الفصل الأوّل:

الحساب التكاملي

I . تكامل ريمان على مجال مغلق ومحدود:

1 . تعريف التقسيم: ليكن $a<b$ عددين حقيقيين:

المجموعة المنتهية و المرتبة: $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ حيث : $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ **تسمّى تقسيما** من الرتبة n للمجال $[a,b]$ و العدد الموجب تماما $\delta(d)=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ هو **خطوة التقسيم** d .

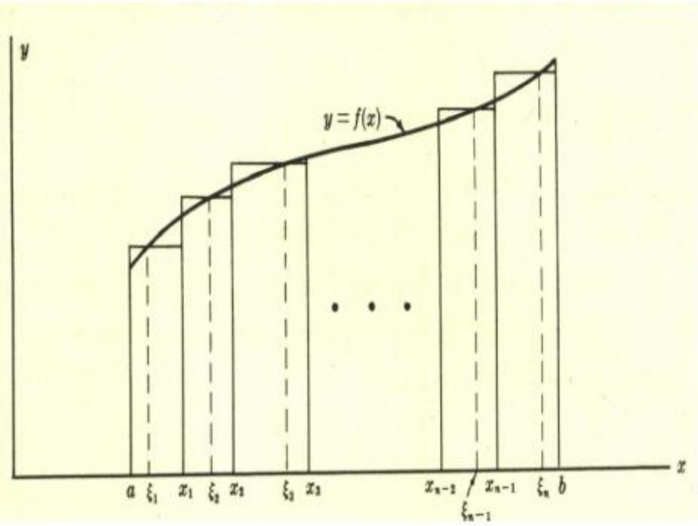
المجموعة $d=\left\{x_0=a,a+\dfrac{b-a}{n},...,x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}...,x_n=b\right\}$ تسمّى **تقسيما منتظما** من الرتبة n خطوته $h=\dfrac{b-a}{n}$.

أمثلة: المجموعة $d_1=\left\{0,\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},1\right\}$ هي تقسيما من الرتبة الخامسة للمجال $[0,1]$ خطوته $\delta(d_1)=\max\limits_{1\le k\le 5}(x_k-x_{k-1})=\dfrac{1}{2}$.

المجموعة $d_1=\left\{0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},1\right\}$ هي تقسيما منتظما من الرتبة الرابعة للمجال $[0,1]$ خطوته $h=\dfrac{1}{4}$.

2 . قابلية المكاملة لدالة حسب ريمان:

لتكن f دالة عددية موجبة معرفة على مجال $[a,b]$ ، و ليكن $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ تقسيماً من الرتبة n لهذا المجال، z_k عدد كيفي من $[x_{k-1},x_k]$ حيث $1\le k\le n$ ونرمز بـ: S_n لمجموع مساحة المستطيلات التي طول كل واحد منها $f(z_k)$ وعرضه (x_k-x_{k-1}) أي $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}f(z_k)(x_k-x_{k-1})$.



تعريف: نقول أن الدالة f تقبل المكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ إذا كان للمجموع S_n نهاية منتهية عندما يؤول n إلى $+\infty$، نرمز لهذه النهاية بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha(\varepsilon) > 0 : \delta(d) = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha \Rightarrow |S_n - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

و نرمز لمجموعة الدوال القابلة بمفهوم ريمان على المجال $[a,b]$ بالرمز $\Re[a,b]$.

ملاحظة1 : يعمّ التعريف السابق إلى الدوال من إشارة كيفيّة.

ملاحظة2 : إذا كانت f قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على المجال $[a,b]$ فإنّ **قيمة التكامل لا تتعلّق بالتقسيم المُختار** و بالتالي سنستعمل دوماً **التقسيمات المنتظمة.**

حالة خاصة: إذا كان d تقسيما منتظما للمجال $[a,b]$ خطوته $h = \frac{b-a}{n}$ و $z_k = x_k$ فإن:

$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ يسمّى مجموع ريمان ويكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

فمثلا في الحالة: $a=0$، $b=1$ فإن: $h = \frac{1}{n}$ و $d = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ و يكون

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$$

مثال تطبيقي: لنحسب $\int_0^1 f(x)dx$ حيث: $f(x) = x$

لدينا $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$

وعلية:

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}.\frac{n(1+n)}{2} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة3 : إنّ المتغيّر الموجود داخل العبارة $\int_a^b f(x)dx$ لا يؤثر في قيمة التكامل أي أنّ:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=.......$$

نظرية: إذا كانت f دالة عددية مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فإن f تقبل المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

