

Méthodes numériques Appliquées

Sommaire

Chapitre I : Rappels de quelques méthodes numériques

I.1. Résolution des systèmes d'équations linéaires	3
I.1.1. Méthode de Gauss-Seidel	3
I.1.2. Méthodes de Relaxation	5
I.2. Interpolation et approximation	7
I.2.1. Interpolation de Lagrange.....	7
I.2.2. Polynôme de Newton.....	11
I.3. Intégration numérique.....	13
I.3.1. Méthodes des trapèzes	13
I.3.2. Méthode de Simpson	13
I.4. Résolution des équations différentielles ordinaires	14
I.4.1. Méthode d'Euler.....	14
I.4.2. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).....	14
II.1. Classifications des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites.....	15
II.1.1. Le Modèle mathématique.....	15
II.1.2 La formulation.....	15
II.1.3. Classification des problèmes aux limites	16
II.2. Méthode des différences finies	20
II.2.1. Développement en série de Taylor	20
II.2.1.1. Expression des dérivées premières.....	20
II.2.1.2. Expression des dérivées secondes	22
II.2.2. Procédure de résolution des problèmes aux limites.....	23
II.2.3. Résolution de problèmes elliptiques.....	24
II.2.3.1. Le problème de Dirichlet.....	24
II.2.3.2. Le problème de Neumann	26
II.2.4. Résolution des problèmes paraboliques	28
II.2.4.1.La méthode explicite (schéma FTCS).....	29
II.2.4.2. La méthode implicite.....	31
II.2.4.3. La méthode de Crank-Nicholson.....	32
II.2.5. Résolution des problèmes hyperboliques	34
II.2.5.1. La méthode explicite	34
II.2.5.2. La méthode implicite	36

Chapitre I : Rappels de quelques méthodes numériques

I.1. Résolution des systèmes d'équations linéaires

I.1.1. Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative. Elle est basée sur des approximations successives de la solution. Le principe de la méthode est l'utilisation de la solution la plus récente au cours de chaque itération.

Pour mieux comprendre la méthode, soit le système de trois équations à trois inconnues T_1 , T_2 et T_3

$$a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 = b_1$$

$$a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 = b_2$$

$$a_{31}T_1 + a_{32}T_2 + a_{33}T_3 = b_3$$

On passe par les étapes suivantes :

a) Initialisation

On se donne au départ une solution quelconque (initialisation de la méthode de Gauss-Seidel).

On aura : $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ et $T_3^{(0)}$ une solution connue à l'étape initiale $k=0$.

b) 1^{ère} itération

Les équations sont résolues successivement pour les valeurs inconnues de la diagonale selon la procédure suivante:

On résout la 1^{ère} équation par rapport à T_1 on obtient,

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}T_2^{(0)} - a_{13}T_3^{(0)})$$

On résout la deuxième équation par rapport à T_2 mais on doit reporter cette fois la nouvelle valeur de $T_1^{(1)}$ qui vient juste d'être calculée,

$$T_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}T_1^{(1)} - a_{23}T_3^{(0)})$$

De même dans la troisième équation on reporte la valeur de $T_1^{(1)}$ calculée dans la première équation, et $T_2^{(1)}$ qui vient juste d'être calculée dans la deuxième équation et on obtient $T_3^{(1)}$

$$T_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}T_1^{(1)} - a_{32}T_2^{(1)})$$

On reporte donc automatiquement la plus récente valeur calculée en passant d'une équation à l'autre.

c) 2^{ème} itération On répète le processus de la première itération. On obtient la solution:

$$T_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}T_2^{(1)} - a_{13}T_3^{(1)})$$

$$T_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}T_1^{(2)} - a_{23}T_3^{(1)})$$

$$T_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} T_1^{(2)} - a_{32} T_2^{(2)} \right)$$

Un calcul similaire est obtenu à l'itération $k+1$ on a :

$$T_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} T_2^{(k)} - a_{13} T_3^{(k)} \right)$$

$$T_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} T_1^{(k+1)} - a_{23} T_3^{(k)} \right)$$

$$T_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} T_1^{(k+1)} - a_{32} T_2^{(k)} \right)$$

d) *Itération $k+1$*

Si on a en général n équations à n inconnues, à l'itération k on a le système:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} T_1 & + a_{12} T_2 & + a_{13} T_3 & + a_{14} T_4 & \dots & + a_{1n} T_n & = b_1 \\ a_{21} T_1 & + a_{22} T_2 & + a_{23} T_3 & + a_{24} T_4 & \dots & + a_{2n} T_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} T_1 & + a_{i2} T_2 & + a_{i3} T_3 & + a_{i4} T_4 & \dots & + a_{in} T_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} T_1 & + a_{n2} T_2 & + a_{n3} T_3 & + a_{n4} T_4 & \dots & + a_{nn} T_n & = b_n \end{array} \right\}^{(k)}$$

À l'itération $k+1$, la première équation donne :

$$T_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} T_2^{(k)} - a_{13} T_3^{(k)} - a_{14} T_4^{(k)} - \dots - a_{1n} T_n^{(k)} \right)$$

Ou encore sous forme condensée:

$$T_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} T_j^{(k)} \right)$$

La deuxième équation donne :

$$T_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} T_1^{(k+1)} - a_{23} T_3^{(k)} - a_{24} T_4^{(k)} - \dots - a_{2n} T_n^{(k)} \right)$$

qui s'écrit :

$$T_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} T_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n a_{2j} T_j^{(k)} \right)$$

Et ainsi de suite. La $i^{\text{ème}}$ équation donne :

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(a_{i1} T_1^{(k+1)} + a_{i2} T_2^{(k+1)} + a_{i3} T_3^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} T_{i-1}^{(k+1)} \right) - \left(a_{i,i+1} T_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in} T_n^{(k)} \right) \right]$$

qui s'écrit:

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} T_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} T_j^{(k)} \right)$$

Pour $i=1, n$ l'équation représente l'algorithme de résolution du système d'équations par la méthode de Gauss-Seidel.

