3.3 تطبيق نظرية كوشي الثانية

1.3.3 تكامل الدالة الأسية

أول تطبيق لنظرية كوشي الثانية يتعلق بدالة تحليلية على كل المستوي المركب.

$$f(z) = \exp(z)$$
$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{(\varphi)} \frac{e^{\xi}}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

- حيث (φ) مسار مغلق كيفي في المستوي المركب يحتوي النقطة z.
- إذا إعتبرنا (φ) دائرة مركزها z. يمكن كتابة ξ على الشكل التالي: $\xi = z + re^{i\theta}$

$$e^z = \frac{n!}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{z+re^{i\theta}}}{r^{n+1}\exp(i(n+1)\theta)}\,\mathrm{ir}\, e^{i\theta} d\theta$$
$$e^z = \frac{n!}{2\pi r^n} e^z \int_0^{2\pi} \exp(r\exp(i\theta) - ir\partial) d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r-in\theta} d\theta, \big(e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)\big)$$
$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r(\cos\theta + i\sin\theta) - in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta + i(\sin\theta - in\theta)} d\theta$$

$$\boxed{\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r(\cos\theta)} \cos(r\sin\theta - in\theta) d\theta}$$

2.3.3 الدوال المركبة من الشكل $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$

التطبيق الثاني لنظرية كوشي الثانية يتعلق بحساب التكاملات للدوال المركبة من الشكل: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\Psi(3)}$ ، $\varphi(z)$ و $\Psi(3)$ كثيري حدود.

حيث درجة كثير الحدود $\Psi(3)$ أكبر من درجة كثير الحدود $\varphi(z)$

والذي من خلاله يتحقق الشرط: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \to 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{(\varphi)}} \frac{\varphi(t)}{\Psi(t)(t-z)} dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varphi)} \frac{\varphi(t)}{\Psi(t)(t-z)} dt$$

وهنا استعملنا امتداد نظرية كوشي في مجال لانهائي وهو كالتالي:

3.3.3 امتداد نظرية كوشي الثانية في مجال لانهائي

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على مجال B والمكون من المجال الخارجي لمسار مغلق (φ) أيضا $f(z)$ تؤول الى الصفر غندما يؤول z الى المالانهاية أي: $\lim_{z\to\infty} f(z) \to 0$
في هذه الحالة نظرية كوشي الثانية تكون كالتالي:

$$f(z) = \int_{\underset{\leftarrow}{(\varphi)}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$