برهان: بما أن f دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فهي محدودة وتدرك حديها الأعلى والأسفل أي: $\exists m,M\in\mathbb{R},\ \forall x\in[a,b]: m\leq f(x)\leq M$ حيث

$$m=\inf_{a\leq x\leq b} f(x),\ M=\sup_{a\leq x\leq b} f(x)$$

ليكن $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ تقسيم من الرتبة n للمجال $[a,b]$ ، z_k عدد كيفي من $[x_{k-1},x_k]$ و $1\leq k\leq n$

لدينا $m\leq f(z_k)\leq M$ ومنه $m(x_k-x_{k-1})\leq f(z_k)(x_k-x_{k-1})\leq M(x_k-x_{k-1})$ ب

الجمع نجد:

$$m\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{k=n}f(z_k)(x_k-x_{k-1})\leq M\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-x_{k-1})$$

$$\Rightarrow m(b-a)\leq S_n\leq M(b-a)\Rightarrow m\leq\frac{S_n}{b-a}\leq M$$

f مستمرّة على $[a,b]$ حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه: $\exists c\in[a,b]: f(c)=\frac{S_n}{b-a}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

أي أنّ:

$$S_n=f(c)(b-a)$$

و بالمرور إلى النهاية عندما $n\to+\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=f(c)(b-a)$$

و علية $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)=\lim_{n\to+\infty}S_n$ أي أنّ الدالة f تقبل المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

ملاحظة هامّة: تعمّم النظريّة السّابقة إلى الدوال المستمرة بالتقطّع و الدوال الرتيبة على المجال $[a,b]$.

3 . خواص تكامل ريمان:

قضيّة: إذا كانت f و g دالتان تقبلان المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإنّ الدوال:

$f+g$ ، λf ، $|f|$ قابلة للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$. و لدينا:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad (2$$ خطّية التكامل

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (3 \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (4$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in [a,b] \quad (5$$ علاقة شال

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (6 \qquad\qquad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (7$$

الترتيب و التكامل

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (8$$

برهان: من التعريف $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ يمكن استنتاج كل براهين الخواص السابقة.

نظرية:(نظرية المتوسط): إذا كانت f دالة مستمرّة على $[a,b]$ و g قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على $[a,b]$ ، نفرض أنّ g لا تغير إشارتها على المجال $[a,b]$ فإنه يوجد $c \in [a,b]$ يحقق المساواة:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

برهان: 1) إذا كان $g(x)=0$ فإن المساواة محققة.

2) إذا كان $g(x) \neq 0$ و هذا يعني: $\forall x \in [a,b],\ g(x) > 0$ أو $\forall x \in [a,b],\ g(x) < 0$

لنفرض أنّ $g(x) > 0$ (و نناقش الحالة $g(x) < 0$ بنفس الطريقة)

f دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فهي محدودة و تدرك حديها الأعلى والأسفل

وبالتالي:

$\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)=m \le f(x)\le M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ ومنه $m\,g(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ بالمكاملة

نجد: $m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$ ومنه: $m\le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$

و بمأنّ f مستمرّة على $[a,b]$ فإنّه حسب نظرية القيم المتوسطة :

$$\exists c\in[a,b]: f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

و بالتالي : $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad \exists c\in[a,b],$

وهوالمطلوب.

حالة خاصة: إذا كانت و $g=1$ على $[a,b]$ فإنّ $f(c)$ **تسمى القيمة المتوسطة** للدّالة f على المجال $[a,b]$.

قضيّة: **(متابينات كوشي شوارتز– أولدر– مينكويسكي):**

إذا كانت f و g دالتين تقبلان المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ فإنّ:

1) $\left(\int_a^b fgdx=\right)^2 \le \int_a^b f^2dx\int_a^b g^2dx$ (متابينة كوشي شوارتز)

من أجل كل $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ حيث: $p,q>1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ لدينا:

2) $\int_a^b |fg|dx \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$ (متابينة هولدر)

من أجل كل $p\ge 1$ لدينا:

3) $\left[\int_a^b (|f|^p+|g|^p)dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |fg|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ (متابينة مينكاوسكي)

البرهان: للبحث.

II. الدالة الأصلية لدالة :

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ نقول أن F دالة أصلية للدالة f على I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وتحقق: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

ملاحظة: إيجاد الدالة الأصلية يعني العملية العكسية لحساب الدالة المشتقة.

أمثلة:

1- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ أصلية للدالة $f(x) = x^2$ على $\mathbb{R}$.

2- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ أصلية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على $\mathbb{R}_+$.

3- الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $F(x) = \ln(x)$ أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$.

4- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = \arctan(x)$ أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ على $\mathbb{R}$.