On arrête la calcul lorsque deux valeurs successives de T_i sont suffisamment voisines. On peut utiliser les deux critères suivants :

-convergence absolue

$$\left| T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon$$

- convergence relative

$$\left| \frac{T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}}{T_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

La convergence ne dépend pas de la solution initiale mais des valeurs des coefficients a_{ij} . La convergence est assurée pour chaque ligne si : $a_{ii} \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} \text{Soit le système: } 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

1.1.2. Méthodes de Relaxation

La méthode de Gauss-Seidel ne converge pas très rapidement, on utilise des méthodes de relaxation comme la méthode SOR. La méthode SOR (de l'anglais 'Successive Over Relaxation') ou méthode de sur-relaxation, due à l'ingénieur anglais Richard Southwell, est utilisée pour accélérer la convergence. La méthode prend son nom 'relaxation', à partir de la façon dont on change la solution x_i pour rendre le résidu R_i (qui est la valeur de la $i^{\text{ème}}$

équation $a_{i1}T_1^{(k)} + a_{i2}T_2^{(k)} + \dots + a_{in}T_n^{(k)} - b_i = R_i \neq 0$ quand on substitue la solution approchée à l'itération k) égal à zéro. On dit relaxer le résidu.

Partant de la solution initiale $T_i^{(0)}$, on obtient $T_i^{(1)}$: au lieu de réutiliser $T_i^{(1)}$ pour l'itération suivante, on voit que la convergence serait plus rapide si au lieu d'insérer $T_j^{(1)}$, on insérait :

$$\bar{T}_i^{(1)} = T_i^{(0)} + \omega(T_i^{(1)} - T_i^{(0)})$$

ω est le facteur de relaxation

Ainsi, partant de $T_i^{(k)}$, on obtient $T_i^{(k+1)}$. A l'itération suivante, au lieu de partir de $T_i^{(k+1)}$, on part de :

$$\bar{T}_i^{(k+1)} = T_i^{(k)} + \omega(T_i^{(k+1)} - T_i^{(k)})$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\bar{T}_i^{(k+1)} = (1-\omega)T_i^{(k)} + \omega T_i^{(k+1)}$$

En substituant la valeur de $T_i^{(k+1)}$ donnée par l'équation dans l'équation on obtient:

$$\bar{T}_i^{(k+1)} = \omega \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} T_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} T_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) T_i^{(k)}$$

Selon la valeur du facteur de relaxation ω , on a les méthodes suivantes

$\omega = 1$	méthode de Gauss-Seidel
$1 < \omega < 2$	méthode de sur-relaxation (SOR)
$\omega < 1$	méthode de sous-relaxation

Programmation de la méthode SOR

On a vu que l'équation aux différences finies de Laplace s'écrit pour $r=1$:

$$T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = 0$$

En résolvant pour $T_{i,j}$ on obtient:

$$T_{i,j} = 0.25(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Utilisant l'équation (2.58) on peut écrire la solution à l'itération $k+1$:

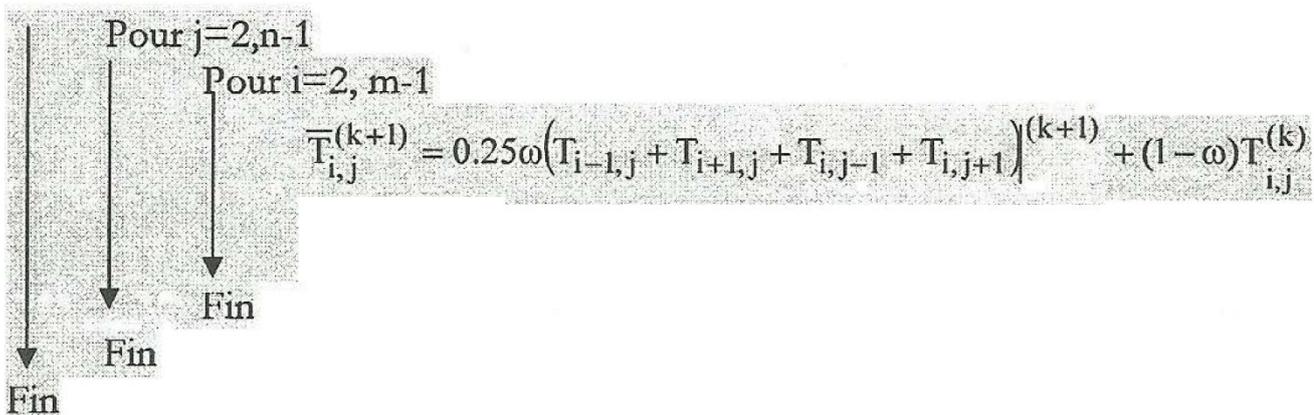
$$\bar{T}_{i,j}^{(k+1)} = 0.25\omega(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^{(k+1)} + (1 - \omega)T_{i,j}^{(k)}$$

D'où l'algorithme de résolution de l'équation de Laplace par la méthode SOR:

$T(i,j) = T_{init}$ (aux points pivots)

Conditions aux frontières pour obtenir b_i

Pour $k=1, K_{max}$



I.2. Interpolation et approximation

I.2.1. Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme de collocation. Étant donné $(n + 1)$ points $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$), on suppose un instant que l'on sait construire $(n + 1)$ polynômes $L_i(x)$ de degré n et

satisfaisant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} L_i(x_i) &= 1 & \forall i \\ L_i(x_j) &= 0 & \forall j \neq i \end{aligned}$$

