déterminer la différentielle seconde de φ.

Exercice 11. Soit E un evn.

1. Considérons $\varphi : \mathcal{L}(E) \times E \to E,\ (u, x) \mapsto \varphi(u, x) = u(x)$. Montrer que φ est de classe C^∞. Déterminer $D^n\varphi,\ n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $\psi : E \to \mathcal{L}(E)$ une application de classe C^k. On définit $\theta(x) = (\psi(x))(x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que θ est de classe C^k sur E.

Exercice 1.

• φ est linéaire et continue. Notons que si $f \in E$, l'écriture $\varphi(f) = (f \circ \sin)(x) = f(\sin x)$ a un sens car $\sin x \in [0,1]$ dès que $x \in [0,1]$. Donc, φ est bien définie.

∗ φ est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + g) &= ((\lambda f + g) \circ \sin)(x) = ((\lambda f) \circ \sin + g \circ \sin)(x) \\
&= ((\lambda f) \circ \sin)(x) + (g \circ \sin)(x) \\
&= \lambda (f \circ \sin)(x) + (g \circ \sin)(x) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g),
\end{aligned}$$

d'où la linéarité de l'application φ.

∗ Continuité de φ. Comme φ est linéaire et satisfait

$$\forall f \in E : \ |\varphi(f)| = |(f \circ \sin)(x)| = |f(\sin x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty,$$

l'application φ est continue sur E.

• Comme $\varphi \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, l'application φ est différentiable sur E et sa différentielle en $f \in E$ est $D\varphi(f) : E \to \mathbb{R}$, $h \mapsto D\varphi(f)(h) = \varphi(h)$, de sorte que

$$\forall f \in E : \quad D\varphi(f) = \varphi.$$

• L'application différentielle $D\varphi : E \to E'$, $f \mapsto D\varphi(f) = \varphi$ est constante, donc, elle est continue. D'où $\varphi \in C^1(E)$.

Exercice 2.

L'application φ est bilinéaire. En effet, si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathcal{L}(E) : \quad \varphi(\alpha u_1 + u_2, v) &= v \circ (\alpha u_1 + u_2) = v \circ (\alpha u_1) + v \circ u_2 \\
&= \alpha v \circ u_1 + v \circ u_2 = \alpha \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)
\end{aligned}$$

puisque $v : E \to E$ est linéaire, ce qui montre que φ est linéaire par rapport à la première variable. En outre, si $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall u \in \mathcal{L}(E) : \quad \varphi(u, \beta v_1 + v_2) &= (\beta v_1 + v_2) \circ u = (\beta v_1) \circ u + v_2 \circ u \\
&= \beta v_1 \circ u + v_2 \circ u = \beta \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2),
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que φ est linéaire par rapport à la seconde variable. Par ailleurs, comme φ est bilinéaire et satisfait

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) : \quad \|\varphi(u,v)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|v \circ u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)} \|v\|_{\mathcal{L}(E)},$$

l'application φ est continue. Donc, φ est différentiable sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ et sa différentielle en $(u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ est donnée par

$$\forall (h,k) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) : \quad D\varphi(u,v)(h,k) = \varphi(u,k) + \varphi(h,v) = k \circ u + v \circ h.$$

Exercice 3.

On écrit :

$$f(x+h) - f(x) = 0_F + f(x+h) - f(x).$$

On choisit $Df(x)(h) = 0_F$ pour tout $h \in E$ et $o(h) = f(x+h) - f(x)$. Remarquons que $Df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$. En outre,

$$0 \leq \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = \frac{\|h\|_E^{\sqrt{2}}}{\|h\|_E} = \|h\|_E^{\sqrt{2}-1} \quad \text{avec} \quad \sqrt{2} - 1 > 0,$$

ce qui nous conduit à

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Donc, f est différentiable en $x \in E$ de différentielle

$$Df(x) : E \to F,\ h \mapsto Df(x)(h) = 0_F.$$

<u>Exercice 4.</u>

Soit $g \in E$. Si on applique la formule de Taylor-Young à la fonction f à l'ordre $n = 1$, on trouve

$$\varphi(g(x) + h(x)) - \varphi(g(x)) = f(g(x) + h(x)) - f(g(x)) = h(x) f'(g(x)) + h(x)\varepsilon(h(x))$$

avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. On choisit

$$\forall h \in E : \quad D\varphi(g)(h) = hf' \circ g$$

et

$$o(h) = h\varepsilon(h).$$

L'application $D\varphi(g) : E \to E,\ h \mapsto hf' \circ g$ est linéaire et satisfait

$$\forall h \in E : \quad \|D\varphi(g)(h)\|_\infty = \|hf' \circ g\|_\infty \leq \|f' \circ g\|_\infty \|h\|_\infty,$$

donc, $D\varphi(g)$ est continue. D'où, $D\varphi(g) \in \mathcal{L}(E)$. En outre,

$$\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0, \exists \delta > 0,\ |t| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq \alpha).$$

