وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمة الأخضر بالوادي

كلية التكنولوجيا

جذع مشترك علوم وتقنيات

مقياس: رياضيات 2

المحور الأول

التكاملات والدوال الأصلية

مسؤول المقياس

فرحات محمد السعيد

ميلودي ماجدة

1) الدوال الأصلية :

1-1) تعريف : f و F دالتان عدديتان معرفتان على مجال I من $\mathbb{R}$

نُسمّي دالة أصلية للدالة f على I، كل دالة تقبل الدالة f مشتقة لها على المجال I

(F دالة أصلية للدالة f على المجال I) $\Leftrightarrow$ (الدالة F قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$)

أمثلة :

1) $F(x) = x^2$ دالة أصلية للدالة $f(x) = 2x$ على $\mathbb{R}$ لأنّ : $(x^2)' = 2x$

2) $F(x) = \ln x$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ لأنّ : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3) $F(x) = \sqrt{x}$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $]0,+\infty[$ لأنّ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $F(x) = \operatorname{arctg} x$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ على $\mathbb{R}$ لأنّ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2-1) نظريات :

- إذا كانت f مستمرة على مجال I فهي تقبل دالة أصلية F على I
- إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I، فإنه توجد مالانهاية من الدوال الأصلية للدالة f وهي من الشكل:

$G(x) = F(x) + c$ حيث c ثابت من $\mathbb{R}$.

مثال : لتكن f و F دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 8x^3 + 15x^2 \qquad F(x) = ax^4 + bx^3$$

1) عين a و b حتى تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) استنتج كل الدوال الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) عين الدالة الأصلية G للدالة f التي تحقق: $G(1) = 2021$

الحل : 1) F أصلية $f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow 4ax^3 + 3bx^2 = 8x^3 + 15x^2$

بالمطابقة نجد : $a = 2$ ، $b = 5$ ومنه $F(x) = 2x^4 + 5x^3$

2) كل الدوال الأصلية لـ f هي من الشكل $G(x) = 2x^4 + 5x^3 + c$ حيث c عدد كيفي من $\mathbb{R}$

3) $G(1) = 2021$ أي: $7 + c = 2021$ ومنه: $c = 2014$ ومنه $G(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2014$

جدول الدوال الأصلية:

الدالة	الدالة الأصلية	الدالة	الدالة الأصلية
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$f^n \times f' \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1} + C.$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C.$	$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$	$-\frac{f'}{f^2}$	$\frac{1}{f} + C.$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C.$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f} + C.$
e^x	$e^x + C.$	$f' e^f$	$e^f + C$
$\sin x$	$-\cos x + C.$	$f' \sin f$	$-\cos f + C.$
$\cos x$	$\sin x + C.$	$f' \cos f$	$\sin f + C.$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$tg\, x + C.$	$\frac{f'}{\cos^2 f}$	$tg\, f + C$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + cotg^2 x$	$-cotg\, x + C.$	$\frac{f'}{\sin^2 f}$	$-cotg\, f + C.$
$sh\, x$	$ch\, x + C.$	$f' sh\, f$	$ch\, f + C.$
$ch\, x$	$sh\, x + C.$	$f' ch\, f$	$sh\, f + C.$
$\frac{1}{x-\alpha}$	$\ln\lvert x-\alpha\rvert + C.$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
$\frac{1}{(x-\alpha)^n} \; ; \; n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} + C.$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C.$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x + C.$	$\frac{1}{\sqrt{h+x^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{h+x^2}\right\rvert + C.$

2) التكامل غير المحدد:

2-1: تعريف: إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I من $\mathbb{R}$ فإن التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ و يرمز له بالرمز: $\int f(x)dx$ يُعرّف بالعلاقة:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$ (حيث C عدد ثابت كيفي)

ونقرأ: تكامل $f(x)$ بدلالة x يساوي $F(x)+C$.