Cela signifie que le polynôme $L_i(x)$ de degré n prend la valeur 1 en x_i et s'annule à tous les autres points de collocation. Nous verrons comment construire les $L_i(x)$ un peu plus loin. Dans ces conditions, la fonction $L(x)$ définie par:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$

est un polynôme de degré n , car chacun des $L_i(x)$ est de degré n . De plus, ce polynôme passe par les $(n + 1)$ points de collocation et est donc le polynôme recherché. En effet, il est facile de montrer que :

$$L(x_j) = f(x_j)L_j(x_j) + \sum_{i=0, i \neq j}^n f(x_i)L_i(x_j) = f(x_j) + 0 = f(x_j) \quad \forall j$$

Le polynôme $L(x)$ passe donc par tous les points de collocation. Puisque ce polynôme est unique, $L(x)$ est bien le polynôme recherché. Il reste à construire les fonctions $L_i(x)$. Suivons une démarche progressive.

Polynômes de degré 1

Il s'agit de déterminer le polynôme de degré 1 dont la courbe (une droite) passe par les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. On doit donc construire deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1 qui vérifient:

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1 & L_1(x_0) &= 0 \\ L_0(x_1) &= 0 & L_1(x_1) &= 1 \end{aligned}$$

Le polynôme $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$. On pense immédiatement au polynôme:

$$(x - x_1)$$

qui s'annule en $x = x_1$, mais qui vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$. Pour s'assurer d'une valeur 1 en $x = x_0$, il suffit d'effectuer la division appropriée afin d'obtenir:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

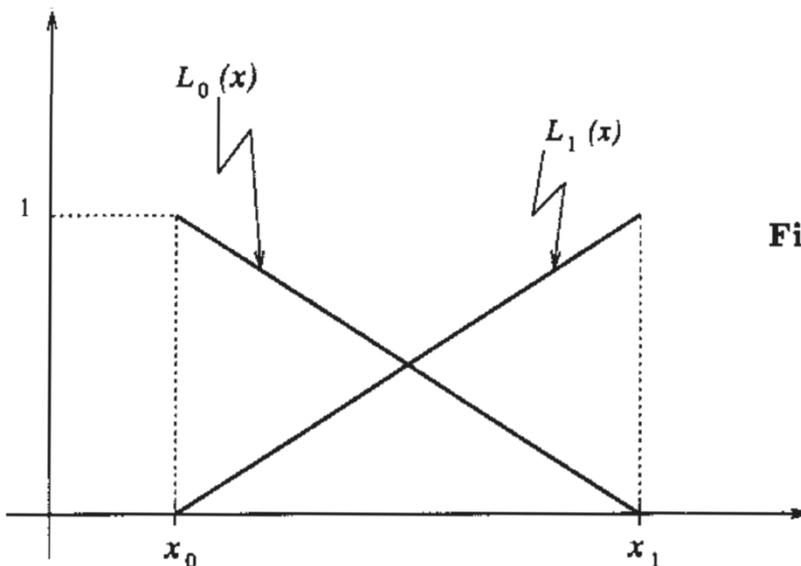


Figure : Polynômes de Lagrange de degré 1: $L_0(x)$ et $L_1(x)$

Un raisonnement similaire pour $L_1(x)$ donne: $L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$

Ces deux fonctions sont illustrées à la figure précédente. Le polynôme de degré 1 est donc:

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

Exemple 3 :

L'équation de la droite passant par les points $(2, 3)$ et $(5, -6)$ est:

Polynômes de degré 2

Si on cherche le polynôme de degré 2 passant par les trois points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, on doit construire trois fonctions $L_i(x)$. Le raisonnement est toujours le même. La fonction $L_0(x)$ s'annule cette fois en $x = x_1$ et en $x = x_2$. On doit forcément avoir un coefficient de la forme:

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

qui vaut $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ en $x = x_0$. Pour satisfaire la condition $L_0(x_0) = 1$, il suffit alors de diviser le coefficient par cette valeur et de poser:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Cette fonction vaut bien 1 en x_0 et 0 en x_1 et x_2 . De la même manière, on obtient les fonctions $L_1(x)$ et $L_2(x)$ définies par:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad \text{et} \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ces trois fonctions sont à leur tour illustrées à la figure

