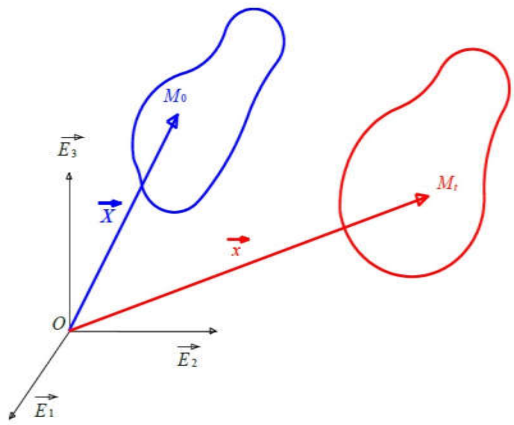
Soit un milieu continu en mouvement qui occupe à la instant $t=0$ l'ouvert $\Omega_0$ de $\mathbb{R}^3$ et à la instant $t>0$ l'ouvert $\Omega_t$ de $\mathbb{R}^3$. $\Omega_0$ s'appelle configuration de référence ou configuration non-déformé tandis que pour chaque $t>0$, $\Omega_t$ s'appelle configuration courante ou configuration déformé du corps.

On menu l'espace euclidien affine d'un repère orthonormé directe $R=(O,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$. Pour décrire la configuration d'un domaine matériel, il est possible de choisir parmi deux types de variables.

Dans le repère **R**, à un instant $t=0$, le point $M_0$ a des coordonnées $(X_i)$ qui définissent la position du point matériel $M$. On appelle aussi ce système de coordonnées le système de coordonnées matérielles dans la configuration de référence $\Omega_0$. Nous pourrons ainsi écrire :

$$\overrightarrow{OM}_0 = X_1\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3 = X_i\vec{E}_i = \vec{X}$$

Pour décrire le mouvement du domaine, il convient donc de se donner la loi d'évolution au cours du temps des positions de l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine. On obtient donc la configuration actuelle $\Omega_t$. Ainsi il est nécessaire de définir les coordonnées $(x_i)$ du point $M_t$ qui à l'instant $t$ représente la position du point matériel $M$




$$\overrightarrow{OM}_t = x_1\vec{E}_1 + x_2\vec{E}_2 + x_3\vec{E}_3 = x_i\vec{E}_i = \vec{x}$$

Un mouvement du milieu continu est déterminé par la position courante $x=(x_i)$ de chaque point matériel $M$ comme fonction de la position de référence $X=(X_i)$ et du temps $t$. C'est donc une famille d'applications $\Phi(.,t) = (\Phi_i(.,t)) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ définies par

$$x = \Phi(X, t) \qquad (1.1)$$

**Points de vue de Lagrange et Euler:**

Deux descriptions différentes d'un mouvement coexistent chacune ayant ses avantages et ses inconvénients.

On appelle ces points de vue les descriptions Lagrangienne et Eulérienne du mouvement .

La première est plus adaptées à la mécanique des solides et la deuxièmes plus adaptées à la mécanique des fluides.

## 1- Description Lagrangienne

La description de Lagrange consiste à suivre un particule matérielle (identifiée par un point M) au cours de son mouvement, à partir de sa position d'origine.

Dans cette description, les variables indépendantes $(X_i)$, et $t$ sont dites variables ou coordonnées de Lagrange ou coordonnées matérielles , tandis que $(x_i)$ sont appelées inconnues de Lagrange.

La fonction $\Phi = (\Phi_i)_{1\leq i\leq 3}$ représente la description lagrangienne du mouvement de notre domaine.

Pour assurer la continuité du solide en cours de transformation, cette fonction doit être bijective (existence d'une transformation inverse), et de classe $C^1$ par rapport aux variables d'espace et de temps.

Connaissant la position à chaque instant du point matériel $M$ il est possible de définir alors sa vitesse et son accélération.

**vecteur vitesse:** $\overrightarrow{v(M,t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM_t}}{dt}$. Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont :

$$v_i = \frac{d\Phi_i}{dt}(X_j,t) = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t}(X_j,t) \qquad (1.3).$$

Dans cette dernière formule, le symbole $\dfrac{\partial}{\partial t}$ représente la dérivation partielle par rapport au temps, c'est à dire la dérivation en considérant les variables de position $X_j$ indépendantes du temps.

**<u>vecteur accélération</u>:** $\overrightarrow{a(M,t)}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_t}}{dt^2}$ Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont : $$a_i=\frac{d^2\Phi_i}{dt^2}(X_j,t)=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}(X_j,t) \qquad (1.4).$$

**<u>vecteur déplacement</u> :**

Souvent on préfère employer le vecteur déplacement au lieu du vecteur position :

$$\overrightarrow{u(X_j,t)}=\overrightarrow{OM_t}-\overrightarrow{OM_o}=\vec{x}-\vec{X}$$

On peut alors remarquer l'égalité :

$$\overrightarrow{\mathrm{v}(M,t)}=\frac{d\vec{u}}{dt}(X_j,t)=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(X_j,t), \text{ et } \overrightarrow{a(M,t)}=\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}(X_j,t)=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}(X_j,t)$$

**Exemple:**

Le mouvement d'un milieu continu est défini par les équations

$$\begin{cases} x_1=\Phi_1(X,t)=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t+(X_1-X_2)e^{-t} \\ x_2=\Phi_2(X,t)=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t-(X_1-X_2)e^{-t} \\ x_3=\Phi_3(X,t)=X_3 \end{cases}$$

Pour trouver le champs de vitesses en fonctions de coordonnées matérielles on utilise (1.3)

$$\begin{cases} v_1=\frac{\partial\Phi_1(X,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t-(X_1-X_2)e^{-t} \\ v_2=\frac{\partial\Phi_2(X,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t+(X_1-X_2)e^{-t} \\ v_3=\frac{\partial\Phi_3(X,t)}{\partial t}=0 \end{cases}$$

De même, pour trouver le champs d'accélération en fonctions de coordonnées matérielles on utilise (1.4)

$$\begin{cases} a_1=\frac{\partial^2\Phi_1(X,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t+(X_1-X_2)e^{-t} \\ a_2=\frac{\partial^2\Phi_2(X,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t-(X_1-X_2)e^{-t} \\ a_3=\frac{\partial^2\Phi_3(X,t)}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

## 2. <u>Description Eulérienne</u>:

Cette description est bien adaptée à la cinématique d'un fluide,

pour lequel est difficile de définir un instant initial pour lequel les positions de toutes les particules seraient connues. Pour cette description d'Euler, on s'intéresse à la vitesse $\vec{V}(x,t)$ en un point fixe $M(x)$. A chaque instant $t$, on regarde la vitesse d'une particule différente.

Les hypothèses de continuité (milieu et transformation) imposent que l'application $\Phi$ est bijective de la configuration de référence $\Omega_0$ sur la configuration actuelle $\Omega_t$.

Cette bijectivité impose l'existence d'une application continue inverse de $\Phi$, notée $\Psi(.,t):\Omega_t \to \Omega_0$ et $\Psi = \Phi^{-1}$ définie par

$$X = \Psi(x,t) \qquad (1.5)$$

les variables d'Euler sont les coordonnées spatiales $(x_i)$ et l'instant $t$. tandis que les composantes $(v_i)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont appelées inconnues d'Euler.

On peut exprimer la vitesse et l'accélération en fonction des variables d'Euler :

**vecteur vitesse:** $\overrightarrow{v(M,t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}_t}{dt}$ avec $v_i = \dfrac{d\Phi_i}{dt}(X_j,t) = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\Psi_j(x_k,t),t)$.

**vecteur accélération:** $\overrightarrow{a(M,t)} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}_t}{dt^2}$ avec : $\gamma_i = \dfrac{d^2\Phi_i}{dt^2}(X_j,t) = \dfrac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}(\Psi_j(x_k,t),t)$.

## 3-<u>Trajectoire</u>:

On appelle trajectoire d'une particule, la courbe géométrique lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps. $x = \Phi(X,t)$ est une représentation paramétrée en temps de la trajectoire. Par définition de la vitesse,

$$\vec{V}(\vec{x},t) = \frac{d\overrightarrow{OM}_t}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{e}_3$$

les trajectoires peuvent être obtenues par la résolution des équations

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,t)} = dt$$

## 4- <u>Lignes de courant</u>:

A un instant donné, on appelle lignes de courant du mouvement, les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur vitesse de la particule située en ce point. Soit pour $t$ fixé, on a:

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,t)}$$

**Remarque:** Pour un mouvement stationnaire (ou permanent) $V(x,t) = V(x)$ .

Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

**5- <u>Dérivées particulaires</u>**:

Lorsque l’on suit une particule dans son mouvement, la grandeur $A$ attachée à la particule ne dépend que de $t$. Par définition, on appelle dérivée particulaire de $A$ à l’instant $t$ , la dérivée de $A$ par rapport à la seule variable $t$.

En variables de Lagrange: $A = A(\vec{X},t)$

$$\frac{dA(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial A(X_i,t)}{\partial t}$$

En variables d' Euler Lagrange: $A = A(\vec{x},t)$

$$dA(\vec{x},t) = \frac{\partial A(x_i,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial A}{\partial x_i}dx$$

$$\frac{dA(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial A(x_i,t)}{\partial t} + \frac{\partial A(x_i,t)}{\partial x_i}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial A(x_i,t)}{\partial t} + \nabla A(x_i,t).\vec{V}(x_i,t)$$

**Exemple:** calcul de l'accélération en représentation Eulérienne

La formule précédente donne la relation suivante :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \vec{V}.\vec{V}$$

Soit sous forme développée, dans un repère cartésien orthonormé :

$$a_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial t}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}$$

## 1- Tenseurs

**Tenseur de second ordre.** On appelle tenseur de second ordre l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \qquad (2.1)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$.

En particulier si $(e_i)$ désignent la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $(i = 1,2,3)$.

Le tenseur $T$ est parfaitement défini par les trois vecteurs

$$T(e_j) = T_{ij}(e_i) \qquad j = 1,2,3 \qquad (2.2)$$

c'est-à-dire par les nombres $T_{ij}$ qui constituent la matrice des composantes du tenseur $T$ dans la base canonique. On peut donc identifier un tenseur $T$ avec par sa matrice $(T_{ij})$ dans la base canonique. Dans la suite nous ferons toujours cette identification, pour des simplicité, mais il faut noter que la plupart de notions liées aux tenseurs (symétrie, antisymétrie, déterminant, norme, produit scalaire, trace, etc.…) définies à l'aide de la matrice correspondante.

En conclusion, on va noter $M_3$ l'espace des matrices carrées $3\times3$ et on va identifier tout tenseur $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par sa matrice $T = (T_{ij}) \in M_3$. Suite à cette identification , les opérations avec les tenseurs (addition, multiplication, multiplication par les scalaires) se réduisent aux opérations correspondantes pour les matrices. Pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ le vecteur $y = Tx \in \mathbb{R}^3$ sera défini par

$$y = Tx \qquad (y_i = T_{ij} x_j) \qquad (2.3)$$

ou $x$ et $y$ sont des matrices unicolonnes et $Tx$ représente le produit matriciel entre la matrice $T$ et la matrice $x$ .

**Exemple:** On détermine la représentation matricielle, dans le base canonique du tenseur de second ordre suivant: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$$

Le tenseur $T$ est associé à la matrice

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

**Tenseur zéro, tenseur unité.** On appelle tenseur zéro le tenseur de second ordre $0_3$ correspondant à la matrice $0_{M_3}$ ; de même, on appelle tenseur unité le tenseur de second ordre $I_3$ correspondant à la matrice $(\delta_{ij}) \in M_3$, ou $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker défini comme suit

$$\delta_{ij} = e_i . e_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad (2.4)$$

En utilisant (2.2) on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$$0_{M_3} x = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad (2.5)$$

$$I_3 x = x \qquad (2.6)$$

**Tenseur adjoint (transposé).** Soit $T \in M_3$, on appelle l'adjoint (transposé) du tenseur $T = (T_{ij})$ le tenseur $T^T$ défini par

$$T^T = (T_{ji}) \qquad (2.7)$$

c'est-à-dire le tenseur défini par la matrice transposée du tenseur $T$.

En utilisant (2.1) on a

$$T^T(e_j) = T_{ji}(e_i) \qquad (2.8)$$

d'où, pour tout vecteur $x, y \in \mathbb{R}^3$ il vient

$$Tx . y = T_{ij} x_j y_i = T_{ji} x_i y_j = x .T^T y \qquad (2.9)$$

De plus pour tout tenseur $T, U \in M_3$ on a

$$(TU)^T = U^T T^T, (T^T)^T = T \qquad (2.10)$$

Ou $TU$ représente le produit des tenseurs $T$ et $U$ .