2-2: خواص:

1) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$

2) $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$

4) $\int F'(x)dx = F(x)+C.$

مثال:

$$\int 5x + 3\cos x\, dx = 5\frac{x^2}{2} + 3\sin x + C.$$

$$\int 4\,\mathrm{sh}\,x + \frac{2}{1+x^2}dx = 4\,\mathrm{ch}\,x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

2-3: طرق حساب التكامل:

1- التكامل بتغيير المتغير:

ليكن المطلوب حساب التكامل $I = \int f(x)dx$ ولم يكن بالإمكان حسابه مباشرة، لذا نضع متغيرا جديدا: $t = g(x)$ و تكون بذلك: $x = \varphi(t)$

حيث: φ قابلة للاشتقاق ومستمرة، عندئذ: $dx = \varphi'(t)dt.$ وبالتالي:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

مثال: احسب التكامل: $I = \int \cos^3 x \sin x\, dx.$

الحل: نضع: $t = \cos x$ فيكون: $dt = -\sin x dx.$ أي $dx = -\frac{dt}{\sin x}$

وبالتعويض في التكامل نجد:

$$I = \int t^3 . \sin x . \frac{-dt}{\sin x} = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C.$$

أخيرا: $I = \int \cos^3 x \sin x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4(x) + C$

مثال : أحسب التكامل : $I=\int \frac{dx}{x\ln x}$

الحل : نضع : $t=\ln x$ ومنه : $dt=\frac{1}{x}dx$ أي : $dx=x\,dt$.

وبالتعويض : $I=\int \frac{x\,dt}{x\,t}=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c$.

مثال : أحسب التكامل : $I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

الحل : نضع : $t=x^3+2$ ومنه : $dt=(3x^2)dx$. وبالتعويض نجد :

$$I=\int \frac{1}{3}\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-1/4}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot t^{3/4}+c=\frac{4}{9}t^{3/4}+c.$$

إذن : $I=\frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}+c$

ب- التكامل بالتجزئه :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فإن :

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

تسمى هذه العلاقة بدستور المكاملة بالتجزئه .

مثال : أحسب التكامل : $I=\int x^2\ln x\,dx$.

$$\begin{cases} f(x)=\ln x \\ g'(x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=1/x \\ g(x)=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

ومنه : $I=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$.

$$I=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3+c.$$

$$I=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{9}x^3+c.$$

مثال : لنحسب التكامل التالي : $I=\int \operatorname{arctg}x\,dx$.

$$\begin{cases} u=\operatorname{arctg}x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1/(1+x^2) \\ v=x \end{cases}$$

ومنه :

$$I=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$I=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

4.2 : تكامل الدوال الناطقة :

نفكك الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ إلى كسور جزئية وبالتالي يتحول التكامل $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ إلى مجموع عدد من التكاملات الأبسط والأسهل في التعامل.

نتبع القواعد التالية في عملية التفكيك :

- إذا كانت درجة $p(x)$ أكبر أو تساوي درجة $q(x)$ ، نستخدم القسمة الاقليدية.
- اذا كانت درجة $p(x)$ أصغر تماما من درجة $q(x)$

- كل عامل خطي $(ax+b)$ للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئي : $\frac{\alpha}{ax+b}$ حيث α ثابت
- كل عامل خطي مكرر $(ax+b)^n$ للدالة $q(x)$ يقابله n كسر جزئي :

$$\frac{\alpha_1}{ax+b}+\frac{\alpha_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{(ax+b)^n}$$ حيث α_i ثوابت.

- كل عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل (ax^2+bx+c) للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئي من الشكل : $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ حيث α و β ثابتان
- كل عامل مكرر من الدرجة الثانية $(\Delta<0)$ $(ax^2+bx+c)^n$ للدالة $q(x)$ يقابله n كسر جزئي :

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{ax^2+bx+c}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{\alpha_n x+\beta_n}{(ax^2+bx+c)}$$

حيث α_i و β_i ثوابت يُطلب إيجادها.

وفي هذه الحالات، لإيجاد الثوابت نساوي $\frac{p(x)}{q(x)}$ بمجموع الكسور المقابلة له كما أشرنا، ثم نضرب المساواة في $q(x)$ ، لنحصل على مساواة جديدة التي من خلالها يمكن الحصول على الثوابت إمّا بالمطابقة أو بإعطاء قيمة مناسبة للمتغير x.

وفيما يلي سوف نعطي أمثلة توضيحية لعملية التفكيك قبل البدء في التكامل.

مثال 1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

بالضرب في $(x-1)(x-2)$ نجد : $1 = a(x-2) + b(x-1) \ldots (*)$

بوضع $x=1$ في المعادلة $(*)$ نحصل على : $1 = -a$ أي $\boxed{a=-1}$

بوضع $x=2$ في المعادلة $(*)$ نحصل على : $\boxed{1=b}$

ومنه :
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

مثال 2 :

$$\frac{(2x+14)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-2)}$$
$$= \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

بضرب الطرفين في المقدار $(x+1)^2(x-2)$ نحصل على : $2x+14 = a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2$