Pour $h \in E$, $0 < \|h\|_\infty \leq \delta$, il vient

$$\forall x \in [0,1] : \quad |\varepsilon(h(x))| \leq \alpha,$$

ce qui nous conduit à

$$\forall x \in [0,1] : \quad |h(x)\varepsilon(h(x))| \leq \alpha |h(x)|.$$

Donc,

$$\frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \alpha,$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0.$$

Alors, l'application φ est différentiable en $g \in E$ de différentielle

$$D\varphi(g) : E \to E,\ h \mapsto hf' \circ g.$$

Montrons que $D\varphi : E \to \mathcal{L}(E)$, $g \mapsto D\varphi(g)$ est continue. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite convergente dans $(E, \|.\|_\infty)$, de limite g. Donc,

$$\forall \alpha > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \quad \|g_n - g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \alpha,$$

ce qui implique qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1] : \quad g_n(x),\ g(x) \in [-M, M].$$

Comme f' est continue sur le compact $[-M, M]$, f' est uniformément continue sur $[-M, M]$. Donc,

$$\forall \beta > 0, \exists \delta > 0,\ \forall t_1, t_2 \in [-M, M],\ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |f'(t_2) - f'(t_2)| \leq \beta.$$

Maintenant, si $\alpha \leq \delta$, il vient

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0 : \quad \|D\varphi(g_n) - D\varphi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \|D\varphi(g_n)(h) - D\varphi(g)(h)\|_\infty \\
&= \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \|h(f' \circ g_n - f' \circ g)\|_\infty \\
&\leq \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \{\|h\|_\infty \|(f' \circ g_n - f' \circ g)\|_\infty\} \\
&\leq \|(f' \circ g_n - f' \circ g)\|_\infty \leq \beta.
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \|D\varphi(g_n) - D\varphi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$ et $D\varphi$ est continue. On conclut que $\varphi \in C^1(E)$.

<u>Exercice 5.</u>

• On a :

$$f(0_E + h) - f(0_E) = \|h\|_E^2.$$

On choisit $Df(0_E)(h) = 0$ pour tout $h \in E$ et $o(h) = \|h\|_E^2$. L'application $Df(0_E) \in E'$ et

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|h\|_E^2}{\|h\|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \|h\|_E = 0.$$

Donc, f est différentiable en 0_E de différentielle

$$Df(0_E) : E \to \mathbb{R},\ h \mapsto Df(0_E)(h) = 0.$$

• Par l'absure, on suppose que g est différentiable en 0_E. Il existe une application $L \in E'$ telle que

$$\|0_E + h\|_E - \|0_E\|_E = L(h) + o(h)$$

avec

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|_E} = 0.$$

Pour $h = tx$, $x \in E, x \neq 0_E, t \in \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$\|tx\|_E = L(tx) + o(tx),$$

de sorte que

$$t\|x\|_E = tL(x) + \|x\|_E \frac{o(tx)}{\|x\|_E},$$

ce qui nous conduit à

$$\|x\|_E = L(x) + \|x\|_E \frac{o(tx)}{\|tx\|_E}.$$

Lorsque t tend vers 0^+, on obtient

$$\|x\|_E = L(x) + \|x\|_E \lim_{t\to 0^+} \frac{o(tx)}{\|tx\|_E} = L(x).$$

Comme $L(0_E) = 0 = \|0_E\|_E$ (car L est linéaire), on déduit que

$$\forall x \in E : \quad L(x) = \|x\|_E,$$

ce qui contredit le fait que $\|.\|_E$ n'est pas linéaire. Donc, l'application g n'est pas différentiable en 0_E.

Remarque : On peut aussi remarquer que g n'admet pas une dérivée en 0_E suivant tout vecteur $v \in E - \{0_E\}$, de sorte que la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(0_E + tv) - g(0_E)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \|v\|_E$$

n'existe pas, de déduire que g n'est pas différentiable en 0_E.

Exercice 7.

On écrit $g = f \circ h$ où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Comme u et v sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, l'application h est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\begin{aligned} \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 : \quad Dh(x,y)(h,k) &= (Du(x,y)(h,k), Dv(x,y)(h,k)) \\ &= (h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), h\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)). \end{aligned}$$

L'application g est l'application composée des deux applications différentiables h et f, donc, elle est différentiable en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de différentielle

$$\begin{aligned} Dg(x,y)(h,k) &= Df(h(x,y))(Dh(x,y)(h,k)) \\ &= Df(u(x,y), v(x,y))(h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), h\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)) \end{aligned}$$

pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que

$$\begin{aligned} h\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= (h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y))\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \\ &\quad +(h\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial v}{\partial y}(x,y))\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(u(x,y)+t, v(x,y)) - f(u(x,y), v(x,y))}{t}, \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(u(x,y), v(x,y)+t) - f(u(x,y), v(x,y))}{t}. \end{aligned}$$

Si $h = 1$ et $k = 0$, on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))$$

et si $h = 0$ et $k = 1$, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad = \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)).$$

Exercice 8.