نتيجة: إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإنه من أجل $c \in \mathbb{R}$ الدالة المعرّفة بالشكل $G = F + c$ هي كذلك دالة أصلية لـ f على I . (أي أنّ الدوال الأصليّة لنفس الدّالة تختلف بثابت) .

نرمز لمجموعة كل الدوال الأصلية للدالة f بالرمز $\int f(x)dx$ أي أن $\int f(x)dx = F(x) + c$

ونسمي $\int f(x)dx$ التكامل غير المحدد أو الدوال الأصلية لـ f .

ملاحظة: يجب التفريق بين التكامل غير المحدد للدّالة f $\int f(x)dx$ الذي يمثل **الدّوال الأصلية للدّالة** f على مجال بينما التكامل المحدد أو تكامل ريمان للدّالة f على المجال $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ **هو عدد حقيقي**.

قضيّة: لتكن F أصلية لـ f على المجال I، من أجل $x_0 \in I$ و من أجل $y_0 \in \mathbb{R}$ توجد دالة أصليّة وحيدة G لـ f على المجال I تحقق الشرط $G(x_0) = y_0$ (أي منحنى G يمر من النقطة (x_0, y_0)).

برهان:

لتكن G أصلية لـ f على المجال I معناة أنّه $\forall x \in I \quad G(x)=F(x)+c$

الشرط $G(x_0)=y_0$ يعني أنّ $c=y_0-F(x_0)$

و بالتالي الدالة $G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$ تحقق المطلوب.

مثال: عيّن الدالة الأصلية لـ $f(x)=\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ و التي تمر من النقطة $(e,2)$

الدالة $F(x)=\ln(x)$ أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$ و بالتالي كل الدوال الأصلية لـ f من الشكل $G(x)=\ln(x)+c$

$2=G(e)=\ln(e)+c$ معناه أنّ $c=1$ و عليه الدالة المطلوبة هي: $G(x)=\ln(x)+1$.

خواص الخطيّة للدّوال الأصليّة: لتكن الدالتين f,g تقبلان دوالا أصلية على مجال I، و ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$, عندئذ $f+g$ و λf تقبلان دوالا أصلية على I و لدينا:

1. $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.
2. $\int \lambda f(x)dx=\lambda \int f(x)dx$.

برهان:

1. لتكن F و G أصليتين لـ f و g على الترتيب على المجال I

بمأنّ $(F+G)'=F'+G'=f+g$ أي أنّ $F+G$ أصليّة لـ $f+g$ و عليه

$$\int (f(x)+g(x))dx=F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

2. من أجل F أصلية لـ f على I و من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$

الدالة λF أصليّة لـ λf على I و بالتالي:

$\int \lambda f(x)dx=\lambda F(x)=\lambda \int f(x)dx$.

نظرية: لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على $[a,b]$ و ليكن x_0 عدد حقيقي من $[a,b]$.

الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي: $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ هي دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$.

برهان:

يكفي أن نبرهن حسب التعريف أن: F تقبل الاشتقاق على $[a,b]$ وتحقق:

$$\forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x)$$

من أجل $x \in [a,b]$ لدينا:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ وبالتالي محدودة على هذا المجال كذلك الدالة $g: t \mapsto 1$ مستمرة و لا تغير اشارتها على المجال $[a,b]$ حسب **نظرية المتوسط** يوجد $c \in [x, x+h]$ بحيث:

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h} f(c)\int_{x}^{x+h} 1.dt = \frac{1}{h} f(c).h = f(c)$$

و بالمرور إلى النهاية لما $h \to 0$ فإن $c \to x$ و من كون f مستمرة على $[a,b]$ نجد:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

أي أنّ F أصليّة لـ f على $[a,b]$.

نتيجة: لتكن $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $[a,b]$

من أجل كل F دالة أصلية كيفية للدالة f على $[a,b]$ فإنه لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ ونكتب: $$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

برهان: لتكن F أصلية لـ f على $[a,b]$

حسب النظرّية السابقة لدينا $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ أصلية لـ f على $[a,b]$ و تحقق $G(a) = 0$

و عليه $G(x) = F(x) + c$ بأخذ القيمة $x = a$ نجد $c = -F(a)$

أي أنّ: $G(x) = F(x) - F(a)$ ومن تعريف الدالة G و أخذ $x = x_0$

نجد $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a)$ و هو المطلوب.

مثال1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

ملاحظة: النتيجة السابقة تُعطي طريقة لحساب التكامل المحدد (تكامل ريمان) باستعمال الدوال الأصلية.