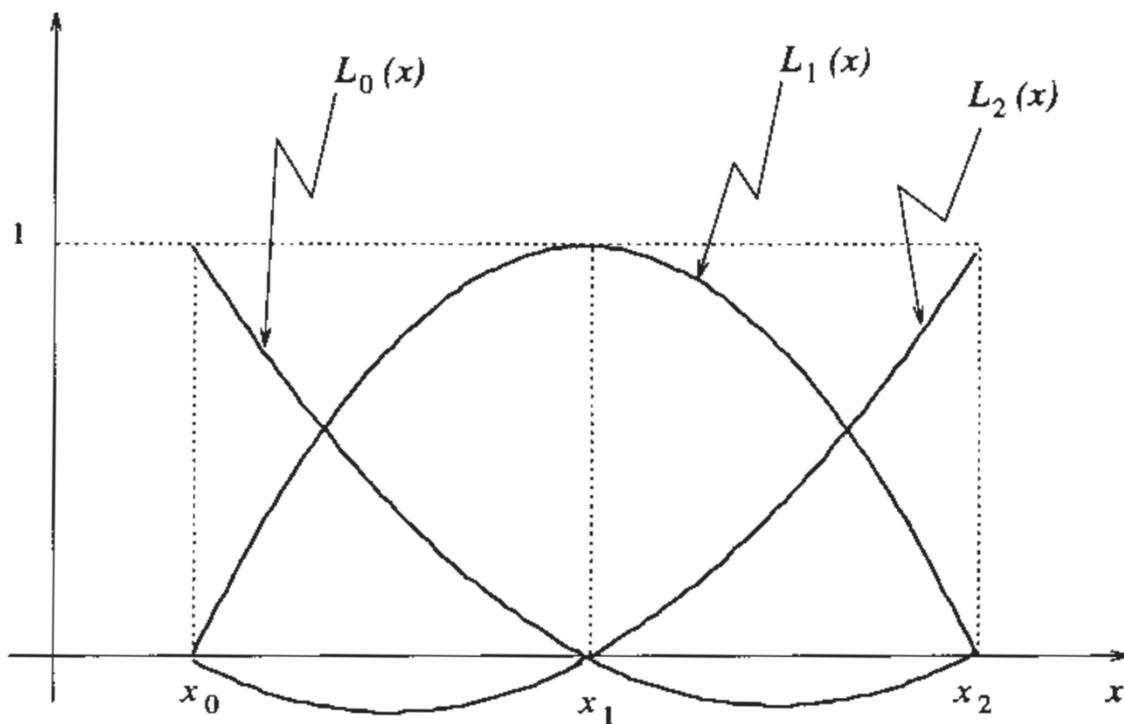


Figure : Polynômes de Lagrange de degré 2: $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$

Exemple 4 :

La parabole passant par les points $(1, 2)$, $(3, 7)$, $(4, -1)$ est donnée par:

Polynômes de degré n

On analyse le cas général de la même façon. La fonction $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Il faut donc introduire la fonction:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

qui vaut: $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)$

en $x = x_0$. On a alors, après division:
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)}$$

On remarque qu'il y a n facteurs de la forme $(x - x_i)$ dans cette expression et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n . Pour la fonction $L_1(x)$, on pose:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}$$

On note l'absence du terme $(x - x_1)$. L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est donc:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

où cette fois seul le facteur $(x - x_i)$ est absent. $L_i(x)$ est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 en $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points de collocation.

On peut maintenant résumer la situation.

Étant donné $(n+1)$ points d'interpolation $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$), l'unique polynôme d'interpolation de degré n passant par tous ces points peut s'écrire:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$

Exemple 5 :

Reprenons les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$

Calculer la valeur de $f(2.5)$ par l'utilisation de l'interpolation de Lagrange troisième degré.

I.2.2. Polynôme de Newton

Un polynôme de degré n dont la forme générale est:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

possède très exactement n racines qui peuvent être réelles ou complexes conjuguées. (On sait que r est une racine de $p_n(x)$ si $p_n(r) = 0$.)

Lorsqu'on écrit l'expression générale d'un polynôme. Il en existe cependant d'autres qui sont plus appropriées au cas de l'interpolation, par exemple:

$$\begin{aligned} p_n(x) = & a_0 \\ & + a_1(x - x_0) \\ & + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & \vdots \\ & + a_{n-1}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-2}) \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

On remarque que le coefficient de a_n comporte n monômes de la forme $(x - x_i)$ et qu'en conséquence le polynôme est de degré n .

L'aspect intéressant de cette formule apparaît lorsqu'on essaie de déterminer les $(n + 1)$ coefficients a_i de telle sorte que $p_n(x)$ passe par les $(n + 1)$ points de collocation $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. On doit donc s'assurer que:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Les coefficients de la forme _____ s'annulent tous en $x = x_0$, sauf le premier.

On peut ainsi montrer que: $p_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$

Le premier coefficient est donc: $a_0 = f(x_0)$

On doit ensuite s'assurer que $p_n(x_1) = f(x_1)$, c'est-à-dire:

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

ce qui permet d'isoler a_1 pour obtenir: $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Ainsi, le coefficient a_1 peut s'écrire: $a_1 = f[x_0, x_1]$

Il est facile de démontrer que le polynôme de degré 1: $p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$

qu'on obtient en ne considérant que les deux premiers coefficients de _____ et les expressions _____ et passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. Il représente donc l'unique polynôme de collocation de degré 1 passant par ces deux points.

Le troisième coefficient (a_2) est à son tour déterminé par:

$$p_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

En isolant a_2 , on obtient:

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)) = \frac{1}{(x_2 - x_0)} (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1])$$

Les *deuxièmes différences divisées* de la fonction $f(x)$ sont définies à partir des premières différences divisées par la relation:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}$$

De même, les n^{es} différences divisées de la fonction $f(x)$ sont définies à partir des $(n-1)^{\text{es}}$ différences divisées de la façon suivante:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

Suivant cette notation, on a: $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

Il est facile de démontrer que le polynôme:

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Les différences divisées relatives aux n premiers et aux n derniers points, respectivement.

Suivant la définition des différences divisées, on observe que:

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Il reste maintenant à calculer efficacement la valeur de ce polynôme. La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées de la façon suivante.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Exemple 6 :

La table de différences divisées pour les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$ est:

I.3. Intégration numérique

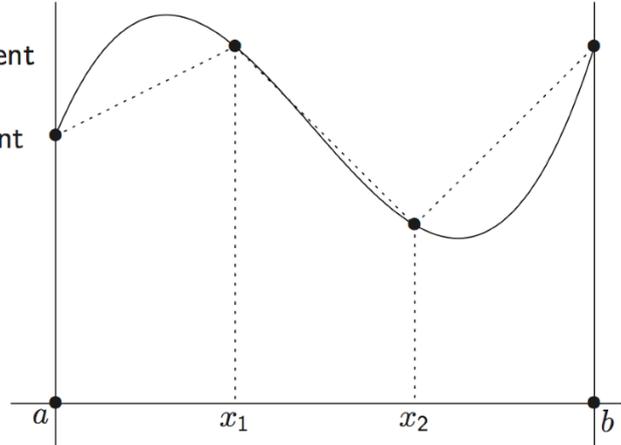
Lorsque la fonction f est de classe C^n sur l'intervalle réel $I = [a, b]$, on note

$$M_i = \max\{|f^{(i)}(x)|; x \in [a, b]\} \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur $h = (b - a)/n$ et on note, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $x_i = a + ih$.

