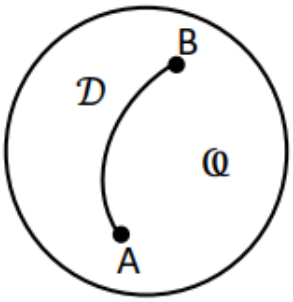
الفصل الثالث
تكامل الدوال المركبة

1.3 تعريف:

تعرف مجال $\mathcal{D}$ في المستوي المركب ودالة للمتغير المركب z وحيدة القيمة ومستمرة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ومنحنى كيفي (φ) ذو نهايتين A و B.

تكامل الدالة $f(z)$ بين النقطتين A و B على المسار (φ) يكتب بـ:



$$\int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} f(x)dz = \int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} (udx - vdy) + i\int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} (vdx + udy)$$

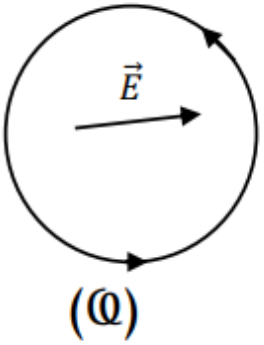
قبل التطرق الى نظرية التكامل نشير إلى ملاحظة في الكهرومغناطيسية والترموديناميك.

- نعلم أن الحقل الكهربائي هو اشتقاق لكمون سلبي

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}u(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$$

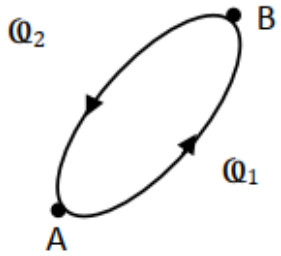
تكامل هذا الحقل على منحنى منغلق (φ) معدوم. يشرط ان يكون u قابلة للاشتقاق داخل وعلى حدود (φ).

$$\oint_{(\varphi)} \overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}} = 0 \quad \text{«Théorème de Stokes»}$$



$$\oint_{(\varphi)} \vec{E}(x,y)d\vec{M} = -\oint_{(@)} \vec{\nabla}u(x,y)\cdot d\vec{M} = -\oint_{(\mathbb{Q})} du(x,y) = 0$$

تقسم هذا المنحنى المغلق إلى مسارين (φ_1) و (φ_2).



$$\oint_{(\varphi)} du(x,y) = 0 = \int_{A(\varphi_1)}^{B(\varphi_1)} dy(x,y) + \int_{A(\varphi_2)}^{B(\varphi_2)} du(x,y).$$

$$\int_{A(\varphi_1)}^{B(\varphi_1)} du(x,y) = -\int_{B(\varphi_2)}^{A(\varphi_2)} du(x,y) = \int_{A(\varphi_2)}^{B(\varphi_2)} du(x,y)$$

هذا يعني أن التكامل

$$\int_A^B du = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{M} = -\int (E_x dx + E_y dy)$$

مستقل عن المسار المتبع.

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{-\partial u}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

إذن:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{-\partial^2 u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ومنه: $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$

وهو الشرط لكي يكون التكامل $\int_A^B du = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M}$

مستقل عن المسار المتبع $\int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} (udx - vdy)$

$$\int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} f(3)d_3 = \int_{A(@)}^{B(\varphi)} (udx - vdy) + i \int_{A(\varphi)}^{B(\varphi)} (vdx - udy)$$

مستقل عن المسار المتبع بشرط

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

والذين هما محققين من شرطي كوشي–ريمان.

2.3 نظرية كوشي

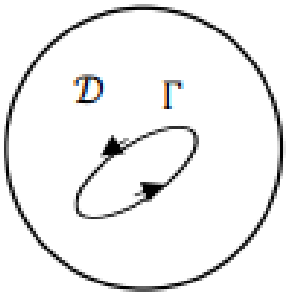
1.2.3 الصيغة الأولى

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة من المجال $\mathcal{D}$ التكاملات المأخوذة على مسارات تربط نقطتين Aو B من المجال $\mathcal{D}$ متساوية.

2.2.3 الصيغة الثانية

إذا كانت دالة تحليلية على مجال $\mathcal{D}$ « Simplement Connexe » و Γ منحنى مغلق داخل المجال فإن:

$$\oint_\Gamma f(3)d_3 = 0$$



نظرية كوشي الثانية

تسمح باستنتاج عبارة أساسية والتي تعبر عن قيمة الدالة $f(z)$ عند كل نقاط المجال $\mathcal{D}$ داخل $\mathcal{D}$ ليكن التابع تابعاً تحليليا في المجال $\mathcal{D}$ وليكن (φ) مسا اًر مغلقا مستقيماً في المجال $\mathcal{D}$ وليكن كذلك a عدداً مركباً في المجال المغلوق بالمسار (φ).

لنحسب التكامل التالي:

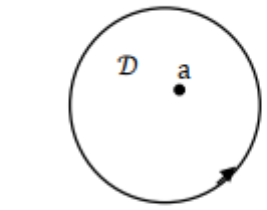
$$\oint_{\varphi} \frac{f(t)dt}{t \cdot a} \qquad \mathrm{t} \in \mathbb{C}/\mathrm{a} \in \mathcal{D}$$

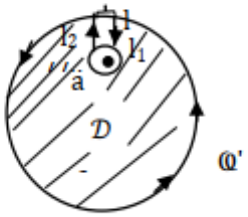
$$\oint_{\varphi} g(t)dt$$

حيث $g(t)$ غير معرفة عند $t = 0$

إذ أن: $g(a) = \infty$

تكتب: $g(t)$ معرفة تماما على $\mathcal{D}$





$$\oint_{\varphi} g(t)dt = 0$$

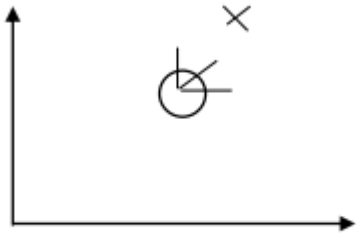
$$\oint_{\varphi'} g(t)dt = \oint_{\varphi'} \frac{f(t)}{t-a} = 0$$

$$= \oint_{\varphi-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-a}dt + \oint_{\varphi_i} \frac{f(t)}{t-a}dt + \oint_{\varphi_{n-2}} \frac{f(t)}{t-a}dt = \oint_{\varphi_2} \frac{f(t)}{t-a}dt$$

عند النهاية $\varepsilon \to 0$

$$0 = \oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-a}dt = \oint_{G} \frac{f(t)}{t-a}dt$$

على محيط الدائرة G ذات المركز a نكتب t كما يلي: $t = re^{i\theta} + a$



$$\begin{aligned}
\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-a}dt &= \oint_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{i\theta}\right) rie^{i\theta}d\theta}{a+re^{i\theta}-a} \\
&= i\oint_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta = i\lim_{r\to 0}\oint_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta \\
&= i\oint_0^{2\pi} f(a)d\theta = if(a)2\pi \\
\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-a}dt &= if(a)2\pi
\end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-a}dt$$

نظرية كوشي الثانية

• $f(t)$ تحليل داخل المجال المغلق بالمسار φ.
المسار يحتوي a

$$\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-a}dt \\
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{t-z}dt, z\in\mathcal{D} \\
&\vdots \\
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt \\
f''(z) &= \\
f''(n)(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt
\end{aligned}$$