تطبيق:

لنحسب $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ باستعمال تعريف التكامل ريمان

أي كتابة النهاية على الشكل $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ ثم نساوي النهاية بالتكامل $\int_a^b f(x)dx$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$$

نلاحظ أنّ: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ و $x_k=\frac{k}{n}$ و بالتالي $a=0$ و بما أنّ $b-a=1$ فإنّ: $b=1$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

3. الدالة الأصلية لبعض الدّوال المألوفة

$(a\in\mathbb{R})\qquad \int adx=ax+c$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+c$
$(a\neq 0)\qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c$	$(m\neq -1)\ \int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+c$
$\int\sin xdx=-\cos x+c$	$\int\cos xdx=\sin x+c$
$(a\neq 0)\ \int\sin axdx=-\frac{1}{a}\cos ax+c$	$\int\cos axdx=\frac{1}{a}\sin ax+c$
$\int(1+\tan^2 x)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+c$
$\int shxdx=chx+c$	$\int chxdx=shx+c$
$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+c$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+c$
$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+c$	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+h}\right\rvert+c$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$
$\int\frac{dx}{ch^2x}=thx+c$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln\lvert u(x)\rvert + c$	$\int \frac{u'(x)dx}{u^n(x)} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + c \quad n \neq 1$
$\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + c$	$\int \frac{u'(x)dx}{\sqrt{u(x)}} = 2\sqrt{u(x)} + c$
$\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + c$	$\int \ln x dx = -x + x\ln x + c$

ملاحظة: يجب مراعاه مجالات وجود الدوال الأصلية في الجدول السابق.

4. طرق حساب التكامل:

عند حساب $\int_a^b f(x)dx$ أو $\int f(x)dx$ فإننا نفكر أولا في استعمال الجدول السابق

فإذا استطعنا إيجاد دالة F أصلية **بشكل مباشر** لـ f فعندئذ يكون لدينا: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ أو

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

أمّا إذا لم نستطع فعل ذلك فإننا نلجأ إلى حساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ أو $\int f(x)dx$ بإحدى الطرق **الغير مباشره** التالية:

1.4 تبديل المتغير:

نظرية: إذا كانت $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و $g:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ دالة من الصنف C^1 على المجال $[\alpha,\beta]$:

عندئذ الدالة $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ قابلة للمكاملة على $[\alpha,\beta]$ و لدينا:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$$

بالنسبة للتكامل غير المحدد لدينا: $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

أي أننا وضعنا $x = g(t)$ **و بالتالي** $dx = g'(t)dt$.

برهان: بما أن الدالة $(f \circ g)g'$ مستمرة فهي تقبل دوالا أصليّة و لتكن F دالة أصلية للدالة f إذا:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g).g' = (f \circ g).g'$$

أي $F \circ g$ دالة أصلية للدالة $(f \circ g)g'$ و بالتالي:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)g'dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(b)} f(x)dx$$

مثال1: لنحسب $I = \int_1^e \frac{1}{t}\ln^2 t\, dt$ نضع $x = \ln t$ إذا $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ وبالتالي: $dx = \frac{dt}{t}$

و لدينا الحدود الجديدة للتكامل: $t=1\Rightarrow x=\ln 1=0$ و $t=e\Rightarrow x=\ln e=1$

وعليه $I=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

مثال2: لنحسب $J=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ بوضع $x=at$ لنجد $dx=adt$

وبالتالي $J=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{adt}{a^2+a^2t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\arctan(t)+c$

بالرجوع إلى المتغيّر الأول نجد:

$$J=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

ملاحظة هامّة: زيادة على شروط النظريّة السابقة إذا كانت الدالة g تقابلية على $[\alpha,\beta]$ فيمكن وضع $t=g^{-1}(x)$ و بالتّالي يمكن الانتقال من الطّرف الثاني إلى الأوّل.

مثال: لحساب $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ نضع $x=\sin t$ فإنّ $dx=\cos t dt$ و $t=\arcsin x$ وبالتّالي:

$$I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)}\sqrt{1-(\sin t)^2}\,\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

2.4 التكامل بالتّجزئة:

نظرية: إذا كانت u و v دالتين من الصنف C^1 على $[a,b]$ عندئذٍ لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[uv(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

حيث: $\left[uv(x)\right]_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$

و يُعطى الدستور في حالة التكامل غير المحدّد بـ:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

برهان: من كون uv دالة أصلية للدالة $(uv)'$ ينتج:

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [uv(x)]_a^b \qquad (*)$$

و بمأنّ $(uv)' = u'v + uv'$ و حسب خطيّة التكامل لدينا من جهة أخرى:

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$$
$$= \int_a^b u'(x)g(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ ينتج المطلوب:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال: لنحسب $I = \int_0^1 \arcsin x dx$ نضع: $v'(x) = 1 \,, u(x) = \arcsin x$ وبالتالي

$$v(x) = x \ , u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = \int_0^1 \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \frac{\pi}{2} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

3.4 حساب تكامل من الشكل: $I = \int \cos^p x \,, \sin^q dx$ حيث: $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ حساب

التكامل I يتم حسب الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان p فرديا $(p-1=2n)$ نضع: $t = \sin x$ نجد:

$$I = \int \cos^{p-1} x \,, \sin^q x \cos x dx = \int t^q (1-t^2)^n dt$$

وبهذا نكون قد حوّلنا التكامل I إلى مكاملة دالة كثير حدود للمتغير t.