**Tenseur défini positif .** Le tenseur $T \in M_3$ est dit défini positif s'il satisfait

$$x . Tx > 0 \quad \forall x \neq 0$$

**Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique.** Un tenseur $T \in M_3$ s'appelle symétrique (auto-adjoint) si $T = T^T$ c'est-à-dire $T_{ij} = T_{ji}\ \forall i, j = 1,2,3$. Un tenseur $T \in M_3$ s'appelle antisymétrique si $T = -T^T$ c'est-à-dire $T_{ij} = -T_{ji}\ \forall i, j = 1,2,3$.

On appelle partie symétrique de $T$ (ou partie paire de $T$) le tenseur $T^s \in M_3$ défini par

$$T^s = \frac{1}{2}(T + T^T) \qquad (T_{ij}^s = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \qquad (2.11)$$

De même, On appelle partie antisymétrique de $T$ (ou partie impaire de $T$) le tenseur $T^a \in M_3$ défini par

$$T^a = \frac{1}{2}(T - T^T) \qquad (T_{ij}^a = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \qquad (2.12)$$

En utilisant (2.11) et (2.12) on obtient que $T^s$ est un tenseur symétrique, $T^a$ est un tenseur antisymétrique et

$$T = T^s + T^a \qquad (2.13)$$

**Résultat**:

Soit maintenant $L = (L_{ij})$ un tenseur antisymétrique. Alors il existe un unique vecteur $\omega = (\omega_i) \in \mathbb{R}^3$ appelé le vecteur axial associé à $L$, tel que

$$\omega \wedge v = Lv, \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

Dans n'importe quel cadre, nous avons

$$\omega_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} L_{ik} \qquad (2.14)$$

Ou $\varepsilon_{ijk}$ est le symbole de Recci défini comme suit

$$\varepsilon_{ijk} = (e_i \times e_j).e_k = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1, & \text{si } (i,j,k) = (1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0, & \text{si moins deux indices sont égaux} \end{cases} = \det\left([e_i],[e_j],[e_k]\right)$$

c'est-à-dire: $\omega_1 = L_{32}$, $\omega_2 = L_{13}$, $\omega_3 = L_{21}$.

Réciproquement, on considère un vecteur $\omega = (\omega_i) \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe un unique tenseur antisymétrique $L = (L_{ij})$ appelé le tenseur axial associé à $\omega$, défini par

$$L_{ik} = \varepsilon_{ijk}\omega_j \qquad (2.15)$$

c'est-à-dire $L_{12} = -L_{21} = -\omega_3$, $L_{13} = -L_{31} = -\omega_2$, $L_{23} = -L_{32} = -\omega_1$.

On obtient ainsi que:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

**La trace d'un tenseur.** La trace d'un tenseur $T \in M_3$ est définie par

$$trT = T_{ii} \qquad (2.16)$$

On vérifie que $tr : M_3 \to \mathbb{R}$ est une application linéaire qui en plus a les propriétés suivantes :

$$tr(TU) = tr(UT), \quad trT^T = trT, \quad trT^s = trT, \quad trT^a = 0 \qquad (2.17)$$

**Remarque :** Pour un tenseur $T \in M_3$, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs de tel sorte que l'un soit sphérique $S$ ait une trace nulle et que l'autre un tenseur déviateur $D$. Les formules sont les suivantes :

$$T = S + D, \qquad S = \frac{tr(T)}{3} I_3, \qquad D = T - S$$

**Le déterminant d'un tenseur, tenseur singulier.** Le déterminant d'un tenseur $T \in M_3$ est par définition Le déterminant de la matrice de ses composantes

$$\det T = \det(T_{ij}) \qquad (2.18)$$

On vérifie sans peine que

$$\det T^T = \det T, \ \det(TU) = \det T \det U, \ \text{Pour tout } T, U \in M_3.$$

Un tenseur $T$ s'appelle singulier si $\det T = 0$ et non-singulier si $\det T \neq 0$

**L'inverse d'un tenseur.** Le tenseur $T \in M_3$ est dite inversible s'il existe un tenseur $T^{-1} \in M_3$ tel que

$$T^{-1}.T = T.T^{-1} = I \qquad (2.19)$$

On peut prouver que dans ce cas le tenseur $T^{-1}$ est le seul tenseur qui satisfait (2.19) ; il s'appelle le tenseur inverse de $T$. De plus, on peut montrer que $T$ est inversible si et seulement $T$ est non-singulier.

Soit $N_3 \subset M_3$ l'ensemble des tenseurs inversibles. En utilisant (2.19) et (2.10) on obtient

$$(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T, (T^{-1})^{-1} = T, \ (TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1} \qquad (2.20)$$

Pour tout tenseurs $T$ et $U$ non-singuliers.

**Vecteurs et valeurs propres.** Soit $T \in M_3$, on appelle vecteur propre de $T$ tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel qu'il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$Tx = \lambda x \qquad (2.21)$$

on appelle valeur propre de $T$ tout élément $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ vérifiant (2.21).

On peut prouver que $\lambda$ est un valeur propre de $T$ si et seulement si

$$\det(T - \lambda I_3) = 0 \qquad (2.22)$$

On peut démontrer que l'équation (2.22) est développée comme suit

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}(T_{im} - \lambda\delta_{im})(T_{jn} - \lambda\delta_{jn})(T_{kp} - \lambda\delta_{kp}) = 0$$

ou encore

$$-\lambda^3 + d_1\lambda^2 - d_2\lambda + d_3 = 0$$

Les trois coefficients $d_1, d_2, d_3$ sont nommés invariants principaux de $T$ et sont des constantes

quelle que soit la base :

$$\begin{cases} d_1 = T_{ii} = tr(T) \\ d_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}\left((tr(T))^2 - tr(T^2)\right) \\ d_3 = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}T_{im}T_{jn}T_{kp} = \varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3} = \det(T) \end{cases}$$

D'après (2.25), chaque valeur propre $\lambda_i$ permet de définir un vecteur propre $x_i$ tel que $Tx_i = \lambda_i x_i$

**Remarques:**

- Les trois vecteurs propres $x_i$ forme une base dite **base principale** du tenseur, et notée $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)$. Dans cette base, la matrice de est diagonale et s'exprime par

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)}$$

- Si $T$ est un tenseur symétrique, les valeurs propres $\lambda_i$ sont réelles (distinctes ou confondues et la base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)$ est toujours orthonormée.

**Tenseurs d'ordre trois.** On appelle tenseur d'ordre trois toute opérateur linéaire $L$ de $M_3$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut vérifier facilement qu'un tenseur d'ordre trois $L$ est défini par $3^3 = 27$ composantes scalaires $L_{ijk}$ telles que

$$y = L(T) \Leftrightarrow (y_i = L_{ijk}T_{jk}) \quad \forall i = 1,2,3, \ \forall T \in M_3, \ \forall y \in \mathbb{R}^3$$

**Tenseurs d'ordre quatre.** On appelle tenseur d'ordre quatre toute opérateur linéaire $\mathcal{E}$ de $M_3$ dans $M_3$. On peut vérifier le tenseur d'ordre quatre $\mathcal{E}$ est défini par $3^4 = 81$ composantes scalaires $\mathcal{E}_{ijkh}$ telles que

$$\tau = \mathcal{E}\sigma \Leftrightarrow \tau_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\,\sigma_{kh} \quad \forall i,j = 1,2,3, \text{ ou } \sigma,\tau \in M_3$$

**Produit contracté.** Soient $T,U \in M_3$, on définit le produit contracté des tenseurs $T$ et $U$ est un tenseur $L \in M_3$ défini par :

$$L = T.U \,, \quad L_{ij} = T_{ik}U_{kj}$$

Le produit doublement contracté (scalaire) de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$S = T:U = T_{ij}U_{ij} = T_{ij}U^T_{ji} = tr(T.U^T)$$

Le produit contracté d'un tenseur $T \in M_3$ et d'un vecteur $u$ est un vecteur, on peut pré-multiplié par un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que $T$ ne soit symétrique :

$$T.u = v\,, T_{ij}u_j = v_i\,, \quad u.T = w\,, u_iT_{ij} = w_j$$

Le produit contracté (appelé plus couramment produit scalaire) de deux vecteurs est un scalaire :

$$s = u.v\,, \quad s = u_iv_i$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit $n$ l'ordre du premier tenseur et $m$ l'ordre du second ($m$=1 pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, . .). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $n+m-2$ et le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $n+m-4$.
Par exemple, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 :

$$L = T:U\,, \quad L_{ij} = T_{ijkh}U_{kh}$$

Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre deux antisymétrique et un tenseur d'ordre deux symétrique donne toujours le tenseur nul.
**Produit tensoriel.** Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 :

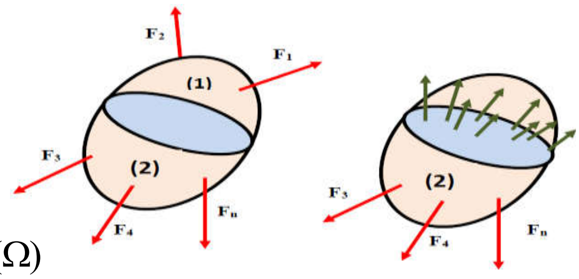
$$L = u \otimes v\,, \quad L_{ij} = u_iv_j$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple à définir. Soit $n$ l'ordre du premier tenseur et $m$ l'ordre du second ($m$=1 pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, . . . ). Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n+m$.
Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 4 :

$$L = T \otimes U\,, \quad L_{ijkl} = T_{ij}U_{kl}$$

## 2. Tenseur des contraintes de Cauchy

### 2.1 Notion de contrainte

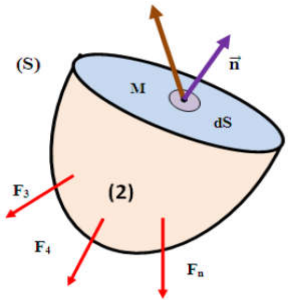



Un solide est en état de contrainte s'il est soumis à l'action de forces extérieures.

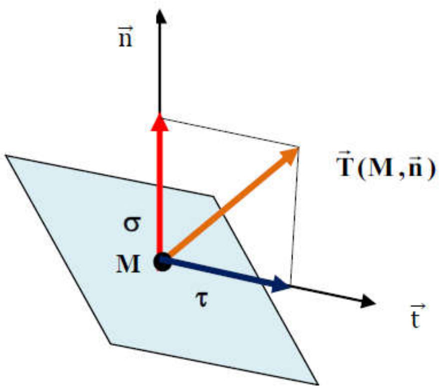
Considérons un domaine $(D)$ délimitant un solide $(\Omega)$ qui est en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures . Sous l'action de ses forces, le solide est en équilibre. On voit la naissance de contraintes à l'intérieur de $(\Omega)$.

Soit $(\pi)$ un plan virtuel qui partage $(\Omega)$ en deux parties (voir la figure).

Isolant virtuellement la partie (2) et faisant apparaitre les contraintes internes




Appelons $\overrightarrow{dF}$ la résultante des efforts exercés par la partie (1) sur la partie (2) de $(\Omega)$, à travers l'élément de surface $(dS)$, soit le rapport , en passant à la limite quand $dS \to 0$, on obtient la contrainte sur la section au point $M$ : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim\limits_{dS\to 0} \dfrac{\overrightarrow{dF}}{ds}$.




Le vecteur de contrainte $\vec{T}$ peut être décomposé en deux composantes selon deux directions.