I.3.1. Méthodes des trapèzes

On remplace la courbe représentative de f , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1} .



La valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la méthode des trapèzes est alors donnée par

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Démonstration : l'aire du trapèze de base

$$[x_i, x_{i+1}] \text{ est } (x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2.$$

On en déduit que

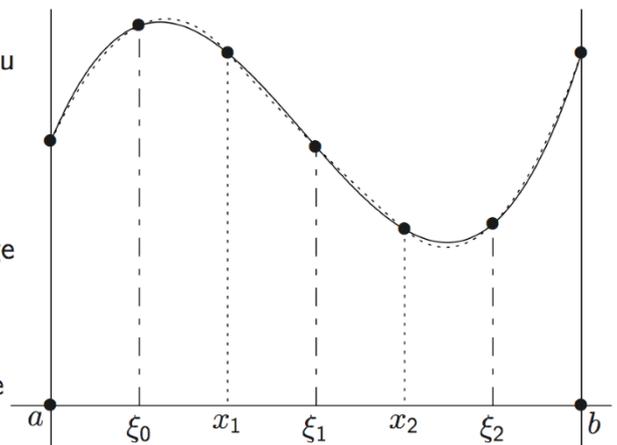
$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

I.3.2. Méthode de Simpson

On remplace f , sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision, par la fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 qui prend les mêmes valeurs que f aux extrémités et au milieu ξ_i de ce segment.

Cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu.

La valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la méthode de Simpson est alors donnée par



$$S_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f(\xi_i)) = \frac{b-a}{6n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)).$$

Exemple 7 :

On reprend le calcul de: $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

I.4. Résolution des équations différentielles ordinaires

Il s'agit de méthodes de résolution numérique d'équations différentielles du premier ordre avec condition initiale. Pour un système de deux équations différentielles

$$x'(t) = F(x(t), y(t)), \quad y'(t) = G(x(t), y(t)),$$

et des conditions initiales $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$

on choisit l'intervalle de longueur T sur lequel on veut approcher $(x(t), y(t))$ et un nombre de pas $n \geq 1$, on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en $n \geq 1$ sous-intervalles de longueur $h = T/n$, et on approche la solution $(x(t), y(t))$ de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0, T] = [0, nh]$ par des vecteurs

$$(X_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad (Y_k)_{0 \leq k \leq n},$$

avec l'idée que, pour tout k ,

$$X_k \approx x(kh), \quad Y_k \approx y(kh),$$

ou bien de façon équivalente, que pour tout temps t dans $[0, nh]$,

$$x(t) \approx X_{\lfloor t/h \rfloor}, \quad y(t) \approx Y_{\lfloor t/h \rfloor}.$$

I.4.1. Méthode d'Euler

Appelée aussi « méthode de la tangente », c'est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles, on considère que, h étant petit,

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) = x(t) + hF(x(t), y(t)),$$

et de même pour $y(t+h)$. On considère donc le schéma

$$X_0 = x_0, \quad Y_0 = y_0, \quad X_{k+1} = X_k + hF(X_k, Y_k), \quad Y_{k+1} = Y_k + hG(X_k, Y_k).$$

I.4.2. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

la méthode d'Euler n'utilise que la dérivée au début de chaque intervalle $[kh, (k+1)h]$ pour déduire les valeurs X_{k+1} et Y_{k+1} à la fin de l'intervalle à partir des valeurs X_k et Y_k au début de l'intervalle. À présent on va calculer des valeurs de la dérivée en 4 points de l'intervalle, afin d'atteindre une plus grande précision.

Dans le détail, on modifie seulement l'étape itérative de la méthode d'Euler, qui devient

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}h(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4),$$

avec

$$K_1 = F(X_k, Y_k), \quad L_1 = G(X_k, Y_k),$$

puis

$$K_2 = F(X_k + \frac{1}{2}hK_1, Y_k + \frac{1}{2}hL_1), \quad L_2 = G(X_k + \frac{1}{2}hK_1, Y_k + \frac{1}{2}hL_1),$$

$$K_3 = F(X_k + \frac{1}{2}hK_2, Y_k + \frac{1}{2}hL_2), \quad L_3 = G(X_k + \frac{1}{2}hK_2, Y_k + \frac{1}{2}hL_2),$$

et enfin, $K_4 = F(X_k + hK_3, Y_k + hL_3), \quad L_4 = G(X_k + hK_3, Y_k + hL_3).$

Exemple 8 :

On cherche à tester les deux méthodes sur l'équation différentielle $x' = x, \quad x(0) = 1,$

dont on connaît la solution $x(t) = e^t.$

Chapitre II. Résolution des équations aux dérivées partielles

II.1. Classifications des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites

II.1.1. Le Modèle mathématique

Un modèle mathématique est la mise en équation d'un phénomène dans le but de représenter fidèlement le comportement réel du phénomène. Des relations reliant les variables d'entrées aux variables de sorties sont établies. Le modèle est construit selon le but à atteindre. Par exemple pour analyser le mouvement de la terre autour du soleil, la terre et le soleil sont assimilés à des points matériels avec la loi de comportement correspondante tandis que si on veut étudier le mouvement de la terre par rapport à son axe, le modèle mathématique représente la terre par une sphère avec la loi de comportement donnant le mouvement de rotation de la terre par rapport à son axe. Le succès du modèle dépend de sa facilité d'utilisation et de la précision des résultats prédits par le modèle. Le modèle mathématique n'est pas spécifique aux sciences de l'ingénierie seulement, mais se retrouve dans d'autres domaines comme les sciences naturelles, les sciences sociales, les sciences économiques, etc...