الحالة الثانية: إذا كان q فرديا $(q-1=2m)$ نضع: $t = \cos x$ نجد:

$$I = -\int \cos^p x \,, \sin^{q-1} x (-\sin x)dx = -\int t^p (1-t^2)^m dt$$

وبهذا نكون قد حوّلنا التكامل I إلى مكاملة دالة كثير حدود للمتغير t.

الحالة الثالثة: إذا كان p, q زوجيين فإنّنا نستخدم عبارتي Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ، $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ و **دستور ثنائي الحدّ** لتتحوّل العبارة المُراد حساب تكاملها إلى عبارة خطيّة و بالتالي هي مجموع تكاملات مباشرة (من الشكل $\cos ax$ أو $\sin ax$).

مثال:

لحساب $I=\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ نستخدم العبارات التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix}-e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6)$$ بعد الحساب نجد:

$$\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{64}\left[(e^{6ix}+e^{-6ix})-2(e^{4ix}+e^{-4ix})-(e^{2ix}-e^{-2ix})+4\right]$$

$$= \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$$

و بالتالي:

$$I = \int \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)dx$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right) + c$$

4.4 دراسة التكامل من الشكل: $\int \mathrm{ch}^p x, \mathrm{sh}^q dx$ تتم بنفس طريقة التكامل

$\int \cos^p x, \sin^q x dx$ حيث $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ فنضع:

$t=\mathrm{sh}\, x$ أو $t=\mathrm{ch}\, x$ إذا كان أحد العددين p أو q فردي.

و في حالة p, q زوجيان و موجبان فإنّنا نستخدم العبارات: $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x+1}{2}$ ، $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x-1}{2}$ و $\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{sh} 2x}{2}$

لتحوّل العبارة المراد حساب تكاملها إلى **عبارة خطيّة.**

5.4 طريقة حساب تكامل دالة ناطقة:

تعريف: – **نسمي كسرًا ناطقًا بسيطا من النمط الأول كل كسر من الشكل :** $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ **حيث**

$A,\alpha \in \mathbb{R}$ **و** $k \in \mathbb{N}^*$ **.**

– **نسمي كسرًا ناطقًا بسيطا من النمط الثاني كل كسر من الشكل:** $\frac{px+q}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}$

a,b,c,p,q **ثوابت حقيقيّة و** $m \in \mathbb{N}^*$

و $b^2-4ac<0$ **(أي مميّز العبارة** ax^2+bx+c **سالب تماما) .**

1 . حالة $I=\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ حيث a,b,c,p,q ثوابت حقيقيّة و $a \neq 0$ ، **نميّز ثلاث حالات**

- أولا: إذا كان $\Delta=b^2-4ac>0$ و بالتّالي العبارة ax^2+bx+c تقبل جذرين مختلفين x_1,x_2 و تحلل على الشكل $a(x-x_1)(x-x_2)$ في هذه الحالة نبحث على العددين الحقيقيّن A,B حيث :

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{px+q}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}$$ و بالتالي فإنّ I مجموع تكاملين بسيطين مباشرين

$$I=\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\left(\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}\right)dx=A.\ln|x-x_1|+B.\ln|x-x_2|+c$$

مثال: لحساب $I=\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}dx$ لدينا $\Delta=9$ و $x_1=-2, x_2=1$ وبالتالي

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

لنبحث على A,B حيث: $\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}$............(*)

من أجل $x \neq -2$ نضرب طرفي (*) في $(x+2)$ نجد: $\frac{2x+3}{(x-1)}=A+\frac{(x+2)B}{(x-1)}$ بحساب نهاية الطرفين عندما $x \to -2$

فنجد $A=\frac{1}{3}$ ، بنفس الطريقة نجد $B=\frac{5}{3}$ و بالتالي:

$$I=\int\frac{2x+3}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3(x+2)}+\frac{5}{3(x-1)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+c$$

- ثانيا : إذاكان $\underline{\Delta=0}$ العبارة ax^2+bx+c تقبل جذراً مضعفاً x_0 و تحلل على الشكل $a(x-x_0)^2$

في هذه الحالة نبحث على العددين الحقيقيّين A,B حيث :