La première normale à la surface $(dS)$, dont la normale unitaire est $\vec{n}$. La seconde est tangentielle à $(dS)$ est $\vec{t}$

Projetons le vecteur $\vec{T}$ sur la normale $\vec{n}$ et sur le plan perpendiculaire à cette normale $\vec{t}$, soit alors :

$$\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t$$

$\vec{T}_n$ : Contrainte normale et $\vec{T}_t$ : Contrainte tangentielle (cisaillement)

pour une Notation universelle, on note $\sigma_n$ :contrainte normale et $\vec{\tau}_t$ : contrainte tangentielle (cisaillement) et on écrit: $\vec{T} = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_t$ où $\overline{\sigma_n} = \vec{T}.\vec{n}$ et $\vec{\tau}_t = \overline{\sigma_n n} - \vec{T}$

### 2.2. Tenseur des contraintes de Cauchy

Pour connaître l'état de contrainte en un point donné, il faut connaître les vecteurs contraintes associés à toutes les facettes, c'est-à-dire à tout vecteur unitaire $\vec{n}$. Il existe donc une application linéaire, le tenseur des contraintes, faisant passer de $\vec{n}$ à $\vec{T}$

$$\vec{T} = \sigma(\vec{n}) \qquad (2.3)$$

Le tenseur des contraintes est donc une application linéaire de l'espace vectoriel à trois dimensions $M_3$ dans lui-même. Si l'on choisit une base orthonormée $\vec{e}_i$, cette application linéaire est représentée par une matrice d'éléments $\sigma_{ij}$ $(i, j = 1,2,3)$ et la relation (2.3) donne la relation matricielle : $T_i = \sigma_{ij} n_j$

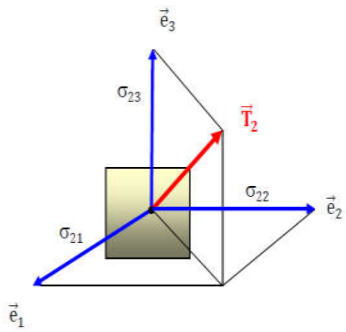
$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Les neufs composantes des trois vecteurs de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\vec{\sigma_n} = \vec{T}.\vec{n}$

Effectuons le produit scalaire: $\vec{T_2}.\vec{e_1} = |\vec{T_2}||\vec{e_1}|\cos(\vec{T_2}, \vec{e_1})$




Sachant que: $\cos(\vec{T_2}, \vec{e_1}) = \dfrac{\sigma_{21}}{T_2}, \quad (T_2 = |\vec{T_2}|)$

et comme $|\vec{e_1}| = 1$ donc on a: $\sigma_{21} = |\vec{T_2}|\cos(\vec{T_2}, \vec{e_1}) = \vec{T_2}.\vec{e_1}$

De même:

$$\sigma_{22} = |\vec{T_2}|\cos(\vec{T_2}, \vec{e_2}) = \vec{T_2}.\vec{e_2}, \quad \sigma_{23} = |\vec{T_2}|\cos(\vec{T_2}, \vec{e_3}) = \vec{T_2}.\vec{e_3}$$
$$\sigma_{11} = |\vec{T_1}|\cos(\vec{T_1}, \vec{e_1}) = \vec{T_1}.\vec{e_1}, \quad \sigma_{12} = |\vec{T_1}|\cos(\vec{T_1}, \vec{e_2}) = \vec{T_1}.\vec{e_2}$$
$$\sigma_{13} = |\vec{T_1}|\cos(\vec{T_1}, \vec{e_3}) = \vec{T_1}.\vec{e_3}, \quad \sigma_{31} = |\vec{T_3}|\cos(\vec{T_3}, \vec{e_1}) = \vec{T_3}.\vec{e_1}$$
$$\sigma_{32} = |\vec{T_3}|\cos(\vec{T_3}, \vec{e_2}) = \vec{T_3}.\vec{e_2}, \quad \sigma_{33} = |\vec{T_3}|\cos(\vec{T_3}, \vec{e_3}) = \vec{T_3}.\vec{e_3}$$

On en déduit la relation suivante: $\sigma_{ij} = \vec{T_i}.\vec{e_j}$

$i$ : l'indice de la normale à la facette, et $j$ : l'indice de la projection de la contrainte.

## 2.2. Propriétés du tenseur des contraintes

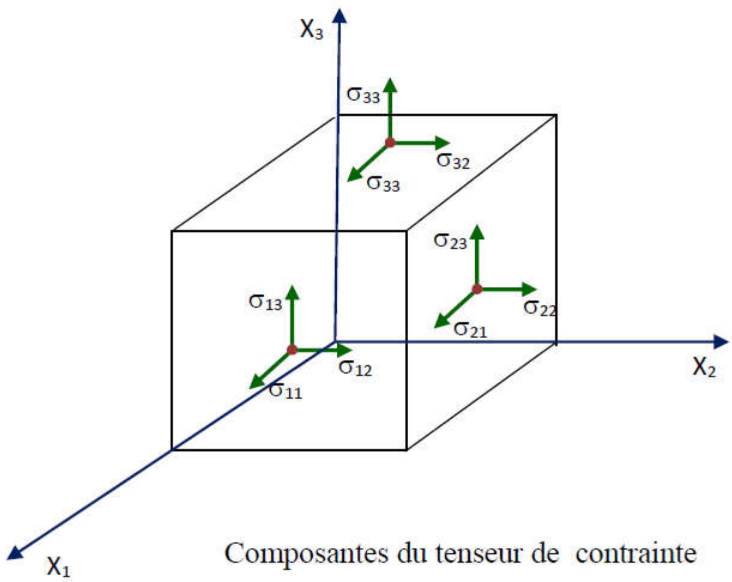
- Les composantes $\sigma_{ij}$ sont des fonctions linéaires et $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ ce qui conduit à que $\sigma$ un tenseur symétrique

$$[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12}=\sigma_{21} & \sigma_{13}=\sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}=\sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

- Les composantes de même indices: $\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$ et $\sigma_{33}$ sont les contraintes normales $\sigma_{ij}$ ,

- Les composantes des indices différents: $\sigma_{12}$, $\sigma_{23}$ et $\sigma_{13}$ sont les contraintes normales tandis que les composantes non diagonales $\sigma_{12}$, $\sigma_{23}$ et $\sigma_{13}$ sont les contraintes tangentielles.

Ces différentes composantes peuvent être représentées de la manière suivante:




Composantes du tenseur de contrainte

## 2.3. Contraintes principales et invariants

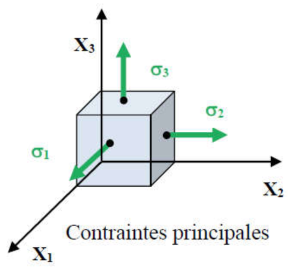
La symétrie du tenseur de contraintes entraîne qu'il possède trois vecteurs propres $\sigma_1$ , $\sigma_2$ et $\sigma_3$ réels, appelés contraintes principales. En prenant ces trois vecteurs (directions principales) comme repère (repère principal), le tenseur des contraintes devient diagonal.

• **Repère quelconque** $(O,\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

• **Repère principal** $(O,\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{X_3})$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$




Contraintes principales

Les contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique (2.4) à partir du repère initial quelconque $(O,\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})$

• **Equation caractéristique :** $\det[\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}] = 0$ (2.4)

Soit $p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0$

On peut démontrer que

$$d_3 - d_2\lambda + d_1\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

où les invariants fondamentaux $d_1, d_2, d_3$ du tenseur des contraintes $\sigma$

$$\begin{cases} d_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det(\sigma_{ij}) \\ d_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = \frac{1}{2}\left((tr(\sigma_{ij}))^2 - tr(\sigma_{ij}^2)\right) \\ d_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = tr(\sigma_{ij}) \end{cases}$$

## 2.4 Représentation géométrique de contrainte (tricercle de Mohr)

Le tricercle de Mohr est une représentation géométrique de l'état de contrainte dans le plan $(\vec{t},\vec{n})$. Les axes de cordonnées choisis sont les axes principaux dont les contraintes principales sont des valeurs distinctes prises par convention dans l'ordre $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Soit un point $M$ d'un milieu continu en état de contrainte la composante $\sigma_n$ du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{\sigma_n} = \vec{T}(M,\vec{n}).\vec{n}$

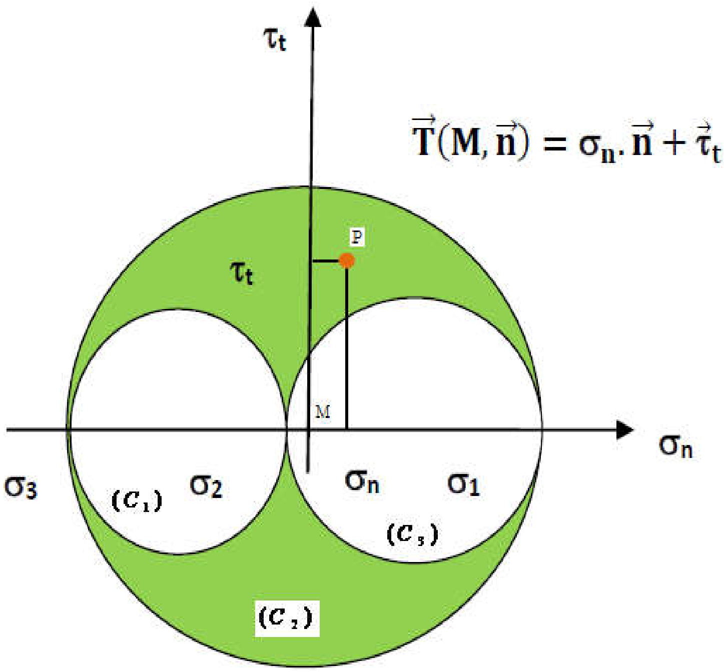
Pour chaque facette de normale unitaire $\vec{n}$ on obtient un point $P$, extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$. On se propose de chercher le lieu géométrique de ce point $P$. Si on fait varier cette facette dans le plan de Mohr $M(\vec{t},\vec{n})$.

**Discussions des cas:** Le point $P$ la pointe de vecteur de contraintes $\vec{T}(M,\vec{n})$ vari dans la zone hachurée.

1) Si $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$ cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle $(C_1)$ de centre: $w_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ et rayon : $R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.

2) Si $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$ cela signifie qu'on est à l'intérieur du cercle $(C_2)$ de centre: $w_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ et rayon : $R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

2) Si $(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$ cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle $(C_3)$ de centre: $w_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et rayon : $R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.




Représentation graphique des cercles de Mohr

**Remarques**:

- Si $\sigma_2 = \sigma_3$ le tricercle de Mohr se réduit à un seul cercle, et le lieu géométrique du point $P$ est le périmètre de ce cercle.
- Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ le tricercle de Mohr ainsi que le lieu géométrique du point $P$ se réduit à un point.

La valeur maximale de $\vec{t}$ est égale au rayon du grand cercle de Mohr. Cette valeur est appelée contrainte de cisaillement maximale, et vaut : $t_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

## 1. Eléments de calcul indispensables

Nous rappelons ici sans en donner la démonstration les théorèmes mathématiques qui vont être utilisés dans ce chapitre.

Soient $n(x,t)$ est l'unité pointant vers l'extérieur vecteur normal, $x$ est un point dans un région $(D)$ et la variable d'intégration, $dV$ et $dS$ sont des éléments de volume et de surface à $x$ et $v(x,t)$ est la vitesse de l'élément de surface. La fonction $a$ peut être un tenseur, un vecteur ou une valeur scalaire.

**Formules de Green - Ostrogradsky:**

La formule de Green - Ostrogradsky ou théorème de la divergence permet de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface, c'est une formule d'intégration par parties.

Pour $a$ scalaire: $\int_D \overrightarrow{\mathrm{grad}}(a)\,dV = \int_{\partial D} a\,\vec{n}\,dS$

Pour $\vec{a}$ vecteur: $\int_D \mathrm{div}(\vec{a})\,dV = \int_{\partial D} \vec{a}.\vec{n}\,dS$

Pour $\overline{\overline{a}}$ tenseur: $\int_D \mathrm{div}(\overline{\overline{a}})\,dV = \int_{\partial D} \overline{\overline{a}}\,\vec{n}\,dS$

**Théorème de transport de Reynolds**

Ce théorème peut être exprimée comme suit: $\frac{d}{dt}\left(\int_D a\,dV\right) = \int_D \frac{da}{dt}dV + \int_{\partial D} (\vec{v}.\vec{n})\,a\,dS$

## 2. Conservation de la masse.

Le principe de conservation de la masse postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. En conséquence la variation de la masse au cour du temps est nulle

**Forme intégrale:**

Pour tout domaine $(D)$ d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement(donc constitué toujours de mêmes particules), sa variation de masse au cours de temps est nulle.

$\frac{dm}{dt} = 0$ Comme $m = \int_D \rho\,dV$ alors $\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dV = 0$

Par ailleurs et d'après le théorème de transport de Reynolds, nous avons

$\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dV = \int_D \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_{\partial D} \rho\,\vec{v}.\vec{n}\,dS$ alors: $\int_D \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_{\partial D} \rho\,\vec{v}.\vec{n}\,dS = 0$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_D \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_D div(\rho\,\vec{v}).dV = 0$$

**Forme locale:**

En utilisant le théorème de l'intégrale nulle, on obtient la forme locale de la loi de conservation de la masse (ou équation de la continuité)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\,\vec{v}) = 0$$

de plus nous avons les relations:

$div(\rho\,\vec{v}) = \rho\,div(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{\nabla\rho}$ et $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\nabla\rho}$

on obtient alors une forme de l'équation de continuité

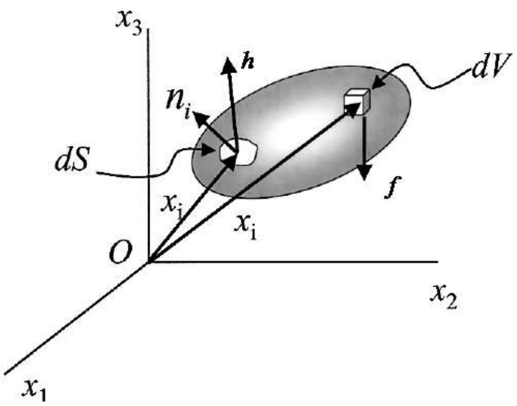
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,div(\vec{v}) = 0$$

**Remarque**:

Pour une fluide est incompressible ( $\rho$ = contante ),l'équation de continuité devient $\nabla.\vec{v} = 0$

## 3. Conservation de la quantité de mouvement:

### 1. Forme intégrale:




Soit un milieu continu ayant un volume actuel $V$ et une surface frontière $S$ soumis à des tractions surfaciques de densité $h$ et des forces volumiques de densité De plus, on considère que le corps en mouvement sous le champ de vitesse $v = v_i(x,t)$.