II.1.2 La formulation

Le modèle mathématique est formulé par des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites qui garantissent l'unicité de la solution, donc le fonctionnement du système physique. Nous nous intéressons particulièrement aux différents types d'équations du second ordre, à deux variables indépendantes x et y , de la physique mathématique écrites sous la forme générale:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi = G(x, y)$$

où $\phi = \phi(x, y)$ est la fonction recherchée, dépendante de x et y . C'est la fonction qui donne le comportement du modèle. A, B, \dots et F sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles. Ils sont fonction de x et y et peuvent être des constantes. On ne traitera pas les équations non linéaires c'est-à-dire des équations dont les coefficients dépendent de ϕ .

L'équation peut être réécrite sous la forme

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

Selon le signe du déterminant $B^2 - 4AC$ on adopte le classement suivant

si $B^2 - 4AC < 0$ l'équation est dite elliptique,

si $B^2 - 4AC > 0$ l'équation est dite hyperbolique

si $B^2 - 4AC = 0$ l'équation est dite parabolique

Exemple 9 :

- Equation de Laplace 2D
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

On a: $A=1, B=0, C=1$, d'où $B^2 - 4AC = -4 < 0$, l'équation de Laplace est elliptique.

- Equation de conduction instationnaire de la chaleur $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$

On a : $A=\alpha, B=0, C=0$, d'où $B^2 - 4AC=0$, l'équation est parabolique

- Equation de vibration transversale ou équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

L'équation peut s'écrire $c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ On a : $A=c^2, B=0, C=-1$ d'où

$B^2 - 4AC = 4/c^2 > 0$, l'équation est hyperbolique

II.1.3. Classification des problèmes aux limites

Les problèmes aux limites sont régis par des équations aux dérivées partielles accompagnées de conditions aux limites spécifiques. Selon le type d'équation on obtient le problème aux limites correspondant

- Si l'équation est elliptique, le problème est elliptique et on a un problème d'équilibre ou de valeurs aux limites (PVL)
- Si l'équation est parabolique le problème est parabolique et on a un problème de valeurs initiales (PVI)
- Si l'équation est hyperbolique le problème est hyperbolique et on a un problème de valeurs propres (PVP)

Le problèmes de valeurs aux limites

Les équations aux dérivées partielles peuvent être par exemple, les équations bidimensionnelles de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ ou de Poisson $\nabla^2 \phi = f(x,y)$. On prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet¹, Neumann² ou Cauchy³ pour ce type de problèmes (Fig.).

La condition de Dirichlet est une condition sur ϕ . Celle-ci est imposée sur une partie (C_1) de la frontière.

La condition de Cauchy consiste à imposer ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ sur la frontière (C_2). On aura une condition de flux $\frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha \phi$, sur cette frontière. Si $\alpha = 0$, la condition de flux est dite de Neumann, si $\alpha \neq 0$ la condition est dite de Cauchy.

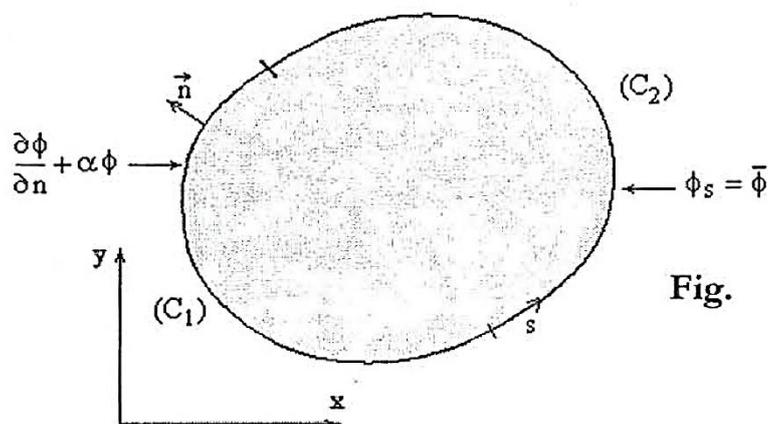


Fig. : Problème de valeurs aux limites

Quand ϕ est une fonction imposée connue sur toute la frontière de Ω , le problème est souvent désigné comme un problème de Dirichlet.

On retrouve l'équation de Laplace dans de nombreuses applications comme la conduction thermique en régime stationnaire, le potentiel gravitationnel et électrostatique, etc...

Exemple 10 :

Conduction stationnaire de la chaleur dans une plaque rectangulaire avec conditions de Dirichlet

La conduction stationnaire de la chaleur dans une plaque rectangulaire soumise à des températures imposées sur les 4 côtés est un problème de valeurs aux limites. Le problème consiste à déterminer, par exemple, la température en tout point du domaine.