L'application φ est composée de deux applications différentiables f et g et on écrit $\varphi = f \circ g$ où $g : \mathbb{R} \to E \times F$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ avec

$$\forall t, s \in \mathbb{R} : \quad Dg(t)(s) = (Du(t)(s), Dv(t)(s)) = (su'(t), sv'(t)),$$

$$\forall (a,b),(h,k) \in E \times F : \quad Df(a,b)(h,k) = f(a,k) + f(h,b).$$

Donc, l'application φ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$ de différentielle

$$\forall t, s \in \mathbb{R} : \quad D\varphi(t)(s) = Df(g(t))(Dg(t)(s)) = (Du(t)(s), Dv(t)(s)) = (su'(t), sv'(t)),$$

$$\forall s \in \mathbb{R} : \quad D\varphi(t)(s) = Df(g(t))(Dg(t)(s)) = Df(u(t),v(t))(su'(t), sv'(t)),$$

de sorte que

$$\forall s \in \mathbb{R} : \quad s\varphi'(t) = f(u(t), sv'(t)) + f(su'(t), v(t)).$$

En particulier, si $s = 1$ et $t = 0$, on trouve

$$\varphi'(0) = f(u(0), v'(0)) + f(u'(0), v(0)).$$

Exercice 9.

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(f+tv) - \varphi(f)}{t} &= \frac{1}{t}\Big\{\int_0^1 \frac{dx}{(f(x)+tv(x))^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2+1}\Big\} \\
&= \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{(f(x))^2 - (f(x)+tv(x))^2}{((f(x)+tv(x))^2+1)((f(x))^2+1)}dx \\
&= \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{-tv(x)(2f(x)+tv(x))}{((f(x)+tv(x))^2+1)((f(x))^2+1)}dx \\
&= -\int_0^1 \frac{v(x)(2f(x)+tv(x))}{((f(x)+tv(x))^2+1)((f(x))^2+1)}dx.
\end{aligned}$$

Posons

$$h_t(x) = \frac{v(x)(2f(x)+tv(x))}{((f(x)+tv(x))^2+1)((f(x))^2+1)}$$

pour tout $x \in [0,1]$ et t voisin de 0. Remarquons que l'on a :

$$\forall x \in [0,1] : \quad \lim_{t\to 0} h_t(x) = \frac{2f(x)v(x)}{((f(x))^2+1)^2}.$$

En outre,

$$|h_t(x)| \leq |v(x)|(2|f(x)| + |t||v(x)|) \leq |v(x)|(2|f(x)| + |v(x)|)$$

pour tout $x \in [0,1]$ et t voisin de 0 avec $x \mapsto |v(x)|(2|f(x)|+|v(x)|)$ une fonction intégrable sur $[0,1]$. Donc,

$$(\varphi_f)'(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(f+tv)-\varphi(f)}{t} \quad = \quad -\int_0^1 \frac{2f(x)v(x)}{((f(x))^2+1)^2}dx. \tag{1}$$

2. D'après (1), il suffit de montrer que

$$\lim_{\|h\|_\infty\to 0} \frac{\varphi(f+h)-\varphi(f)-(\varphi_f)'(h)}{\|h\|_\infty} = 0. \tag{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
0 \le \frac{|\varphi(f+h)-\varphi(f)-(\varphi_f)'(h)|}{\|h\|_\infty} &= \frac{1}{\|h\|_\infty}\Big|\int_0^1 \frac{dx}{(f(x)+h(x))^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2+1} \\
&\qquad + \int_0^1 \frac{2f(x)h(x)}{((f(x))^2+1)^2}dx\Big| \\
&= \frac{1}{\|h\|_\infty}\Big|\int_0^1 \frac{2f(x)(h(x))^3-(h(x))^2}{((f(x)+h(x))^2+1)((f(x))^2+1)^2}dx\Big| \\
&\le \frac{1}{\|h\|_\infty}\int_0^1 \|h\|_\infty^2(2\|h\|_\infty\|f\|_\infty+1)dx \\
&= \|h\|_\infty(2\|h\|_\infty\|f\|_\infty+1) \to 0 \quad \text{lorsque } \|h\|_\infty \to 0.
\end{aligned}$$

Donc, la limite (2) est vérifiée. On conclut que φ est différentiable en $f \in E$ et sa différentielle est donnée par

$$\forall h \in E : \quad D\varphi(f)(h) = (\varphi_f)'(h) = -\int_0^1 \frac{2f(x)h(x)}{((f(x))^2+1)^2}dx.$$