La quantité de mouvement $P(t)$, définie par le vecteur:

$$P(t) = \int_V \rho v \, dV$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement, connue aussi sous le nom de principe fondamental de la dynamique qui énoncé que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces exerces.

Donc, on peut écrire une relation générale de la forme:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v \, dV = \int_S h \, dV + \int_V f dV$$

et comme $\sigma n = h$, en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_V (\rho \dot{v} dV - div(\sigma) - f) dV = 0$$

où $\dot{v}$ est le champ d'accélération du corps.

### 1. Forme locale:

En utilisant le théorème de l'intégrale nulle, et on note $\dot{v} = a$, on obtient la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement (ou équation de mouvement)

$$div(\sigma) + f = \rho a$$

Le cas important de l'équilibre statique, dans lequel les composantes d'accélération disparaissent, est donné à la fois à partir de l'équation précédente comme

$$div(\sigma) + f = 0$$

C'est l'équations d'équilibre, largement utilisées en mécanique des solides.

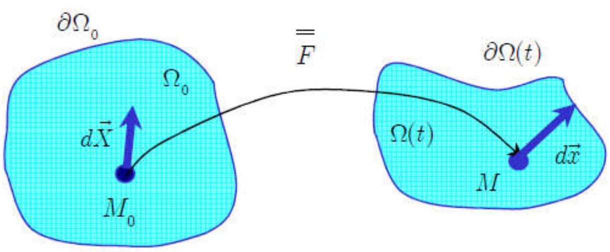
## 1. Déformation:

On appelle déformation, un changement de distance entre deux points matériels d'un milieu continu, elle s'accompagne généralement d'un déplacement ainsi que d'un changement de forme.

**Gradient de déformation:**

De ce précède on a: $x_i = \Phi_i(X_J, t)$, $X_I = \psi_I(x_j, t)$

et nous avons encore les relations suivantes




$x_i = x_i(X_J, t)$, $X_I = X_I(x_j, t)$

Sous forme différentielle nous obtenons:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J \Rightarrow dx(t) = \nabla\Phi\, dX$$

On peut donc écrire : $dx = F\,dX$ ce qui implique : $dX = F^{-1} dx$

En notation indicielle $F_{iJ} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial X_J} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_J}$ ou

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Le tenseur $F$ qui apparaît est appelé "tenseur gradient" ou encore "application linéaire tangente".

**Relation entre le vecteur déplacement et le gradient de déformation:**

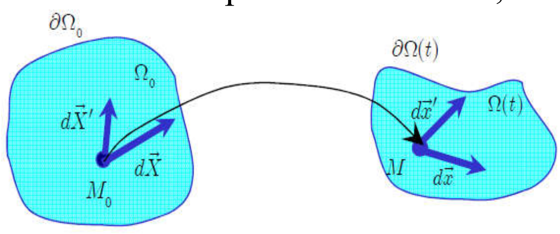
Les composantes de tenseur $F$ peuvent être calculées à partir du champ de déplacement en différenciant la relation suivante: $u(X_J, t) = \overrightarrow{OM}_t - \overrightarrow{OM}_0 = x - X$

on a donc: $F_{iJ} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_J} = \delta_{iJ} + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_J} \Rightarrow \boxed{F = I + \nabla u}$ et $\boxed{dx - dX = F dX - dX = \nabla u\, dX}$

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \end{vmatrix}$$

**Tenseur des déformations**

Considérons trois particules voisines $\vec{X}$ ,$\vec{X} + \overrightarrow{dX}$ et $\vec{X} + \overrightarrow{dX'}$ . Après déformations, elles occupent dans $\Omega(t)$ les positions respectives




$\vec{x}$ ,$\vec{x} + \overrightarrow{dx}$ et $\vec{x} + \overrightarrow{dx'}$

Nous avons les relations :

$$\overrightarrow{dx} = F\,\overrightarrow{dX} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dx'} = F\,\overrightarrow{dX'}$$

Ce qui nous donne

$$\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} = (F\,\overrightarrow{dX})^T (F\,\overrightarrow{dX'}) = \overrightarrow{dX}^T F^T F\,\overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX}^T C\,\overrightarrow{dX'}^T$$

Nous avons:

$$\boxed{\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} = \overrightarrow{dX}^T C\,\overrightarrow{dX'}^T \quad \text{avec} \quad C = F^T F}$$

Dans cette relation, le tenseur $C$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit.

Nous avons aussi les relations : : $\overrightarrow{dX} = F^{-1}\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dX'} = F^{-1}\overrightarrow{dx'}$

Ce qui nous donne

$$\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} = (F^{-1}\overrightarrow{dX})^T (F^{-1}\overrightarrow{dX'}) = \overrightarrow{dX}^T (F^{-1})^T F^{-1}\overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX}^T (F\,F^T)^{-1}\overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX}^T c^{-1}\overrightarrow{dX'}^T$$

Nous avons:

$$\boxed{\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} = \overrightarrow{dX}^T c^{-1}\overrightarrow{dX'}^T \quad \text{avec} \quad c = F F^T}$$

Dans cette relation, le tenseur $c$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche.

**Remarque:** Tout comme $F$ , $c$ et $C$ ne sont pas des mesures de déformations car pour un mouvement de corps rigide, on a $C = c = I$ .

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange $E$ est défini par :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} - \overrightarrow{dX}^T . \overrightarrow{dX'}) = \frac{1}{2}(C - I)\overrightarrow{dX}^T . dX' = \overrightarrow{dX}^T E\,dX'$$

où $I$ est le tenseur identité. Le tenseur $E$ est un tenseur symétrique matériel du 2ème ordre. Il se calcule en terme de $F$ par la relation suivante :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T F - I) \qquad (3.1)$$

On définit également le tenseur de déformation d'Euler-Almansi $e$ :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{dX}^T . \overrightarrow{dX'} - \overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'}) = \frac{1}{2}\left(I - c^{-1}\right)\overrightarrow{dx}^T . \overrightarrow{dx'} = \overrightarrow{dx}^T e\,\overrightarrow{dx'}$$

Le tenseur $e$ est un tenseur spatial symétrique du deuxième ordre qui s'exprime en fonction de $F$ par:

$$e = \frac{1}{2}(I - c^{-1}) = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) \qquad (3.2)$$

**Résultat:**

D'après les relations (3.1) et (3.2), on peut démontrer que

$$e = F^{-T} E\,F^{-1}; \quad E = F^T e\,F \qquad (3.3)$$

**Relation entre le tenseur de déformation et le vecteur déplacement:**

Exprimons le tenseur de déformation de Lagrange $E_{ij}$ et celui d'Euler-Almansi $e_{ij}$ en fonction du vecteur déplacement $\vec{u}$ .

Sachant que :

$$2.E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Et

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad u_i = u_i(X_j, t)$$

Alors

$$2E_{ij} = \left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que

$$2.E_{ij} = \delta_{mi}\delta_{mj} + \delta_{mi}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} + \delta_{mj}.\frac{\partial u_m}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Ce qui conduit à

$$2.E_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right) \qquad (3.3)$$

Le même raisonnement conduit une relation entre le tenseur de déformation d'Euler-Almansi $e_{ij}$ et le vecteur déplacement $\vec{u} = \vec{u}(x_i, t)$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}.\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \qquad (3.4)$$

**Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire:**

On admettra les hypothèses suivantes :

– Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions du solide.

– Les dérivées des déplacements par rapport à $X_i$ sont petites devant l'unité: $\left|\frac{\partial u_i}{X_j}\right| << 1$

Si $G$ un grandeur physique de $X_i$, on en déduit : $\frac{\partial G}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_1}$

Comme: $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ , soit $x_i = X_i + u_i$

Alors $\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}, \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1}$

D'où $\frac{\partial G}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial x_1}\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial X_i} \simeq \frac{\partial G}{\partial x_1}$

De même : $\frac{\partial G}{\partial X_2} \simeq \frac{\partial G}{\partial x_2}$ , $\frac{\partial G}{\partial X_3} \simeq \frac{\partial G}{\partial x_3}$

**Tenseur des déformations linéarisé**

Le tenseur des déformations de Lagrange et d'Euler-Almansi définit par (3.3) et (3.4) se réduit à :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij}$$

et on écrit

$$[\varepsilon] = (\varepsilon_{ij}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

Le tenseur $[\varepsilon]$ est appelé tenseur des déformations linéarisé.

**2- Vitesse de déformation**

Jusqu'ici nous avons introduit deux mesures de déformations dans les configurations initiale et actuelle. Il nous reste à introduire la vitesse de ces déformations appelée taux de déformation.

Le tenseur taux de déformation (matériel) est la dérivée particulaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange, soit $\dot{\mathbf{E}}$. Ce tenseur donne, pour une particule donnée, le taux de variation de sa déformation au cours du temps. C'est clairement une quantité lagrangienne.

De même, nous introduirons le tenseur taux de déformation spatial noté $D$. Celui-ci est relié à $\dot{\mathbf{E}}$ par la même relation (3.3) qui relie $e$ à $E$ :

$$D = F^{-T} \dot{E}\, F^{-1}; \quad \dot{E} = F^{T} D\, F$$

On peut dégager l'expression du tenseur taux de déformation spatial en terme des vitesses

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

| Département des mathématiques | Université d'Eloued | Module : Modélisation |
|---|---|---|
| 1ère Master fondamental | Faculté des sciences exactes | 2020/2021 |

# Série des exercices 01

**Exercice1:**

Évaluez les expressions suivantes

1) $\delta_{ii}$ 2) $\delta_{ij}\delta_{ij}$ 3) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$ 4) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ 5) $\delta_{ij}A_{ik}$ 6) $\delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl}$ 7) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}$ 8) $\varepsilon_{ijk}a_j a_k$

**Exercice2:**

1. Montrer que: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

2. Si $A$ est un tenseur antisymétrique pour lequel le vecteur axial $b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$ .

Montrer que: $A_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$

**Exercice3:**

Soit $S$ un tenseur symétrique et $A$ un tenseur antisymétrique montrer que l'on a toujours $S:A=0$

**Exercice 4:**

Soit $S$ un tenseur symétrique et $T$ un tenseur quelconque montrer que l'on a toujours $S:T=S:T^S$, $T^S$ où est la partie symétrique de $T$ .

**Exercice5:**

1. Montrer que si $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ et $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ on a alors $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj}$ et $\dot{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_k$

**Exercice6:**

1. Montrer que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k = a.(b \wedge c)$$

Ceci définit le produit mixte des vecteurs $a$, $b$ et c.

2. Montrer que: $\det(T_{ij}) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn}$

**Exercice7:**

Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base d'un espace vectoriel $E_2$ et soient deux vecteurs de $E_2$

$$X = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \ ; \ Y = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

1. On note $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ où $i, j \in \{1,2\}$ les vecteurs de base d'un espace $E_4 = E_2 \otimes E_2$ .
Déterminer l'expression du produit tensoriel $X \otimes Y$ .

2. Le tenseur suivant : $U = 11\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + 8\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 20\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$ est-il le produit tensoriel de deux vecteurs de $E_2$ ?.

3. Montrer que le tenseur $U$ est la somme du produit tensoriel $X \otimes Y$ et d'un autre tenseur $W$ que l'on déterminera. Ce dernier est-il un produit tensoriel et lequel.

**Exercice8:**

Dans un système d'axes $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on considère les trois vecteurs suivants :

$\vec{U}^T = (0,1,1)^T$ , $\vec{V}^T = (-1,0,1)^T$ , $\vec{W}^T = (0,-1,1)^T$

1. Déterminer un tenseur $T$ de façon que l'on ait : $T.\vec{U} = \vec{A}$ , $T.\vec{V} = \vec{B}$ et $T.\vec{W} = \vec{C}$
où $\vec{A}$ , $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont les vecteurs de composantes:

$\vec{A}^T = (2b, a+b-c, a+b+c)^T$ , $\vec{B}^T = (b+c-a, -2c, c+a-b)^T$ , $\vec{C}^T = (2c, b-c-a, a-b-c)^T$

2. Déterminer le tenseur symétrique $D$ et le tenseur antisymétrique $G$ composants du tenseur $T$ obtenu.

3. Comment faut-il choisir les données $a, b, c$

a) Pour que $T$ soit symétrique.

b) Pour que l'invariant $d_1$ soit nul. ($d_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$)

**<u>Exercice</u>9:**

Déterminer les directions principales et les valeurs principales du tenseur de second ordre $T$ dont la représentation matricielle est

$$[T_{ij}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**<u>Exercice</u>10:**

Les valeurs du tenseur des contraintes en un point $P$ sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer le vecteur des contraintes sur le plan à $P$ dont la normale unitaire est

$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$

**<u>Exercice</u>11:**

Soit l'état de $\sigma$ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} -5a & -4a & 0 \\ -4a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Déterminer analytiquement les contraintes principales et les directions principales de contraintes.

**<u>Exercice</u>12:**

Soit l'état de $\sigma$ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs principales de tenseur déviateur $D$ pour le tenseur $\sigma$.