$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{px+q}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^2}$ و بالتالي فإنّ :

$$I=\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\left(\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^2}\right)dx=A.\ln|x-x_0|-\frac{B}{(x-x_0)}+c$$

مثال: لحساب $I=\int\frac{x+1}{x^2-2x+1}dx$ لدينا $x^2-2x+1=(x-1)^2$

نحسب العددين A,B حيث

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}............(**)$$

من أجل $x\neq1$ نضرب طرفي $(**)$ في $(x-1)^2$ فنجد $x+1=A(x-1)+B$ بأخذ نهاية الطرفين

عندما $x\to1$ و منه $B=2$

بالتعويض عن قيمة B و أخذ قيمة $x=2$ في $(**)$ نجد : $3=A+2$ أي أنّ

$A=1$ و بالتالي

$$I=\int\frac{x+1}{x^2-2x+1}dx=\int\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=\ln|x-1|-\frac{2}{(x-1)^2}+c$$

- ثالثا إذا كان: $\underline{\Delta=b^2-4ac<0}$ نكتب العبارة ax^2+bx+c على الشكل النموذجي:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{و نضع} \quad t=x+\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad k^2=\frac{-\Delta}{4a^2}$$

$$I=\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)-\frac{pb}{2a}+q}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\underbrace{\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{I_1}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$$

I_1 هو تكامل مباشر $\quad I_1=\ln\left|ax^2+bx+c\right|$

و لحساب I_2 نستعمل الشكل النموذجي و تغيير المتّغيّر السابق فينتج

$$I_2=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{1}{ak}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}}\right)$$

و منه:

$$I=\frac{p}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\frac{1}{ak}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}}\right)+c$$

مثال : لحساب التكامل $I=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ لدينا $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ و بالتّالي:

$$t=x+\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad k=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بعد حساب بسيط نجد $\quad I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

2. الحالة العامّة:

تعريف: نسمي كسر ناطق **نظامي** كل كسر ناطق درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه.

لحساب تكامل من الشكل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود فإننا نتّبع

الخطوات التالية:

أولاً: إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر أو تساوي من درجة $g(x)$ ، نجري القسمة الاقليدية العاديّة لـ

$f(x)$ على $g(x)$ فنجد:

$\frac{f(x)}{g(x)}=E(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$ حيث $E(x)$ هو كثير حدود و هو يمثّل حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$ و $R(x)$ باقي القسمة و هو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة $g(x)$ أي أنّ: $\frac{R(x)}{g(x)}$ كسر ناطق نظامي.

السؤال المطروح كيف نفكك الكسر النظامي $\frac{R(x)}{g(x)}$ إلى مجموع كسور بسيطة من النمط الأول و (أو) النمط الثاني.

ثانيا: نحلّل المقام $g(x)$ إلى جداء قوى لعوامل من الدرجة الأولى من الشكل $(x-\alpha)^n$ و (أو) جداء قوى لعوامل من الدرجة الثانية بمميّز سالب تماماً من الشكل $(ax^2+bx+c)^m$ حيث $n,m\in\mathbb{N}^*$.

- كل حدّ في $g(x)$ من الشكل $(x-\alpha)^n$ يُعطي مجموع n كسر بسيط من النمط الأول:

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$ حيث $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_n$ ثوابت حقيقيّة يُطلب حسابها.

- وكل حدّ في $g(x)$ من الشكل $(ax^2+bx+c)^m$ يُعطي مجموع m كسر بسيط من النمط الثاني:

$$\frac{p_1x+q_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{p_2x+q_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\cdots+\frac{p_mx+q_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$ حيث $p_1,p_2,\ldots\ldots,p_m$

$q_1,q_2,\ldots\ldots,q_m$ ثوابت حقيقيّة يُطلب حسابها.

حساب التكامل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ يؤول إلى مكاملة كثير الحدود $E(x)$ و الكسور البسيطة السابقة.

5 مكاملة الكسور البسيطة:

- **النمط الأول:** $I_n = \int \frac{A}{(x-\alpha)^n}dx$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} si \quad n=1 \quad I_1 = \int \frac{A}{(x-\alpha)}dx = A\ln|x-\alpha| \\ si \quad n \geq 2 \quad I_n = \int A(x-\alpha)^{-n}dx = \frac{A}{-n+1}(x-\alpha)^{-n+1} \end{cases}$$

- **النمط الثاني:** $J_m = \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx$ $\quad m \in \mathbb{N}^*$

سنهتم فقط بالحالة $m \geq 2$ لأنّ حالة $m=1$ عُولجت في الفقرة 1 من هذا الجزء . من أجل $m \geq 2$.