بوضع $x=2$ في المساواة الأخيرة نجد : $18 = 9c$ أي $\boxed{c=2}$

بوضع $x=-1$ في المساواة الأخيرة نجد : $12 = -3b$ أي $\boxed{b=-4}$

بمطابقة معاملات x^2 نجد : $a+c=0$ أي $\boxed{a=-2}$

ومنه تفكيك الكسر المعطى يكون بالشكل :
$$\frac{(2x+14)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{-2}{(x+1)} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-2)}$$

مثال 3 :

$$\frac{6x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{a(x^2+2x+2) + (x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

بضرب الطرفين في المقام نجد : $6x-1 = a(x^2+2x+2) + (x-1)(bx+c)$

بوضع $x=1$ في المساواة الأخيرة نجد : $5 = 5a$ ومنه $\boxed{a=1}$

بمطابقة معاملات x^2 نجد : $a+b=0$ أي $b=-a$ ومنه $\boxed{b=-1}$

بوضع $x=0$ نجد : $-1 = 1(2) + (-1)(c)$ ومنه $\boxed{c=3}$

اذن :
$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+3}{x^2+2x+2}$$

مثال 4 : فكك الكسور التالية إلى كسور جزئية .

$$f(x)=\frac{x}{2x^2+2x-4}\ ;\ g(x)=\frac{2x+4}{x^3-4x^2+4x}\ ;\ h(x)=\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+6x+10)}$$

الحل :

1) نحلل المقام : $(2x^2+2x-4)$ لذا نحسب Δ ، $\Delta=b^2-4ac=36$ ومنه $x_1=1, x_2=-2$

ومنه التفكيك هو :
$$f(x)=\frac{x}{2(x-1)(x+2)}=\frac{a}{2(x-1)}+\frac{b}{(x+2)}$$

بنفس طريقة المثال (1) نجد : $a=\frac{1}{3}\ ,\ b=\frac{1}{3}$

2) نحلل المقام : (x^3-4x^2+4x) لدينا : $x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)$.

x^2-4x+4 من الدرجة الثانية مميزه Δ يساوي 0 ويقبل جذرًا مضاعفًا وهو $x_0=\frac{-b}{2a}=2$

تحليله هو : $x^2-4x+4=a(x-x_0)^2=(x-2)^2$

ومنه تحليل المقام هو : $x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2$.

وعليه تفكيك $g(x)$ يكون كالآتي :
$$g(x)=\frac{2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

بنفس طريقة المثال (2) صفحة (6) نجد : $a=1,\ b=-1,\ c=4$

3) $(x^2+6x+10)$ من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=-4<0$ اذن لا يمكن تحليله.

ومنه تفكيك $h(x)$ هو :
$$g(x)=\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+6x+10)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+6x+10}$$

بنفس طريقة المثال (3) صفحة (6) نجد : $a=2\ ,\ b=-1\ ,\ c=-11$

$$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{(x+11)}{x^2+6x+10}$$

✓ بعد عملية التفكيك ، نتطرق إلى مكاملة الكسور الجزئية التالية

① $\int\frac{1}{(x-\alpha)^n}dx$ ② $\int\frac{1}{(t^2+1)^n}dt$ ③ $\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx.$

تكامل الكسور الجزئية:

1) $I=\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx$: هناك حالتان

$n=1 \rightarrow I=\ln|x-\alpha|+c.$

$n\neq 1 \rightarrow I=\frac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}+c$

2) $I_n=\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$: هناك ثلاث حالات.

✓ $n=1$: $I=\arctg t+c$ ✓ $n=\frac{1}{2}$: $I=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c.$

✓ $n\neq 1$ و $n\neq \frac{1}{2}$ يمكن إيجاد علاقة تراجعية بين I_n و I_{n-1} أو استخدام تغيير المتغير التالي: $t=tgy$ ليصبح: $I_n=\int \cos^{2n-2}(y)dy$ الذي يمكن حسابه بتحويل $\cos^{2n-2}(y)$ إلى مجموع عبارات خطية.

3) $I_n=\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ } في حالة ax^2+bx+c غير قابل للتحليل أي $\Delta<0$).