**<u>Exercice</u>13**:

Les valeurs du tenseur des contraintes $\sigma$ sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $C$ est une constante arbitraire,

1. Montrer que l' équation d'équilibre est satisfaite si les forces volumiques sont nulles.
2. Au point $P(4,-4,7)$ , calculer le vecteur des contrainte sur le plan: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$, et sur la sphère: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$.
3. Déterminer les contraintes principales, les contraintes de cisaillement maximales et les contraintes principales de déviation en $P$.
4. Tracer les cercles de Mohr pour l'état de contrainte en $P$.

## Correction de Série des exercices 01

**Exercice1:**

Évaluation des expressions suivantes

1) $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{i=3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

2) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3} \delta_{ij}\delta_{ij} = \sum_{j=1}^{j=3} (\delta_{1j}^2 + \delta_{2j}^2 + \delta_{3j}^2) = \delta_{11}^2 + \delta_{21}^2 + \delta_{31}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{32}^2 + \delta_{13}^2 + \delta_{23}^2 + \delta_{33}^2 = 3$

3) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3} \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j=3} (\delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk})$

$= \sum_{k=1}^{k=3}\big((\delta_{11}\delta_{1k}\delta_{1k} + \delta_{21}\delta_{2k}\delta_{1k} + \delta_{31}\delta_{3k}\delta_{1k}) + (\delta_{12}\delta_{1k}\delta_{2k} + \delta_{22}\delta_{2k}\delta_{2k} + \delta_{32}\delta_{3k}\delta_{2k}) + (\delta_{13}\delta_{1k}\delta_{3k} + \delta_{23}\delta_{2k}\delta_{3k} + \delta_{33}\delta_{3k}\delta_{3k})\big)$

$= \sum_{k=1}^{k=3}(\delta_{11}\delta_{1k}\delta_{1k} + \delta_{22}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{33}\delta_{3k}\delta_{3k}) = \delta_{11}\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22}\delta_{22} + \delta_{33}\delta_{33}\delta_{33} = 3$

4) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \sum_{j=1}^{j=3} \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$

5) $\delta_{ij} A_{ik} = \sum_{i=1}^{i=3} \delta_{ij} A_{ik} = \delta_{1j} A_{1k} + \delta_{2j} A_{2k} + \delta_{3j} A_{3k} = A_{jk}$

6) $\delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl} = \sum_{l=1}^{l=3}\sum_{j=1}^{j=3} \delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl} = \sum_{l=1}^{l=3}(\delta_{i1}\delta_{kl}A_{1l} + \delta_{i2}\delta_{kl}A_{2l} + \delta_{i3}\delta_{kl}A_{3l})$ où $i,k \in \{1,2,3\}$

$= (\delta_{i1}\delta_{k1}A_{11} + \delta_{i1}\delta_{k2}A_{12} + \delta_{i1}\delta_{k3}A_{13}) + (\delta_{i2}\delta_{k1}A_{21} + \delta_{i2}\delta_{k2}A_{22} + \delta_{i2}\delta_{k3}A_{23}) + (\delta_{i3}\delta_{k1}A_{31} + \delta_{i3}\delta_{k2}A_{32} + \delta_{i3}\delta_{k3}A_{33})$

$\begin{cases} \text{si } i = k \text{ on a: } \delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl} = A_{ii} \\ \text{si } i \neq k \text{ on a: } \delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl} = A_{ik} \end{cases} \Rightarrow \delta_{ij}\delta_{kl}A_{jl} = A_{ik}$

7) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j=3}(\varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j})$

$= \sum_{k=1}^{k=3}\big((\varepsilon_{11k}\varepsilon_{k11} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31}) + (\varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{22k}\varepsilon_{k22} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32}) + (\varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{33k}\varepsilon_{k33})\big)$

$= \varepsilon_{321}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{312}$

$= (-1)(-1) + (+1)(+1) + (+1)(+1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (+1)(+1) = 6$

8) $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j=3} \varepsilon_{ijk} a_j a_k = \sum_{k=1}^{k=3}(\varepsilon_{i1k} a_1 a_k + \varepsilon_{i2k} a_2 a_k + \varepsilon_{i3k} a_3 a_k)$

$= \varepsilon_{i21} a_2 a_1 + \varepsilon_{i31} a_3 a_1 + \varepsilon_{i12} a_1 a_2 + \varepsilon_{i32} a_3 a_2 + \varepsilon_{i13} a_1 a_3 + \varepsilon_{i23} a_2 a_3$

$\begin{cases} \text{si } i = 1 : \varepsilon_{ijk} a_j a_k = -a_3 a_2 + a_2 a_3 = 0 \\ \text{si } i = 2 : \varepsilon_{ijk} a_j a_k = +a_3 a_1 - a_1 a_3 = 0 \\ \text{si } i = 3 : \varepsilon_{ijk} a_j a_k = -a_2 a_1 + a_1 a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$

**Exercice2:**

1. Démonstration que: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1pq} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2pq} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3pq}$ où $i, j, p, q \in \{1,2,3\}$

a) Si $i = j$ et $p = q$ on a: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = 0$

b) Si $i \neq j$ ou $p \neq q$

1) soit il y a deux paires d'indices égaux:

- si $i = p$ et $j = q$ on a: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1ij} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2ij} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3ij} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$
- si $i = q$ et $j = p$ on a: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1ji} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2ji} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3ji} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$

2) soit il y a une seule paire d'indices égaux:

- si $i = p$ et $j \neq q$ on a: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1iq} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2iq} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3iq} = \delta_{ii}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{ji} = 0$
- si $i \neq p$ et $j = q$ on a: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1pj} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2pj} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3pj} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 0$

2. Si $A$ est un tenseur antisymétrique pour lequel le vecteur axial $b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$ .

Démonstration que: $A_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$

On multiplie l'équation donnée par $\varepsilon_{pqi}$ et utilisant l'équation donnée dans la question (1) on a

$$\varepsilon_{pqi}b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}A_{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj})A_{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{pj}\delta_{qk}A_{jk} - \delta_{qj}\delta_{pk}A_{jk}) = \frac{1}{2}(A_{pq} - A_{qp}) = \frac{1}{2}(A_{pq} + A_{pq}) = A_{pq}$$

**Exercice3:**

Soit $S$ un tenseur symétrique et $A$ un tenseur antisymétrique

Démonstration que l'on a toujours $S : A = 0$

Le produit doublement contracté de ces deux tenseurs est un scalaire égal à:

$$S : A = S_{ij}A_{ji} = \sum_{j=1}^{j=3}(S_{1j}A_{j1} + S_{2j}A_{j2} + S_{3j}A_{j3})$$
$$= (S_{11}A_{11} + S_{12}A_{21} + S_{13}A_{31}) + (S_{21}A_{12} + S_{22}A_{22} + S_{23}A_{32}) + (S_{31}A_{13} + S_{32}A_{23} + S_{33}A_{33})$$

On sait que l'on a: $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ , et par ailleurs:

$S_{12} = S_{21};\ S_{13} = S_{31};\ S_{23} = S_{32}\ /\ A_{12} = -A_{21};\ A_{13} = -A_{31};\ A_{23} = -A_{32}$

On en déduit directement $S : A = (S_{12}A_{21} + S_{21}A_{12}) + (S_{23}A_{32} + S_{32}A_{23}) + (S_{31}A_{13} + S_{13}A_{31}) = 0$

**Exercice 4:**

Soit $S$ un tenseur symétrique et $T$ un tenseur quelconque

Démonstration que l'on a toujours $S:T = S:T^S$, où $T^S$ est la partie symétrique de $T$.

Le résultat découle directement de celui de l'exercice précédent et de la distributivité de l'opérateur produit doublement contracté :

$S:T = S:(T^A + T^S) = S:T^A + S:T^S = 0 + S:T^S = S:T^S$ , où $T^A$ est la partie antisymétrique de $T$

**Exercice5:**

si $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ et $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$

Démonstration que: $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj}$ et $\dot{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_k$

1. $\dot{\omega}_{ij}$ est l'opposé de la partie antisymétrique de $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ tandis que $d_{ij}$ est la partie symétrique:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{d_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\dot{\omega}_{ij}}$$

En outre, puisque $\varepsilon_{ijk}$ et $d_{jk}$ sont respectivement antisymétrique et symétrique sur les indices $j$ et $k$ on a $\varepsilon_{ijk}d_{jk} = 0$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj} - \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}d_{kj}}_{=0} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\dot{\omega}_{kj} - d_{kj}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \dot{\Omega}_i$$

2. $-\varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_k = -\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kji}\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{im}-\delta_{jm}\delta_{il})\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\delta_{jl}\delta_{im}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} - \delta_{jm}\delta_{il}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

**<u>Exercice</u>6:**

1. Démonstration que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k = a.(b \wedge c)$$

Par la formule du déterminant on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = a.(b \wedge c)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

tandis que le développement du second terme donne

$$\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{j=1}^{j==3}\sum_{i=1}^{i=3}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \varepsilon_{123}a_1b_2c_3 + \varepsilon_{231}a_2b_3c_1 + \varepsilon_{312}a_3b_1c_2 + \varepsilon_{132}a_1b_3c_2 + \varepsilon_{213}a_2b_1c_3 + \varepsilon_{321}a_3b_2c_1$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

2. Démonstration que: $\det(T_{ij}) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn}$

$$\det(T_{ij}) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = T_{11}(T_{22}T_{33} - T_{32}T_{23}) - T_{12}(T_{21}T_{33} - T_{31}T_{23}) + T_{13}(T_{21}T_{32} - T_{31}T_{22})$$

$$= T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{31}T_{23} + T_{13}T_{21}T_{32} - T_{11}T_{32}T_{23} - T_{12}T_{21}T_{33} - T_{13}T_{31}T_{22}$$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn}$ $\quad (\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1,\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1)$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{123}\varepsilon_{123}T_{11}T_{22}T_{33} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{132}T_{11}T_{23}T_{32} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{132}T_{11}T_{23}T_{32} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{231}T_{12}T_{23}T_{31} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{312}T_{13}T_{21}T_{32} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{321}T_{13}T_{22}T_{31} \\
&+\varepsilon_{132}\varepsilon_{132}T_{11}T_{33}T_{22} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{123}T_{11}T_{32}T_{23} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213}T_{12}T_{31}T_{23} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{231}T_{12}T_{33}T_{21} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{312}T_{13}T_{31}T_{22} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{321}T_{13}T_{32}T_{21} \\
&+\varepsilon_{213}\varepsilon_{213}T_{22}T_{11}T_{33} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{123}T_{21}T_{12}T_{33} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{132}T_{21}T_{13}T_{32} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{231}T_{22}T_{13}T_{31} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{312}T_{23}T_{11}T_{32} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321}T_{23}T_{12}T_{31} \\
&+\varepsilon_{231}\varepsilon_{231}T_{22}T_{33}T_{11} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123}T_{21}T_{32}T_{13} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{132}T_{21}T_{33}T_{12} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{213}T_{22}T_{31}T_{13} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{312}T_{23}T_{31}T_{12} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{321}T_{23}T_{32}T_{11} \\
&+\varepsilon_{312}\varepsilon_{312}T_{33}T_{11}T_{22} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231}T_{32}T_{13}T_{21} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{123}T_{31}T_{12}T_{23} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{132}T_{31}T_{13}T_{22} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{213}T_{32}T_{11}T_{23} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{321}T_{33}T_{12}T_{21} \\
&+\varepsilon_{321}\varepsilon_{321}T_{33}T_{22}T_{11} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{312}T_{33}T_{21}T_{12} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{231}T_{32}T_{23}T_{11} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{123}T_{31}T_{22}T_{13} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{132}T_{31}T_{23}T_{12} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{213}T_{32}T_{21}T_{13} \\
&= 6(T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{31}T_{23} + T_{13}T_{21}T_{32} - T_{11}T_{32}T_{23} - T_{12}T_{21}T_{33} - T_{13}T_{31}T_{22})
\end{aligned}$$

**<u>Exercice</u>7:**

Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base d'un espace vectoriel $E_2$ et soient deux vecteurs de $E_2$

$$X = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2\ ;\ Y = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

1. On note $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ où $i, j \in \{1,2\}$ les vecteurs de base d'un espace $E_4 = E_2 \otimes E_2$.
Détermination de l'expression du produit tensoriel $X \otimes Y$.

$X \otimes Y = (2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) \otimes (3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) = 6\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + 10\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 12\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$

2. Le tenseur suivant : $U = 11\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + 8\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 20\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$ est-il le produit tensoriel de deux vecteurs de $E_2$ ?.

On suppose $U = K \otimes L$ où $K = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2$ et $L = l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2$

on a $U = (k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2) \otimes (l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2) = k_1l_1\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + k_1l_2\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + k_2l_1\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + k_2l_2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$

et on résulte $k_1l_1 = 11,\ k_1l_2 = 8,\ k_2l_1 = 20,\ k_2l_2 = 12$, ce qui implique $\frac{l_1}{l_2} = \frac{11}{8},\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{20}{12}$

ça c'est une contradictoire, donc $U$ n'est pas un produit tensoriel.