<u>Exercice 10.</u>

1. Soit $f \in E = C([0,1],\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\forall h \in E : \quad \varphi(f+h)-\varphi(f) &= \int_0^1 (f(x)+h(x))^2dx - \int_0^1 (f(x))^2dx \\
&= \int_0^1 2f(x)h(x)dx + \int_0^1 (h(x))^2dx.
\end{aligned}$$

On choisit

$$D\varphi(f)(h) = \int_0^1 2f(x)h(x)dx, \quad o(h) = \int_0^1 (h(x))^2dx.$$

L'application $D\varphi(f) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire et satisfait

$$\forall h \in E : \quad |D\varphi(f)(h)| \le 2\int_0^1 |f(x)h(x)|dx \le 2\|f\|_\infty\|h\|_\infty,$$

donc, $\varphi(f)$ est continue. D'où, $D\varphi(f) \in E'$. En outre,

$$0 \le \frac{|o(h)|}{\|h\|_\infty} = 2\frac{\int_0^1 |h(x)|^2dx}{\|h\|_\infty} \le 2\frac{\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty} = 2\|h\|_\infty,$$

ce qui nous conduit à

$$\lim_{\|h\|_\infty\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|_\infty} = 0.$$

On conclut que φ est différentiable sur E de différentielle

$$\forall f, h \in E: \quad D\varphi(f)(h) = \int_0^1 2f(x)h(x)dx.$$

2. Soit $f \in E$. On a

$$D\varphi(f+h)(k) - D\varphi(f)(k) = \int_0^1 2(f(x)+h(x))k(x)dx - \int_0^1 2f(x)k(x)dx = \int_0^1 2h(x)k(x)dx.$$

On choisit

$$\forall (h,k) \in E \times E: \quad D^2\varphi(f)(h,k) = \int_0^1 2h(x)k(x)dx$$

et

$$o(h)(k) = 0.$$

Comme $D^2\varphi(f)$ est bilinéaire et satisfait

$$\forall (h,k) \in E \times E : |D^2\varphi(f)(h,k)| \leq 2\|h\|_\infty \|k\|_\infty,$$

l'application $D^2\varphi(f)$ est continue sur $E \times E$. Donc, $D^2\varphi(f) \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$. On déduit que φ est deux fois différentiable en $f \in E$ et sa différentielle seconde :

$$D^2\varphi(f) : E \times E \to \mathbb{R}, \ (h,k) \mapsto \int_0^1 2h(x)k(x)dx.$$

Exercice 11.

1. Montrons que φ est bilinéaire et continue. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned} \forall x \in E: \quad \varphi(\alpha u_1 + u_2, x) &= (\alpha u_1 + u_2)(x) = (\alpha u_1)(x) + u_2(x) = \alpha u_1(x) + u_2(x) \\ &= \alpha\varphi(u_1, x) + \varphi(u_2, x), \end{aligned}$$

ce qui montre que φ est linéaire par rapport à la première variable. En outre, si $x_1, x_2 \in E$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{L}(E): \quad \varphi(u, \beta x_1 + x_2) &= u(\beta x_1 + x_2) = \beta u(x_1) + u(x_2) \\ &= \beta\varphi(u, x_1) + \varphi(u, x_2) \end{aligned}$$

puisque u est linéaire, ce qui veut dire que φ est linéaire par rapport à la seconde variable. Par ailleurs, comme φ est bilinéaire et satisfait

$$\forall (u,x) \in \mathcal{L}(E) \times E: \quad \|\varphi(u,x)\|_E = \|u(x)\|_E \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|_E$$

puisque $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application φ est continue. On déduit que $\varphi \in C^\infty(\mathcal{L}(E) \times E, E)$ et pour tout $(u,x), (v,y), (w,z) \in \mathcal{L}(E) \times E$:

$$\begin{aligned} D\varphi(u,x)(v,y) &= \varphi(u,y) + \varphi(v,x) = u(y) + v(y), \\ D^2\varphi(u,x)((v,y),(w,z)) &= \varphi(v,z) + \varphi(w,y) = v(z) + w(z), \\ D^k\varphi(u,x) &= 0_{\mathcal{L}_k(\mathcal{L}(E)\times E, E)}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3. \end{aligned}$$

2. Considérons $\rho = (\psi, Id_E) : E \to \mathcal{L}(E) \times E, \ x \mapsto (\psi(x), x)$ qui est une application de classe C^k puisque ψ et Id_E sont de classe C^k. Comme θ est la composée de deux applications de classe C^k qui sont φ et ρ, de sorte que $\theta = \varphi \circ \rho$, l'application θ est de classe C^k sur E.