المرحلة 1: نكتب البسط بدلالة مشتق (ax^2+bx+c) أي: $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{\alpha(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$

المرحلة 2: نستخدم الشكل النموذجي: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

المرحلة 3: نستخدم تغيير المتغير: $t=\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$

لنحصل على: $I_n=\alpha\int\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n}+\gamma\int\frac{1}{(t^2+1)^n}dt.$

I_n هو إذن مجموع تكاملين، الأول من الشكل $\int\frac{u'}{u^n}$ والثاني دُرِسَ في الحالة 2

مثال 1: عين $\int g(x)dx$ حيث $g(x)$ هي الدالة المعرفة في المثال 4 صفحة 7 $g(x)=\frac{2x+4}{x^3-4x^2+4x}$

الحل: لقد قمنا من قبل بتفكيك $g(x)$ إلى: $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-2)}+\frac{4}{(x-2)^2}$

ومنه $I=\int g(x)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-2}dx+4\int\frac{1}{(x-2)^2}dx$

$=\ln|x|-\ln|x-2|+4\frac{-1}{(2-1)(x-2)^{2-1}}+c=\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{4}{x-2}+c.$

مثال 2: عين التكامل: $I=\int \frac{4x+5}{x^2+x+2}dx.$

الحل: المرحلة ①: نكتب البسط بدلالة مشتق المقام أي نبحث عن α و β بحيث: $f(x)=\frac{\alpha(2x+1)}{x^2+x+2}+\frac{\beta}{x^2+x+2}$

بالنشر للبسط نجد: $2\alpha x+\alpha+\beta$ ومطابقته بـ $(4x+5)$ نجد:

$$\begin{cases}2\alpha=4\\ \alpha+\beta=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=3.\end{cases}$$

ومنه: $I=2\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx+3\int\frac{1}{x^2+x+2}dx=2\ln(x^2+x+2)+3J+C.$

المرحلة ②: لإيجاد J نستخدم الشكل النموذجي، نحسب: $\Delta=b^2-4ac=-7.$

$$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

المرحلة ③ نستخدم تغيير المتغير: $t=\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. ومنه، $dt=\sqrt{\frac{4}{7}}dx.$

لنجد:
$$J=\int\frac{1}{x^2+x+2}dx=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}dx=\int\frac{\sqrt{\frac{7}{4}}\,dt}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)^2+1\right]}$$

$$J=\frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\sqrt{\frac{4}{7}}\,\text{arctg}\,t=\sqrt{\frac{4}{7}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

أخيرا:
$$I=2\ln(x^2+x+2)+3\sqrt{\frac{4}{7}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C.$$

مثال 3: عين التكامل: $I=\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

الحل: نبحث عن α و β بحيث:
$$x+3=\alpha(2x+2)+\beta.$$
$$=2\alpha x+2\alpha+\beta.$$

بالمطابقة نجد: $2\alpha=1$ و $2\alpha+\beta=3$ وينتج: $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=2$

ومنه:
$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}+2\int\frac{1\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\underbrace{\sqrt{x^2+2x+5}}+2J+C$$

تذكير: $\int\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\sqrt{u}$

لايجاد J نستخدم الشكل النموذجي، $\Delta = -16$ ونتج $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}}$$

نضع: $t = \frac{x+1}{2}$ فينتج: $dt = \frac{1}{2}dx$. ومنه:

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{2\,dt}{2\sqrt{t^2+1}} = 1\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]$$

$$J = 1\ln\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right|$$

نعوض J بما يساويها فنتحصل على I.

مثال 4: ليكن التكاملان: $J = \int \frac{1}{(x^2-4x+13)^2}dx$ ، $I = \int \frac{x}{(x^2-4x+13)^2}dx$

1) تحقق أن $\cos^2 y = \frac{1}{2}(1+\cos 2y)$ ثم عين $\int \cos^2 y\,dy$

2) مستخدما تغيير متغير مناسب استنتج J

3) عين التكامل I

الحل: 1) لدينا: $1=\cos^2 y+\sin^2 y$ و $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ بالتعويض نجد المطلوب

$$\int \cos^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2y\,dy = \frac{1}{2}\left[y+\frac{1}{2}\sin 2y\right] = \frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y$$

2) نستخدم الشكل النموذجي: $\Delta = -36$ وينتج: $x^2-4x+13=(x-2)^2+9$.

$$\frac{1}{(x^2-4x+13)^2} = \frac{1}{\left[(x-2)^2+9\right]^2} = \frac{1}{\left(9\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]\right)^2} = \frac{1}{81}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]^2}$$

نضع: $t = \frac{x-2}{3}$ فينتج $dt = \frac{1}{3}dx$ ومنه $J = \int \frac{1}{81}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^2}\cdot 3\,dt$

$J = \frac{1}{27}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$. نضع $t = \tan y$ فينتج: $dt = \frac{1}{\cos^2 y}dy$

$$(t^2+1)^2=(tg^2+1)^2=\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^2=\frac{1}{\cos^4 y}\Rightarrow J=\int\frac{1}{27}\cdot\frac{\cos^4 y}{\cos^2 y}\,dy=\frac{1}{27}\int\cos^2 y\,dy$$