3. Démonstration que le tenseur $U$ est la somme du produit tensoriel $X \otimes Y$ et d'un autre tenseur $W$ que l'on déterminera. Ce dernier est-il un produit tensoriel et lequel?.

On a $W = U - X \otimes Y = 5\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - 2\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 8\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$

$W$ n'est pas un produit tensoriel, car $U$ n'est pas.

**Exercice8:**

Dans un système d'axes $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les trois vecteurs suivants :

$\vec{U}^T = (0,1,1)^T$, $\vec{V}^T = (-1,0,1)^T$, $\vec{W}^T = (0,-1,1)^T$

1. Détermination d'un tenseur $T$ de façon que l'on ait : $T.\vec{U} = \vec{A}$, $T.\vec{V} = \vec{B}$ et $T.\vec{W} = \vec{C}$ où $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont les vecteurs de composantes:

$\vec{A}^T = (2b, a+b-c, a+b+c)^T$, $\vec{B}^T = (b+c-a, -2c, c+a-b)^T$, $\vec{C}^T = (2c, b-c-a, a-b-c)^T$

$$\begin{cases} T.\vec{U} = \vec{A} \\ T.\vec{V} = \vec{B} \\ T.\vec{W} = \vec{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{ij}U_j = A_i \\ T_{ij}V_j = B_i \\ T_{ij}W_j = C_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{i2} + T_{i3} = A_i \\ -T_{i1} + T_{i3} = B_i \\ -T_{i2} + T_{i3} = C_i \end{cases}$$

pour $i = 1$ on trouve | pour $i = 2$ on trouve | pour $i = 3$ on trouve

$$\begin{cases} T_{12} + T_{13} = 2b \\ -T_{11} + T_{13} = b+c-a \\ -T_{12} + T_{13} = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{11} = a \\ T_{12} = b-c \\ T_{13} = b+c \end{cases} \quad \begin{cases} T_{22} + T_{23} = a+b-c \\ -T_{21} + T_{23} = -2c \\ -T_{22} + T_{23} = b-c-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{21} = a+c \\ T_{23} = b+2c \\ T_{23} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{32} + T_{33} = a+b+c \\ -T_{31} + T_{33} = c+a-b \\ -T_{32} + T_{33} = a-b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{31} = b-c \\ T_{32} = b+c \\ T_{33} = a \end{cases}$$

Donc on peut écrire:

$$[T] = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-c & b+c \\ a+c & b+2c & b \\ b-c & b+c & a \end{pmatrix} \Rightarrow [T^T] = \begin{pmatrix} a & a+c & b-c \\ b-c & b+2c & b+c \\ b+c & b & a \end{pmatrix}$$

2. Détermination du tenseur symétrique $D$ et le tenseur antisymétrique $G$ composants du tenseur $T$ obtenu.

On a $D = \frac{1}{2}(T + T^T) \qquad G = \frac{1}{2}(T - T^T)$

$$[D] = \begin{pmatrix} a & \frac{a+b}{2} & b \\ \frac{a+b}{2} & b+2c & \frac{2b+c}{2} \\ b & \frac{2b+c}{2} & a \end{pmatrix} \qquad [G] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-a-2c}{2} & c \\ \frac{a-b+2c}{2} & 0 & -\frac{c}{2} \\ -c & \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Comment faut-il choisir les données $a, b, c$

a) Pour que $T$ soit symétrique.

$T$ est symétrique $\Leftrightarrow \begin{cases} b-c=a+c \\ b+c=b-c \\ b=b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=0 \end{cases}$

b) Pour que l'invariant $d_1$ soit nul. ($d_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$)

$T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0 \Leftrightarrow a + b + 2c + a = 0 \Leftrightarrow b = -2(a + c)$

**Exercice9:**

Détermination des directions principales et des valeurs principales du tenseur de second ordre $T$ dont la représentation matricielle est

$$[T_{ij}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

qui résulte à l'équation cubique: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$ dont les valeurs principales sont

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$.

Soit $n_i^{(k)}$ où $k \in \{1,2,3\}$ les composantes de l'unité normale dans la direction principale associée à $\lambda_k$

$Tn^{(k)} = \lambda_k n^{(k)} \Leftrightarrow T_{ij} n_j^{(k)} = \lambda_k n_i^{(k)}$.....(1)

Pour $\lambda_1 = 1$ et d'après (1) on trouve

$$T_{ij} n_j^{(1)} = n_i^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = n_1^{(1)} \\ -n_1^{(1)} + 3n_2^{(1)} = n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} = n_3^{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0 \\ -n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0 \Rightarrow n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0 \\ n_3^{(1)} = n_3^{(1)} \end{cases}$$

et comme $\| n^{(1)} \|^2 = n_i^{(1)} n_i^{(1)} = 1$ on a $n_3^{(1)} = \pm 1$

Pour $\lambda_2 = 2$ et d'après (1) on trouve

$$T_{ij} n_j^{(2)} = 2n_i^{(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 2n_1^{(2)} \\ -n_1^{(2)} + 3n_2^{(2)} = 2n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} = 2n_3^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0 \\ -n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0 \Rightarrow n_1^{(2)} = n_2^{(2)} \wedge n_3^{(2)} = 0 \\ n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

et comme $n_i^{(2)} n_i^{(2)} = 1$ et $n_3^{(2)} = 0$ on trouve $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour $\lambda_2 = 4$ et d'après (1) on trouve

$$T_{ij} n_j^{(3)} = 4n_i^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 4n_1^{(3)} \\ -n_1^{(3)} + 3n_2^{(3)} = 4n_2^{(3)} \\ n_3^{(3)} = 4n_3^{(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \\ -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \Rightarrow n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} \wedge n_3^{(3)} = 0 \\ 3n_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

et comme $n_i^{(3)} n_i^{(3)} = 1$ et $n_3^{(3)} = 0$ on trouve $n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc la base principale est $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ où $\vec{n}_1 = (0,0,\pm 1)^T$, $\vec{n}_2 = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ et $\vec{n}_3 = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$

**Exercice10:**

Les valeurs du tenseur des contraintes en un point $P$ sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Détermination le vecteur des contraintes sur le plan à $P$ dont la normale unitaire est $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$

On a $T_i = \sigma_{ij} n_j$ où $T$ est vecteur des contraintes , donc on peut écrire

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T} = 4\vec{e}_1 + \frac{10}{3}\vec{e}_2$$

**Exercice11:**

Soit l'état de $\sigma$ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} -5a & -4a & 0 \\ -4a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Détermination analytiquement des contraintes principales et les directions principales de contraintes.

1) Soit $\lambda$ une valeur propre de $[\sigma_{ij}]$ on écrit l'équation cubique comme suit

$-\lambda^3 + d_1\lambda^2 - d_2\lambda + d_3 = 0 \ldots (I)$ où $d_1 = tr(\sigma)$, $d_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$ et $d_3 = \det(\sigma)$

$$d_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3a$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32} = -5a^2 - 5a^2 + a^2 - 16a^2 = -25a^2$$

$$d_3 = \det(\sigma) = -5a\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} - (-4a)\begin{vmatrix} -4a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -4a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -21a^3$$

$$(I) \Leftrightarrow \lambda^3 - d_1\lambda^2 + d_2\lambda - d_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 3a\lambda^2 - 25a^2\lambda + 21a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda^2 + 4a\lambda - 21a^2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda - 3a)(\lambda + 7a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = a) \vee (\lambda = 3a) \vee (\lambda = -7a)$$

On a $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, on résulte que les contraintes principales sont $\lambda_1 = 3a, \lambda = a$ et $\lambda_3 = -7a$

2) Soit $n_i^{(k)}$ où $k \in \{1,2,3\}$ les composantes de l'unité normale dans la direction principale de contrainte associée à $\lambda_k$. On a $\sigma n^{(k)} = \lambda_k n^{(k)} \Leftrightarrow \sigma_{ij} n_j^{(k)} = \lambda_k n_i^{(k)}$.....(1)

Pour $\lambda_1 = 3a$ et d'après (1) on trouve

$$\sigma_{ij} n_j^{(1)} = 3an_i^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -5an_1^{(1)} - 4an_2^{(1)} = 3an_1^{(1)} \\ -4an_1^{(1)} + an_2^{(1)} = 3an_2^{(1)} \\ an_3^{(1)} = 3an_3^{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8an_1^{(1)} - 4an_2^{(1)} = 0 \\ -4an_1^{(1)} - 2an_2^{(1)} = 0 \Rightarrow (n_2^{(1)} = 2n_1^{(1)}) \wedge (n_3^{(1)} = 0) \\ -2an_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

et comme $n_i^{(1)} n_i^{(1)} = 1$ on a $n_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $n_2^{(1)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

Pour $\lambda_2 = a$ et d'après (1) on trouve $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = 0$ et $n_3^{(2)} = \pm 1$

Pour $\lambda_2 = -7a$ et d'après (1) on trouve $n_1^{(3)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$, $n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $n_3^{(3)} = 0$

**Exercice12:**

Soit l'état de $\sigma$ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Détermination des valeurs principales de tenseur déviateur $D$ pour le tenseur $\sigma$.

On sait que $\sigma = \frac{tr(\sigma)}{3} + D$ donc $D = \sigma - \frac{tr(\sigma)}{3} I_3$

On a $tr(\sigma) = 10 + 10 + 1 = 21$, on résulte $[D_{ij}] = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

les valeurs principales de $D$ peuvent être déterminées à partir du déterminant

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 0 \\ -6 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -6 \end{cases}$$

**Exercice13**:

Les valeurs du tenseur des contraintes $\sigma$ sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $C$ est une constante arbitraire,

1. Démonstration que l' équation d'équilibre est satisfaite si les forces volumiques sont nulles.

On a l 'équation d'équilibre: $div(\sigma) + f = 0$ où $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ sont les forces volumiques

$$div(\sigma) + f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

2. Au point $P(4,-4,7)$ , calculer le vecteur des contraintes sur le plan: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ , et sur la sphère: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$ .

a) le vecteur unité normale au plan $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ est $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$

$$T_i(P) = \sigma_{ij}(P) n_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{14C}{3} \\ +\frac{18C}{3} \\ -\frac{8C}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}(P) = \frac{C}{3}\left(14\vec{e}_1 + 18\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3\right)$$

b) le vecteur unité normale à la sphère $(S)$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$ est $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$ ($P \in (S)$ de centre $O$)

donc $\vec{n} = \frac{4}{9}\vec{e}_1 - \frac{4}{9}\vec{e}_2 + \frac{7}{9}\vec{e}_3$

$$T_i(P) = \sigma_{ij}(P) n_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ +\frac{7}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28C}{9} \\ 0 \\ +\frac{16C}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}(P) = \frac{C}{9}\left(-28\vec{e}_1 + 16\vec{e}_3\right)$$

3. Détermination des contraintes principales, de la contrainte de cisaillement maximale et des contraintes principales de déviation $D$ en $P$.

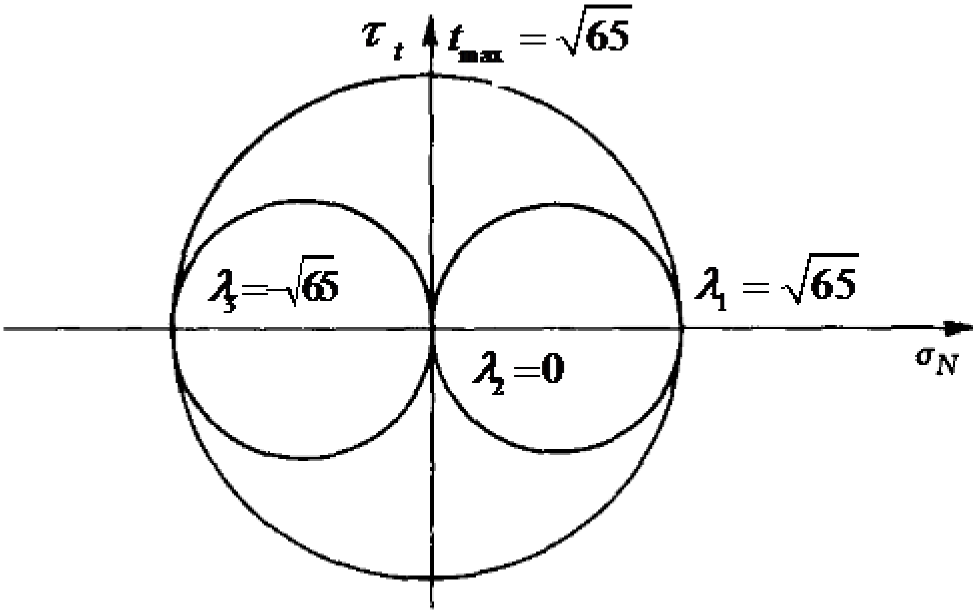
- D'après $\det(\sigma(P) - \lambda I_3) = 0$ pour les contraintes principales $\lambda$ on a

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 7 & 0 \\ 7 & -\lambda & -4 \\ 0 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 65) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{65}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\sqrt{65}$$

- La contrainte de cisaillement maximale est donnée par $t_{\max} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = \sqrt{65}$

- Puisque la contrainte normale moyenne à P est $\lambda_M = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} = 0$, les contraintes principales de déviateur $D$ sont les mêmes que les contraintes principales.