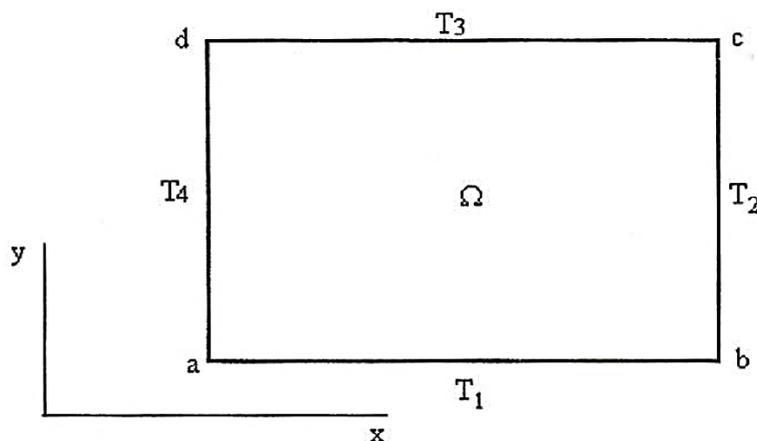


Fig. : Problème de Dirichlet

La température est régie par l'équation de Laplace
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et les conditions aux limites $T(x,0) = T_1$, $T(L,y) = T_2$, $T(x,\ell) = T_3$ et $T(0,y) = T_4$

Exemple 11 :

Conduction de la chaleur dans une plaque rectangulaire avec conditions de Dirichlet et de Cauchy (Fig.)

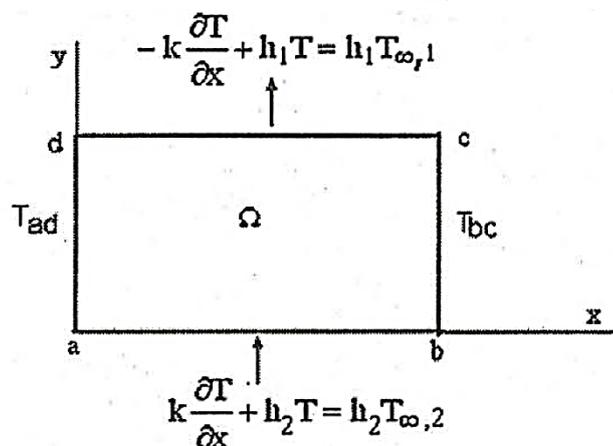


Fig. : Problème de valeurs aux limites avec condition de Cauchy et de Dirichlet

Le problème est régi par l'équation de Laplace et les conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{aligned} T(L,y) &= T_{bc} & 0 \leq y \leq \ell \\ T(0,y) &= T_{ad} & 0 \leq y \leq \ell \end{aligned}$$

et les conditions de Cauchy données par le transfert thermique par convection aux frontières ab et cd avec l'entourage 1 (de température $T_{\infty,1}$) et l'entourage 2 (de température $T_{\infty,2}$) respectivement :

Flux thermique entrant :

$$k \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 T = h_1 T_{\infty,1} \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

Flux thermique sortant :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + h_2 T = h_2 T_{\infty,2} \quad y = \ell, \quad 0 \leq x \leq L$$

Le problème de valeurs initiales

Les problèmes régis par des équations paraboliques sont des problèmes de valeurs initiales ou instationnaires. On peut prescrire des conditions aux limites de type Dirichlet ou de Cauchy et des conditions initiales.

Exemple 12 : propagation de la chaleur dans un mur

Le problème de transfert thermique transitoire dans un mur est l'exemple type de ce problème (Fig.). Soit par exemple un mur d'épaisseur L se trouvant à la température initiale donnée par la fonction $f(x)$. Aux deux extrémités et à un instant $t > 0$ on impose des conditions aux limites de Cauchy.

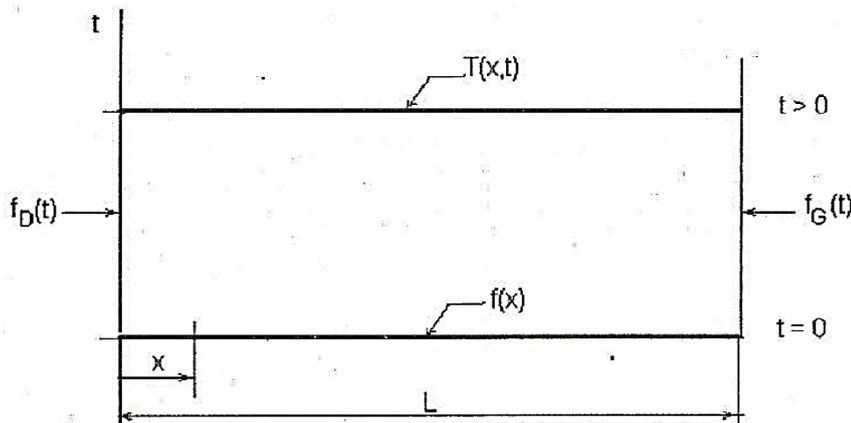


Fig. : Conditions aux limites du problème de valeurs initiales es

L'équation gouvernante est l'équation parabolique:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Les conditions aux frontières sont données par:

$$T(0, t) = T_G \quad t > 0$$

$$T(L, t) = T_D \quad t > 0$$

ou par des conditions de flux:

$$a_1 T(0, t) + b_1 \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = f_G(t) \quad t > 0$$

$$a_2 T(L, t) + b_2 \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = f_D(t) \quad t > 0$$

La condition initiale s'écrit: $T(x, 0) = f(x)$

Le problème de valeurs propres

Les problèmes régis par des équations hyperboliques sont des problèmes de valeurs propres ou de vibration. On prescrit aux frontières des conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet et des conditions initiales.