$(ax^2+bx+c)^m = a^m\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]^m$ و بوضع $t = x + \frac{b}{2a}$ و

$k^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}$ لدينا

$$J_m = \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx = \int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b) - \frac{pb}{2a} + q}{(ax^2+bx+c)^m}dx$$

$$= \frac{p}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}dx}_{I} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}}_{L}$$

I هو تكامل مباشر من الشكل $\int \frac{u'}{u^m}$ أي أنّ :

$$I = \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}dx = \frac{1}{(1-m)(ax^2+bx+c)^{m-1}}$$

و لحساب L نستعمل الشكل النموذجي و تغيير المتغيّر السابق ثمّ علاقة تراجعية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$L=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}=\int\frac{dx}{a^m\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]^m}=\frac{1}{a^m}\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^m}}_{I_m}=\frac{1}{a^s}\int(t^2+k^2)^{-m}dt$$

و لحساب I_m نستعمل المكاملة بالتجزئة نضع:

$$\begin{cases} v(t)=(t^2+k^2)^{-m}\Rightarrow v'(t)=-2mt(t^2+k^2)^{-m-1} \\ w'(t)=1\Rightarrow w(t)=t \end{cases}$$

و بالتّالي

$$\begin{aligned} I_m &=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{t^2}{(t^2+k^2)^{m+1}}dt \\ &=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{(t^2+k^2)-k^2}{(t^2+k^2)^{m+1}}dt \\ &=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^m}-2mk^2\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{m+1}} \\ &=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2mI_m-2mk^2I_{m+1} \end{aligned}$$

و أخيراً نجد العلاقة التراجعيّة المطلوبة:

$$\begin{cases} I_{m+1}=\dfrac{t}{2mk^2(t^2+k^2)^m}+\dfrac{(2m-1)}{2mk^2}I_m & m=1,2,3,........ \\ I_1=\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right) & k=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|} \end{cases}$$

مثال: لنحسب $I=\int\frac{x^2+x+3}{(x^2-1)(x^2+4)}dx$ شكل التفكيك هو:

$$\frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

بضرب الطرفين في $(x-1)^2$ وبعد التبسيط ثمّ التعويض بـ: $x=1$ نجد $B=1$

بضرب الطرفين في x^2+4 وبعد التبسيط ثمّ التعويض بـ: $x=2i$ نجد:

$$2Ci+D=\frac{2i-1}{-5}\Rightarrow C=-\frac{1}{5},D=\frac{1}{5}$$

بضرب الطرفين في x ثم نحسب نهاية الطرفين عند $+\infty$ نجد: $A+C=0\Rightarrow A=-C=\frac{1}{5}$

ومنة التفكيك المطلوب هو: $\frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-1}{5(x^2+4)}$

و بالتّالي:

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{x-1}{x^2+4}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{10}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}+\frac{1}{10}\int\frac{\frac{dx}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{10}\ln(x^2+4)+\frac{1}{10}\arctan\frac{x}{2}+const$$

6.4 . تكاملات حسابها يؤول إلى حساب تكامل دالة ناطقة:

ليكن R كسرًا ناطقًا لمتغير أو متغيرين أو عدة متغيرات.

1 . تكامل دالة كسرية من الشكل $R(\cos x,\sin x)$: لحساب التكامل $\int R(\cos x,\sin x)dx$ في

الحالة العامة يمكن اعتماد تبديل المتغير $t=\tan\frac{x}{2}$ لنجد $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

مثالين:

(1

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

(2

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}-\int\frac{-dt}{1-t}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$$

ملاحظة: تغيير المتغيّر السابق فعّال ولكن قد يؤدّي إلى حسابات معقّدة، لذا نستعرض القاعدة التالية.

حالة خاصة: قاعدة بيوش Bioche: بوضع $w(x)=R(\cos x,\sin x)$ و لحساب $\int R(\cos x,\sin x)dx=\int w(x)dx$ نميّز الحالات التالية:

♦ إذا كان: $w(-x)=-w(x)$ نضع: $t=\cos x$ ♦ إذا كان: $w(\pi-x)=-w(x)$ نضع: $t=\sin x$

♦ إذا كان: $w(\pi+x)=w(x)$ نضع: $t=\tan x$

مثال: لحساب $I=\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ نضع $t=\sin x$ لأن $w(\pi-x)=-w(x)$:

$$I=\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t+c=\arctan(\sin x)+c$$

2. تكامل دالة كسرية من الشكل $R(e^{px},e^{qx})$ حيث: $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ لحساب التكامل

$\int R(e^{px},e^{qx})dx$ يمكن اعتماد تبديل المتغير $t=e^x$ للحصول على تكامل دالة ناطقة للمتغير t .