4. Tracer les cercles de Mohr pour l'état de contrainte en $P$.



| Département des mathématiques | Univercité d'Eloued | Module : Modélisation |
|---|---|---|
| $1^{ère}$ Master fondamental | Faculté des sciences exactes | 2020/2021 |

## Série des exercices 02

**Exercice1:**

Un solide déformable est soumis à des états de déformation dont la description lagrangienne est

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + t^2 X_2 \\ x_2 = X_2 + t^2 X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où $(X_1, X_2, X_3)$ et $(x_1, x_2, x_3)$ représentant les composant du vecteur position avant et après déformation dans un repère orthonormé. Déterminer

1. l'équation de la trajectoire de la particule initialement à $X = (1,2,1)$
2. les composantes de vitesse et d'accélération de la même particule lorsque $t = 2s$

**Exercice2:**

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donné par $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$ .

Déterminer la position finale de la particule telle que la position initiale à $(1,0,2)$.

**Exercice3:**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est: $v_1 = \frac{x_1}{t}, \quad v_2 = \frac{x_1}{t}, \quad v_3 = 0$

Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant $t_0 > 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t_0 > 0$.

**Exercice4:**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{cases} v_1 = a t \\ v_2 = b x_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

$a$, $b$ et $c$ étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

1. Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$
2. Calculer sous forme paramétrique les lignes de courant de l'écoulement à l'instant arbitraire $t_0$
3. Calculer le champ de vitesse en représentation lagrangienne, en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.
4. Calculer l'accélération des points matériels en représentation eulérienne.
5. Calculer l'accélération des points matériels en représentation lagrangienne. Comparer les solutions obtenues en partant des résultats trouvés en 4 et 5.

**Exercice5:**

On considère un mouvement défini dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne ($\omega$ est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \\ x_2 = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calculer le tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, le tenseur des dilatations $\overline{\overline{C}}$, et le tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point $X$ et à l'instant $t$.
2. A quelle classe particulière ce mouvement appartient-il ?
3. Pour un instant $t$ donné, calculer la dilatation en un point $X$ et dans une direction $\overrightarrow{dX}$
4. Pour un instant $t$ donné, calculer le glissement en un point $X$ et pour deux directions orthogonales $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$.
5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène $\rho_0$ à l'instant $t_0 = 0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant $t$.
6. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées lagrangiennes.
7. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées eulériennes.
8. Calculer les tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(x,t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(x,t)$.

**Exercice6:**

On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}_{(\vec{E}_i)}$$

1. Calculer le vecteur déformation pure dans la direction $\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{E_1} + \sqrt{3}\,\vec{E_3}\right)$. Conclusion?
2. Calculer les déformations principales et les directions principales de déformations.
3. Représenter sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformation pure en $M$ dans les directions $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$.
4. Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?

**Exercice7:**

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par: $u_1 = x_2 x_3$, $u_2 = x_1 x_3$, $u_3 = x_1 x_2$

1. Déterminer le tenseur de déformations au point $M(x_1, x_2, x_3)$ .
2. On considère les points $D_0(1,-1,0)$ et $C_0(1,1,0)$, déterminer la dilatation en $D_0$ dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{D_0C_0}$
3. Déterminer les déformations et les directions principales des déformations au point $D_0$ .
4. On suppose que le milieu est continu et élastique, déterminer dans le repère principale le tenseur des contraintes en $D_0$.

| Département des mathématiques | Université d'Eloued | Module : Modélisation |
|---|---|---|
| 1ère Master fondamental | Faculté des sciences exactes | 2020/2021 |

# Correction de Série des exercices 02

**Exercice1:**

Un solide déformable est soumis à des états de déformation dont la description lagrangienne est

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + t^2 X_2 \\ x_2 = X_2 + t^2 X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où $(X_1, X_2, X_3)$ et $(x_1, x_2, x_3)$ les composants du vecteur position avant et après déformation dans un repère orthonormé.

1. Détermination de l'équation de la trajectoire de la particule initialement à $X = (1,2,1)$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t^2 \\ x_2 = 2 + t^2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + \dfrac{1}{4}(x_1 - 1)^2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left( x_2 = 2 + \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 \right) \wedge (x_3 = 1)$$

La trajectoire est le parabole dont l'équation $x_2 = 2 + \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2$ située dans un plan d'une équation $x_3 = 1$

2. les composantes de vitesse et d'accélération de la même particule lorsque $t = 2s$

$$\begin{cases} v_1(t) = 4t \\ v_2(t) = 2t \\ v_3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 8 \\ v_2 = 4 \\ v_3 = 0 \end{cases} \; / \; \begin{cases} a_1(t) = 4 \\ a_2(t) = 2 \\ a_3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

**Exercice2:**

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donné par $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$ .

Détermination de la position finale de la particule telle que la position initiale à $(1,0,2)$.

Le vecteur de position initiale de la particule est $\overrightarrow{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$. Sa déplacement est $\vec{u} = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$ et comme $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ , Sa vecteur de position finale est $\vec{x} = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3$

**Exercice3:**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description

$$v_1 = \frac{x_1}{t}, \; v_2 = \frac{x_2}{t}, \; v_3 = 0$$

1. Détermination sous forme paramétrique de la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant $t_0 > 0$.

Pour trouver la forme paramétrique de la trajectoire de la particule, nous devons résoudre le problème suivant (problème de Cauchy):

$$\frac{\partial x_i}{dt} = v_i \;\text{ avec }\; x_i(t_0) = x_i^0 \;\; (i \in \{1,2,3\})$$

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoudre facilement :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{t} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2}{t} \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dt}{t} \\ \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{dt}{t} \\ x_3 = x_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1 = \ln t + C_1 \\ \ln x_2 = \ln t + C_2 \\ x_3 = x_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1^0}{t_0} t \\ x_2 = \dfrac{x_2^0}{t_0} t \\ x_3 = x_3^0 \end{cases}$$

La description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t_0 > 0$.

Vu qu'on impose $(X_1, X_2 X_3) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, la représentation lagrangienne du mouvement est alors :

$$x_1 = \frac{X_1}{t_0} t,\ x_2 = \frac{X_2}{t_0} t,\ x_3 = X_3$$

**Exercice4:**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{cases} v_1 = a\,t \\ v_2 = b\,x_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

$a$, $b$ et $c$ étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

1. Détermination sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant $t = 0$.

Pour trouver la forme paramétrique de la trajectoire de la particule, nous devons résoudre le problème suivant (problème de Cauchy): $\dfrac{\partial x_i}{dt} = v_i$ avec $x_i(0) = x_i^0$ $(i \in \{1, 2, 3\})$

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoudre facilement:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a\,t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b\,x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} t^2 + x_1^0 \\ x_2 = \dfrac{ab}{6} t^3 + b\,x_1^0 t + x_2^0 \\ x_3 = c\,t + x_3^0 \end{cases}$$

Vu qu'on impose $(X_1, X_2, X_3) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, la représentation lagrangienne du mouvement est alors:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a\,t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b\,x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} t^2 + X_1 \\ x_2 = \dfrac{ab}{6} t^3 + b\,X_1 t + X_2 \\ x_3 = c\,t + X_3 \end{cases}$$

2. Calcule sous forme paramétrique les lignes de courant de l'écoulement à l'instant arbitraire $t_0$

Les lignes de courant sont l'enveloppe du champ de vitesse `a un instant déterminé. En d'autres mots il s'agit des courbes tangentes aux vecteurs vitesse à un temps $t_0$ fixé.

Pour calculer ces lignes de courant, on va photographier le champ de vitesse à l'instant donné $t_0$, et ensuite calculer les trajectoires pour ce champ de vitesse fictif égal au champ de vitesse réel au temps particulier $t_0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = at_0 \\ \dfrac{dx_2}{ds} = bx_1 \\ \dfrac{dx_3}{ds} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = at_0 s^2 + x_1^0 \\ x_2 = \dfrac{abt_0}{2} s^2 + bx_1^0 s + x_2^0, \quad \text{avec } x_i = x_i^0 \text{ pour s = 0.} \\ x_3 = cs + x_3^0 \end{cases}$$

3. Calcule du champ de vitesse en représentation lagrangienne, en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.

pour calculer l'expression lagrangienne du champ de vitesse $\vec{v}(X_i t)$, on dérive l'expression lagrangienne du vecteur position $\vec{x}$ par rapport au temps:

$$\begin{cases} v_1 = at + X_1 \\ v_2 = \dfrac{ab}{2} t^2 + bX_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

4. Calcule l'accélération des points matériels en représentation eulérienne.

L'accélération $\vec{a}(x_i t)$ d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression eulérienne du champ de vitesse : $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}(x_i, t)}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{v}(x_i, t))\vec{v}(x_i, t)$

Comme $\vec{v} = \begin{pmatrix} at \\ bx_1 \\ c \end{pmatrix}$ donc on a: $\overline{\overline{grad}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On trouve $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{v})\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ abt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ abt \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = abt \\ a_3 = 0 \end{cases}$

5. Calcule l'accélération des points matériels en représentation lagrangienne.

L'accélération $\vec{a}(X_i t)$ d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression lagrangienne du champ de vitesse , on trouve directement

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = abt \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Comparaison des solutions obtenues en partant des résultats trouvés en 4 et 5.

Les résultats obtenus à partir des 2 représentations du champ d' accélération sont équivalents.

**Remarque:** de plus dans ce cas-ci l'expression de l'accélération ne dépend pas des coordonnées, c'est pourquoi on obtient exactement les mêmes expressions.

**Exercice5:**

On considère un mouvement défini dans la base $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne ($\omega$ est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1\cos(\omega t) - X_2\sin(\omega t) \\ x_2 = X_1\sin(\omega t) + X_2\cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calcul du tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, du tenseur des dilatations $\overline{\overline{C}}$, et du tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point $X$ et à l'instant $t$.

Le terme général de la matrice du tenseur gradient dans la base $B$ est $F_{ij}=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donc on a

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

Pour le tenseur des dilatations, on a $C_{ij}=F_{pi}F_{pj}$ en notation d'Einstein, donc :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t) & \cos(\omega t).\sin(\omega t)-\cos(\omega t).\sin(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t).\sin(\omega t)-\cos(\omega t).\sin(\omega t) & \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B = \overline{\overline{I}}$$

Enfin, on sait que $\overline{\overline{E}}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{C}}-I\right)$ et on a donc $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{0}}$

2. Le tenseur des déformations est nul, on est donc en présence d'un mouvement rigidifiant.

3. Pour un instant $t$ donné, calcule de la dilatation en un point $X$ et dans une direction $\overrightarrow{dX}$

Puisque $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{I}}$, on peut dire que toute direction est direction principale. La dilatation dans une direction quelconque $\overrightarrow{dX}$ vaut donc $\lambda(\overrightarrow{dX})=\sqrt{C_{ii}}=1$

4. Pour un instant $t$ donné, calcule du glissement en un point $X$ et pour deux directions orthogonales $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$.

Pour la même raison, le glissement entre deux directions orthogonales quelconques $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$ vaut:

$$\gamma(\overrightarrow{dX},\overrightarrow{dX'})=\frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}=0$$

5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène $\rho_0$ à l'instant $t_0=0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant $t$.

Le jacobien de la transformation est le déterminant de $\overline{\overline{F}}$. On a donc :

$$J=\det(\overline{\overline{F}})=\begin{vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)=1$$

Par conséquent la masse volumique du milieu est constante dans le temps et en tout point.

6. Calcule du champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et du champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées lagrangiennes.

6. Le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$, s'obtient par dérivation matérielle du champ de vecteurs exprimant les positions actuelles des particules : $\vec{V}(X,t) = \dfrac{\partial \vec{x}(X,t)}{\partial t}$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = \omega\left(-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)\right) \\ V_2 = \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = \omega\left(X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t)\right) \\ V_3 = \dfrac{\partial x_3}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

De même, le champ d'accélération s'obtient par $\vec{a}(X,t) = \dfrac{\partial \vec{V}(X,t)}{\partial t}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = \omega^2\left(-X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)\right) \\ a_2 = \dfrac{\partial V_2}{\partial t} = \omega^2\left(-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)\right) \\ a_3 = \dfrac{\partial V_3}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Ces champs s'expriment en fonction de $\vec{X}$, et sont donc bien en coordonnées lagrangiennes.

7. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées eulériennes.

