جامعة حمه لخضر بالوادي

معهد العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات --- أولى MI مقياس : جبر 2

سلسلة الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

التمرين الاول : في اي حالة يكون لدينا F_{i} فضاء شعاعي جزئي من E_{i} :

$E_1 = \mathbb{R}^3 , F_1 = \{(x, y, 0) /\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$E_2 = \mathbb{R}^3 , F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

$E_3 = \mathbb{R}^3 , F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \wedge z = 1\}$.

$E_4 = \mathbb{R}^3 , F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

$E_5 = \mathbb{R}^3 , F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

التمرين الثاني : في الفضاء شعاعي $A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f;\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ على $\mathbb{R}$ نعتبر المجموعات الجزئية التالية :

$$E_1 = \{f\ ;\ f(1) = 0\},$$
$$E_2 = \{f;\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\},$$
$$E_3 = \{f;\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(x)\}.$$

(1) اي من المجموعات ف ش ج من $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) برهن أن $A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E_2 \oplus E_3$

التمرين الثالث : نعتبر الأشعة

$$u_1 = (2,3,0)\ ,\ u_2 = (2,6,4)\ ,\ u_3 = (0, a, 8)$$

(1) عين قيمة a حتى يكون لدينا : $u_3 \in \langle u_1, u_2 \rangle$.

(2) بين أن الأشعة $v_1 = (0,1-2), v_2 = (1,1,0), v_3 = (-2,0,-2)$ تشكل أساسا ل $\mathbb{R}^3$, ثم عين احداثيات الأشعة $v_1,\ \ v_2,\ \ v_3,\ \ v_4 = v_1 + v_2 + v_3,\ \ v_5 = v_1 - v_2 + 2v_3,\ \ v_6 = (-1,2,0)$ في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

التمرين الرابع : ليكن E الفضاء شعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة (≤ 2).

(1) حدد بعد E و الأساس القانوني له.

(2) نضع $P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = x(x-1)$ بين أن الجملة $\{P_0, P_1, P_2\}$ أساس للفضاء E .

(3) ليكن P العنصر من E الذي احداثياته في الأساس القانوني $(0,1,1)$, عين احداثياته في الأساس $\{P_0, P_1, P_2\}$.

التمرين الخامس : ليكن E الفضاء شعاعي على الحقل K :

(1) بين أن أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة خطيا هي مجموعة مستقلة خطيا.

(2) بين أن أي مجموعة تحوي الشعاع المعدوم تكون مرتبطة خطيا.

(3) بين أن أي مجموعة تحوي مجموعة مرتبطة خطيا هي مجموعة مرتبطة خطيا.

التمرين السادس : نعتبر في الفضاء شعاعي $\mathbb{R}^3$ على $\mathbb{R}$ المجموعة الجزئية التالية :

$$E_1 = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$
$$E_2 = \{(x, 0, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$
$$E_3 = \{(0,0,z) \mid z =\in \mathbb{R}\}.$$

(1) بين أن E_1 , E_2 و E_3 فضاءات شعاعية جزئية من $\mathbb{R}^3$.
(2) برهن أن $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$ و أن $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$.
(3) أوجد : $\dim(E_1)$, $\dim(E_2)$ و $\dim(E_1 \cap E_2)$.

<u>التمرين السابع :</u> أي من التطبيقات التالية عبارة عن تطبيق خطي :
(1) $f: V \to V$ حيث $\forall v \in V;\ f(v) = -v$.
(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ حيث $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = (x, x+y, y)$.
(3) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ حيث $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ f(x,y,z,t) = (x,y)$.
(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x^3$.

<u>التمرين الثامن :</u> ليكن E و F فضاءان شعاعيان عاى نفس الحقل $\mathbb{R}$, و ليكن f تطبيق خطي من E نحو F. اذا كانت $u_1, u_2, \dots, u_n$ أشعة من E حيث $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ مستقلة خطيا برهن أن $u_1, u_2, \dots, u_n$ أيضا مستقلة خطيا.

<u>التمرين التاسع :</u> ليكن a عدد حقيقي و $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي الذي يحقق :
$$f(e_1) = (1,1,a)\ ,\ f(e_2) = (1,a,1)\ ,\ f(e_3) = (a,1,1)$$
حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$.
(1) عين عبارة التطبيق f .
(2) عين $Kerf$ و Imf فب الحالتين $a = 1$ و $a = -2$, ثم استنتج رتبة f في كل حالة.
(3) نعتبر المجموعة $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 2(x,y,z)\}$ حيث a كيفي من $\mathbb{R}$.
(أ) بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
(ب) في حالة $a = 0$ عين أساس للفضاء F ثم عين أساس لمكمل F في $\mathbb{R}^3$.

<u>التمرين العاشر :</u> ليكن $\{e_1, e_2\}$ و $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ الأساسين القانونيين للفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على التوالي.
(1) عين عبارة التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ الذي يحقق $f(e_1) = \tau_2 - \tau_1\ , f(e_2) = 2\tau_1 + \tau_3$.
(2) عين Imf ثم أوجد $Dim(Imf)$.