من السؤال (1) نستنتج أن :

$$J=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} t)\right]=\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{108}\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right)$$

3) $$I=\int\frac{x}{(x^2-4x+13)^2}\,dx.$$

نبحث عن α و β بحيث : $x=\alpha(2x-4)+\beta=2\alpha x-4\alpha+\beta$

بالمطابقة نجد : $2\alpha=1$ و $-4\alpha+\beta=0$ وينتج : $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=2.$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)}{(x^2-4x+13)^2}\,dx+2\int\frac{1\,dx}{(x^2-4x+13)^2}=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{-1}{x^2-4x+13}\right)}+2J$$

تذكير : $\longleftarrow$ $\int\frac{U'}{U^2}=-\frac{1}{U}$

بعد تعويض J بما يساويها نجد التكامل I .

2.5: تكاملات تؤول حسابها إلى حساب تكامل كسري :

ليكن R دالة ناطقة.

(1) التكامل من الشكل : $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

في هذه الحالة نستخدم تغيير المتغير : $t=tg\left(\frac{x}{2}\right)$ فينتج :

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ;\ tg\,x=\frac{2t}{1-t^2}\ ;\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

مثال : لحساب التكامل $I=\int\frac{1}{\sin x}\,dx.$ نضع $t=tg\frac{x}{2}$ فينتج

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ لنجد :

$$I=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{(1+t^2)}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$$

ملاحظة :

- في التكاملات من الشكل : $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ نضع : $t=\cos x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ نضع : $t=\sin x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(tg x)\,dx$ نضع : $t=tg x$

② التكامل من الشكل : $\int R(sh x \vee ch x, e^{x})\,dx$

في هذه الحالة نضع $t=e^{x}$ أي $x=\ln|t|$ فينتج : $sh x=\frac{t^2-1}{2t}$; $ch x=\frac{t^2+1}{2t}$; $dx=\frac{dt}{t}$

مثال : لحساب التكامل $I=\int\frac{1}{ch x}\,dx$ نضع : $t=e^{x}$

فينتج : $I=\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\arctg t+c=2\arctg(e^{x})+c.$

ملاحظة :

- في التكاملات من الشكل : $\int R(ch x)sh x\,dx$ نضع : $t=ch x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(sh x)ch x\,dx$ نضع : $t=sh x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(th x)\,dx$ نضع : $t=th x.$

③ التكامل من الشكل : $\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots)\,dx$ حيث $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ كسور غير قابلة للاختزال

في هذه الحالة نضع : $x=t^{n}$ حيث : $n=ppcm(q_1, q_2, \ldots)$

مثال : لنحسب التكامل : $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$ ، نضع : $x=t^6$

$dx=6t^5dt$ فيصبح : $I=\int\frac{6t^5dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2}{t-1}\,dt.$

باستخدام القسمة الاقليدية نجد : $\frac{t^2}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}$

ومنه $I=6\int t+1+\frac{1}{t-1}\,dt=6\left[\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right]+c.$

لدينا : $x=t^6$ أي $t=\sqrt[6]{x}$ ومنه $I=3\sqrt[3]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

④ التكامل من الشكل : $\int R(x, y, y^{p_1/q_1}, y^{p_2/q_2}, \ldots)\,dx$ حيث $\frac{p_i}{q_i}$ كسور غير قابلة للاختزال

و $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، في هذه الحالة نضع : $t=y^{\frac{1}{n}}$ أي $y=\frac{ax+b}{cx+d}=t^{n}$

n يمثل المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $q_1, q_2, \ldots$

مثال ١: عين التكامل التالي : $I = \int \frac{1}{\sqrt{4x+1} - \sqrt[4]{(4x+1)^3}} \, dx$

نضع : $t = (4x+1)^{1/4}$ أي $4x+1 = t^4$ لنتحصل على : $x = \frac{t^4 - 1}{4}$ ومنه $dx = t^3 dt$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} - \sqrt[4]{t^{12}}} \cdot t^3 dt = \int \frac{t^3}{t^2 - t^3} dt = \int \frac{t}{1-t} dt.$$

بالقسمة الاقليدية نجد : $\frac{t}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}$

$$I = \int -1 + \frac{1}{1-t} dt = -t - \int \frac{-1}{1-t} dt = -t - \ln|1-t| + c.$$

بعد التعويض نجد : $I = -(4x+1)^{\frac{1}{4}} - \ln\left|1 - (4x+1)^{1/4}\right| + c.$