D'après l'énoncé, les coordonnées actuelles s'obtiennent à partir des coordonnées initiales par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

On isole en particulier les deux premières équations de ce système:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

On cherche à inverser ce système pour exprimer $\vec{X}$ en fonction de $\vec{x}$. On utilise la formule d'inversion d'une matrice 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donc:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}^T$$

Cette matrice est orthogonale, car son inverse est égale à sa transposée. Elle traduit donc une rotation. On en déduit:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) \\ X_2 = -x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

Dans l'expression du champ de vitesse et du champ d'accélération calculés à la question précédente, on peut alors remplacer les coordonnées initiales $\vec{X}$ par leur expression en fonction des coordonnées actuelles $\vec{x}$. On obtient la formulation eulérienne suivante:

$$\begin{cases} V_1 = \omega\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\sin(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\cos(\omega t)\right) \\ V_2 = \omega\left((x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\cos(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\sin(\omega t)\right) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -\omega x_2 \\ V_2 = \omega x_1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \omega^2\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\cos(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\sin(\omega t)\right) \\ a_2 = \omega^2\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\sin(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\cos(\omega t)\right) \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\omega^2 x_1 \\ a_2 = \omega^2 x_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ce dernier résultat pouvait aussi s'obtenir en passant par la formule donnant directement l'accélération par $\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{V})\vec{V}$, avec $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ et: $\overline{\overline{grad}}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(B)}$

8. Calcule des tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(x,t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(x,t)$.

On calcule d'abord le tenseur gradient de vitesse $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{grad}}(\vec{V})$, avec la formule $(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}))_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$.

On remarque qu'il s'agit d'un gradient eulérien, donc les dérivations sont effectuées par rapport aux coordonnées actuelles

$$\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{grad}}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(B)}$$

Ce tenseur est antisymétrique, on peut donc directement écrire $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{L}}$. Ces résultats peuvent être retrouvés par le calcul avec les formules:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}} + \overline{\overline{L}}^T\right) \text{ et } \overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T\right)$$

**<u>Exercice</u>6:**

On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}_{(\vec{E_i})}$$

1. Calcule du vecteur déformation pure dans la direction $\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{E_1} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{E_3}\right)$. Conclusion?

$$\vec{v}_d = \overline{\overline{\varepsilon(M)}}\vec{a} = \frac{10^{-4}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{10^{-4}}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -8\sqrt{3} \end{pmatrix} = -4\times10^{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -4\times10^{-4}\,\vec{a}$$

2. Calcule des déformations principales et des directions principales de déformations.

Les déformations principales $\varepsilon$ sont les valeurs propres du tenseur de déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ donc on a:

$$\begin{vmatrix} 1-\varepsilon & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4-\varepsilon & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5-\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_3 - d_2\varepsilon + d_1\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = 0 ...(I) \text{ où } d_1 = tr(\varepsilon),\ d_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) \text{ et } d_3 = \det(\varepsilon)$$

$$d_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) - (\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{31} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{32}) = (-21-43)10^{-8} = -64\times10^{-8}$$

$$d_3 = \det(\varepsilon) = \left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - (-2\sqrt{3})\begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 2 \\ -3\sqrt{3} & -5 \end{vmatrix} + (-3\sqrt{3})\begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 4 \\ -3\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}\right)10^{-4} = (-24+96-72)10^{-4} = 0$$

$$(I) \Leftrightarrow \varepsilon^3 - d_1\varepsilon^2 + d_2\varepsilon - d_3 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 - 64\times10^{-8}\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = 8\times10^{-4},\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = -8\times10^{-4}\ (\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3)$$

3. Représentation sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformations pure $D_k$ en $M$ dans les directions $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$.

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_1}) = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\overrightarrow{E_1} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_2}) = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\overrightarrow{E_2} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10^{-4}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_3}) = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\overrightarrow{E_3} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 10^{-4}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Chacun de ces vecteurs peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle, afin d'être représentés dans le plan de Mohr. Par exemple, pour le vecteur déformation pure en $M$ dans la direction $\overrightarrow{E_1}$, on peut écrire:

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_1}) = D_{n1}\overrightarrow{E_1} + D_{t1}\overrightarrow{T_1}$$

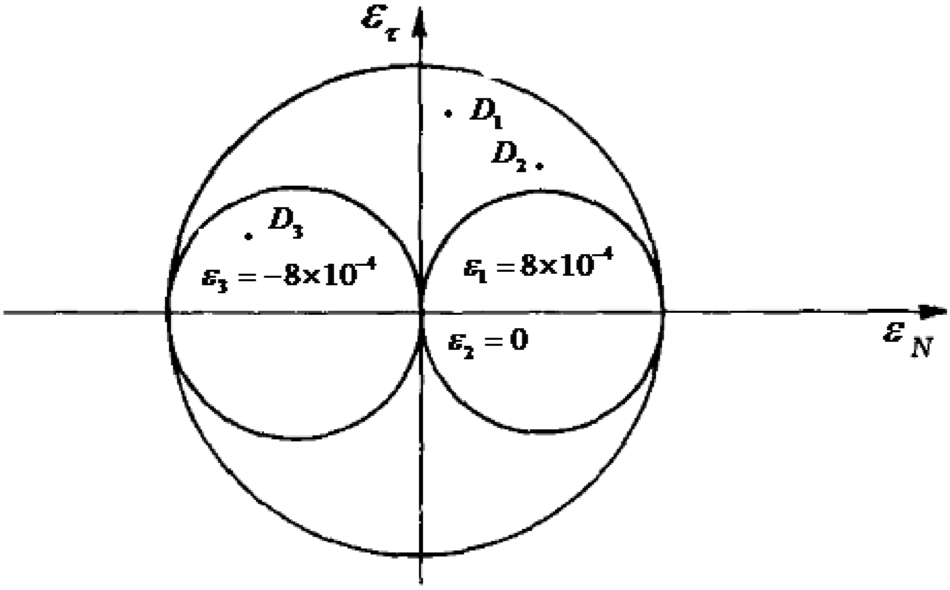
Dans cette équation très générale, $\overrightarrow{T_1}$ est un vecteur unitaire appartenant au plan $YOZ$, et $D_{n1}$ et $D_{t1}$ sont respectivement la composante normale et la composante tangentielle du vecteur contrainte. On a

$$D_{n1} = \vec{D}(\overrightarrow{E_1}).\overrightarrow{E_1} = 10^{-4} \text{ et } D_{t1} = \sqrt{\|\vec{D}(\overrightarrow{E_1})\|^2 - D_{n1}^2} = \sqrt{40\times10^{-8} - 10^{-8}} = \sqrt{39}10^{-4} \Rightarrow \vec{D}(\overrightarrow{E_1}) = 10^{-4}\overrightarrow{E_1} + \sqrt{39}10^{-4}\overrightarrow{T_1}$$

En appliquant la même opération à $\vec{D}(\overrightarrow{E_2})$ et $\vec{D}(\overrightarrow{E_3})$, on trouve

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_2}) = D_{n2}\overrightarrow{E_2} + D_{t2}\overrightarrow{T_2} = 4\times10^{-4}\overrightarrow{E_2} + 4\times10^{-4}\overrightarrow{T_2} \quad \text{et} \quad \vec{D}(\overrightarrow{E_3}) = D_{n3}\overrightarrow{E_3} + D_{t3}\overrightarrow{T_3} = -5\times10^{-4}\overrightarrow{E_3} + \sqrt{6}\times10^{-4}\overrightarrow{T_3}$$

Avec ces résultats, on peut tout à fait placer sur le plan de Mohr les points correspondant à chacun de ces trois vecteurs contraintes. Il s'agira des points de $(D_{n1}, D_{t1})$, $(D_{n2}, D_{t2})$ et $(D_{n3}, D_{t3})$ où $(D_{n1}, D_{t1}) \simeq 10^{-4}(1, 6.25)$, $(D_{n2}, D_{t2}) = 10^{-4}(4.4)$ et $(D_{n3}, D_{t3}) \simeq 10^{-4}(-5, 2.45)$




4. Le tenseur déviateur des déformations est donné par $\overline{\overline{D}}_{\varepsilon} = \overline{\overline{\varepsilon}} - \frac{tr(\overline{\overline{\varepsilon}})}{3}\overline{\overline{I}}_3$ et comme $tr(\varepsilon) = 0$

donc $\overline{\overline{D}}_{\varepsilon} = \overline{\overline{\varepsilon}}$

**<u>Exercice</u>7:**

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par:

$u_1 = x_2 x_3$, $u_2 = x_1 x_3$, $u_3 = x_1 x_2$

1. Détermination du tenseur de déformations au point $M(x_1, x_2, x_3)$ .

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \ \ \varepsilon_{12}\frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}(x_3 + x_3) = x_3 \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \ \ \varepsilon_{13}\frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(x_2 + x_2) = x_2 \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \ \ \varepsilon_{23}\frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = x_1 \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On considère les points $D_0(1,-1,0)$ et $C_0(1,1,0)$, détermination de la dilatation en $D_0$ dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{D_0C_0}$ .

La dilatation est donnée par l'expression suivante $\lambda(D_0, \vec{q}) = q^T \overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) q + 1$ où $\vec{q} = \frac{\overrightarrow{D_0C_0}}{\| \overrightarrow{D_0C_0} \|} \Rightarrow \vec{q} = \vec{e}_2$

$$\lambda(D_0, \vec{q}) = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

3. Détermination des déformations et des directions principales des déformations au point $D_0$.

On a $\overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Les déformations $\varepsilon$ sont les valeurs propres du tenseur de déformations $\overset{=}{\varepsilon}$ donc on a:

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & -\varepsilon & 1 \\ -1 & 1 & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\varepsilon(-\varepsilon^2 - 1) - 1(-\varepsilon) = 0 \Rightarrow -\varepsilon(\varepsilon^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \sqrt{2} \\ \varepsilon_2 = 0 \qquad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3) \\ \varepsilon_3 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Soit $u_i^{(k)}$ où $k \in \{1,2,3\}$ les composantes de l'unité normale dans la direction principale associée à $\varepsilon_k$

$\overset{=}{\varepsilon} u^{(k)} = \varepsilon_k u^{(k)} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} u_i^{(k)} = \varepsilon_k u_j^{(k)}$.....(1)

Pour $\varepsilon_1 = 1$ et d'après (1) on trouve

$$\varepsilon_{ij} u_i^{(1)} = \varepsilon_k u_j^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_3^{(1)} = \sqrt{2} u_1^{(1)} \\ u_3^{(1)} = \sqrt{2} u_2^{(1)} \\ -u_1^{(1)} + u_2^{(1)} = \sqrt{2} u_3^{(1)} \end{cases} \Rightarrow (u_1^{(1)} = -u_2^{(1)}) \wedge (u_3^{(1)} = -\sqrt{2} u_1^{(1)})$$

et comme $\| u^{(1)} \|^2 = u_i^{(1)} u_i^{(1)} = 1$ on a $u_1^{(1)} = \pm \frac{1}{2}, u_2^{(1)} = \mp \frac{1}{2}, u_3^{(1)} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour $\varepsilon_2 = 0$ et d'après (1) on trouve $u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_3^{(2)} = 0$

Pour $\varepsilon_3 = -\sqrt{2}$ et d'après (1) on trouve $u_1^{(3)} = \pm \frac{1}{2}, u_2^{(3)} = \mp \frac{1}{2}, u_3^{(3)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

On choisit le repère principale $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

on trouve

$$\left[\varepsilon_{ij}(D_0)\right]_B = B^T \varepsilon_{ij}(D_0) B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. On suppose que le milieu est continu et élastique, détermination dans le repère principale du tenseur des contraintes en $D_0$.

Pour le milieu continu élastique, le tenseur des contraintes est donné par:

$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ où $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \sqrt{2} + 0 - \sqrt{2} = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2\mu\varepsilon_1 = 2\sqrt{2}\mu \\ \sigma_2 = 2\mu\varepsilon_2 = 0 \\ \sigma_3 = 2\mu\varepsilon_3 = -2\sqrt{2}\mu \end{cases} \Rightarrow \overset{=}{\sigma}(D_0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2}\mu \end{pmatrix}$$

**Intitulé de la matière : Modélisation**

**Crédits : 3 Coefficients :2**

**Objectifs de l'enseignement**

C'est de familiariser les étudiants avec les outils Mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes physiques, biologiques, écologiques….

**Connaissances préalables recommandées :** Calcul différentiel et intégral, théorie du champ, algèbre multilinéaire

**Contenu du module** : Mécanique des Milieux Continus Déformables

Première partie : Notions fondamentales de la Mécanique des Milieux Continus Déformables.

Chapitre 1 : Description analytiques d'un système en mouvement.

1. Description Lagrangienne.
2. Description Eulérienne.

Chapitre 2 : Tenseurs. Tenseur des contraintes.

Chapitre 3 : Lois de conservations

1. Conservation de la masse.
2. Conservation de la quantité de mouvement.

Chapitre 4 : Déformation. Vitesse de déformation.

1. Tenseur des déformations
2. Détermination des champs de déplacement ou de vitesse.

Chapitre 5 : Lois de comportements.

Deuxième partie : Applications

1. à la théorie d'élasticité.
2. à la mécaniques des fluides.

**Références:**

1. Thual, Olivier Introduction à la mécanique des milieux continusdéformables Cépadués editions.1997.

2 . Mandel, Jean Introduction à la mécanique des milieux continus déformables Editions scientifiques de Pologne .1974.

**Mode d'évaluation** : Examen final (coeff.2)+ note de travail personnel (coeff. 1)