مثال: لحساب $I=\int\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$ نضع $t=e^x$ ينتج: $I=\int\frac{dt}{(1+t)^2}=\frac{-1}{t+1}+c=\frac{-1}{e^x+1}+c$

3. تكامل دالة كسرية من الشكل $R(\text{ch}\,x,\text{sh}\,x)$: لحساب التكامل $\int R(\text{ch}\,x,\text{sh}\,x)dx$ و في الحالة العامة يمكن اعتماد تبديل المتغير $t=\text{th}\frac{x}{2}$ لنجد $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ ، $\text{sh}\,x=\frac{2t}{1-t^2}$ و

$$\text{ch}\,x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

مثال: لحساب $I=\int\frac{dx}{1-\text{sh}\,x}$ نضع $t=\text{th}\frac{x}{2}$ ينتج:

$$I=\int\frac{1-t^2}{1-t^2-2t}\cdot\frac{2dt}{1-t^2}=-\int\frac{2dt}{t^2+2t-1}=-2\int\frac{dt}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+c$$

ملاحظة:

يمكن استخدام المتغير $t=e^x$ لحساب $\int R(\text{ch}\,x,\text{sh}\,x)dx$ لكن يعد أكثر صعوبة من استخدام $t=\text{th}\frac{x}{2}$.

4 . حساب تكامل من الشكل: $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: حساب التكامل I يتم بطريقة أولر حسب الحالات التالية:

الحالة1: إذا كان $a>0$: نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(t+x)$

الحالة2: إذا كان x_1 جذرا للمعادلة $ax^2+bx+c=0$: نضع

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

مثال: لحساب $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ لاحظ أنّ : $-x^2+3x-2=(2-x)(x-1)$ نضع:

$$\sqrt{(2-x)(x-1)}=t(x-1)$$

ومنه $t(x-1)=\frac{t}{1+t^2}\ \wedge\ x=\frac{2+t^2}{1+t^2}\Leftrightarrow(2-x)(x-1)=t^2(x-1)^2$ كذلك

$$dx=\frac{2t(1+t^2)-2t(2+t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$$

بعد التعويض عن x ، dx و $t(x-1)=\sqrt{-x^2+3x-2}$ بدلالة t نجد:

$$I=\int\frac{1+t^2}{t}.\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\arctan(t)+c$$

$$=-2\arctan\frac{\sqrt{(2-x)(x-1)}}{x-1}+c=-2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+c$$

5 . حساب تكامل من الشكل $I=\int x^{\alpha}\left(ax^{\beta}+b\right)^{\gamma}dx$ حيث: α ، β ، γ أعداد ناطقة ، لحساب التكامل I نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان γ عددا صحيحا($\gamma\in\mathbb{Z}$) نضع: $x=t^n$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامي لعددين β,α .

الحالة الثانية: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}\in\mathbb{Z}$ نضع: $ax^{\beta}+b=t^p$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\in\mathbb{Z}$ نضع: $a+bx^{-\beta}=t^p$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

أمثلة:

1) لحساب $I=\int\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2dx$ لدينا

$$\gamma=2\,,\beta=\frac{1}{3},\alpha=\frac{1}{2}\quad ,I=\int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+1)^2dx$$

لدينا $\gamma=2\in\mathbb{Z}$ و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3 هو 6 و بالتالي نضع: $x=t^6$ ومنه

$$I=\int t^3\left(t^2+1\right)^2 6t^5\,dt=6\int\left(t^{12}+2t^{10}+t^8\right)dt=6\left(\frac{1}{13}t^{13}+\frac{2}{11}t^{11}+\frac{1}{9}t^9+c\right)$$

$$=6\left(\frac{1}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{2}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{1}{9}x^{\frac{9}{6}}+c\right)$$

2) لحساب $I=\int\sqrt[3]{x}\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ لدينا

$$\gamma=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{3},\alpha=\frac{1}{3}\quad ,I=\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{1/3+1}{1/3}=4\in\mathbb{Z}$ و لدينا مقام العدد γ هو $p=2$ بالتالي نضع: $x^{\frac{1}{3}}+1=t^2$ ومنه

نجد $x^{\frac{1}{3}}=t^2-1$ أي: $x=(t^2-1)^3$ ومنه: $dx=3(t^2-1)^2 2t\,dt=6t\,(t^2-1)^2dt$

$$I=\int t^3\left(t^2+1\right)^2 6t^5\,dt=6\int\left(t^{12}+2t^{10}+t^8\right)dt=6\left(\frac{1}{13}t^{13}+\frac{2}{11}t^{11}+\frac{1}{9}t^9+c\right)$$

$$=6\left(\frac{1}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{2}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{1}{9}x^{\frac{9}{6}}+c\right)$$