Exemple 13 : Vibration d'une corde élastique

Une corde parfaitement élastique de longueur L , de masse linéique ρ , est tendue à ses deux extrémités par une force T constante (Fig.). La déformation élastique transversale $y = y(x, t)$ de la corde obéit à l'équation hyperbolique:

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad c \text{ est la vitesse de propagation de l'onde } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

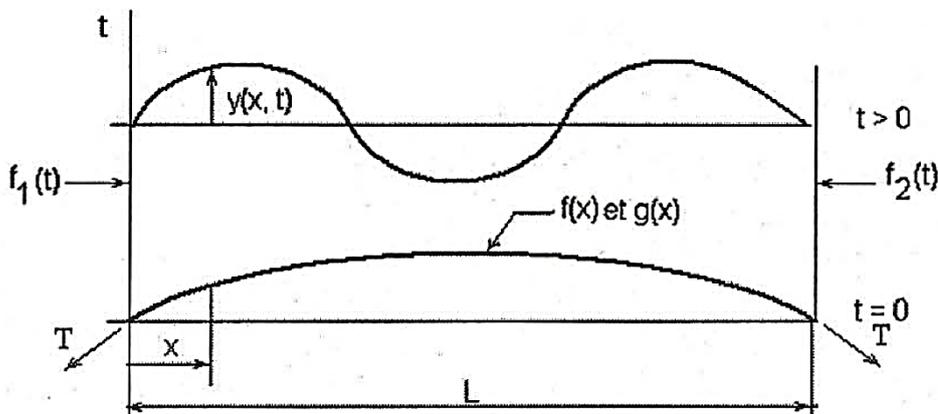


Fig. : Vibration transversale d'une corde élastique

Les conditions aux frontières sont données par : $y(0, t) = 0$
 $y(L, t) = 0$

Elles peuvent également s'exprimer par des conditions de Cauchy :

$$y(0, t) = a_1 y + b_1 \frac{\partial y}{\partial x} = f_1(t)$$

$$y(L, t) = a_2 y + b_2 \frac{\partial y}{\partial x} = f_2(t)$$

Les conditions initiales sont données par : $y(x, 0) = f(x)$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Cette deuxième condition est nécessaire car on a une dérivée seconde en t dans l'équation d'onde.

II.2. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une méthode numérique de résolution des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Sa formulation est basée sur l'approximation locale au voisinage d'un point donné des fonctions dérivées apparaissant dans les équations différentielles. Les fonctions dérivées sont approchées par des fonctions polynomiales données par le développement en série de Taylor.

Dans ce chapitre on utilise la méthode des différences finies pour résoudre des problèmes aux limites régis par les équations aux dérivées partielles linéaires du second de type

II.2.1. Développement en série de Taylor

On montre que si une fonction $f(x)$ est analytique, indéfiniment dérivable au voisinage d'un point $x = x_0$ (c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant le point $x = x_0$, $0 < |x - x_0| < R$), alors cette fonction peut être approchée par une fonction polynomiale écrite sous la forme de série convergente qu'on appelle série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

Le dernier terme de l'équation est appelé reste ou erreur de troncature, est donné par la formule de Lagrange

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad x - x_0 \leq \xi \leq x + x_0$$

II.2.1.1. Expression des dérivées premières

a) Différences finies en avant

La fonction f est connue aux points x_i (points pivots) du domaine d'analyse. A l'aide de la formule de Taylor (2.4) on développe la fonction f jusqu'à l'ordre 2

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(\xi)$$

ξ abscisse d'un point se trouvant dans le voisinage de x_i avec $x_i < \xi < x_i + h$

En résolvant (2.6) pour $f'(x_i)$, on a :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

avec $O(h)$ l'erreur de troncature

$$O(h) = -\frac{h}{2!}f^{(2)}(\xi) \quad x_i < \xi < x_i + h$$

L'erreur est de l'ordre de grandeur du pas h (de l'ordre du degré le plus petit du pas h).

La formule de la dérivée première s'écrit en notation indicielle,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

b) Différences finies en arrière

En changeant h en $-h$ dans l'équation on obtient:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(\xi) \quad x_i - h < \xi < x_i$$

En résolvant pour la dérivée première :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O(h)$$

avec l'erreur de troncature

$$O(h) = \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(\xi) \quad x_i - h < \xi < x_i$$

L'erreur est de même ordre de grandeur que celle obtenue pour le schéma de différences en avant L'équation s'écrit en notation indicielle

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

c) Différences centrées

L'élimination de $f(x_i)$ des équations

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

nous permet de trouver la dérivée première par un schéma de différences centrées

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + O(h^2)$$

$$O(h^2) = -\frac{h^2}{6} f_i^{(3)}(\xi) \quad x_i - h < \xi < x_i + h$$

qui s'écrit en notation indicielle

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Exemple 14 :

En considérant un pas $\Delta x = 0.1$, calculer par un schéma de différences finies (a) en avant, (b) en arrière (c) et centré la dérivée première de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x = 2$. Calculer l'erreur de troncature pour chaque cas.

II.2.1.2. Expression des dérivées secondes

a) Différences finies en avant

On écrit le développement de $f(x_i + h)$ et $f(x_i + 2h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + \frac{8}{3!} h^3 f^{(3)}(\xi)$$

Eliminant $f(x_i)$ entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) = -hf^{(3)}(\xi)$$

ξ point du voisinage de x_i , on prend le voisinage qui contient les autres $x_i < \xi < x_i + 2h$

En notation indicielle, on a

$$f_i^{(2)} = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h)$$

b) Différences finies en arrière

On considère le développement de $f(x_i - h)$ et $f(x_i - 2h)$:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) - \frac{4}{3} h^3 f^{(3)}(\xi)$$

Eliminant $f(x_i)$ entre les deux équations, on obtient le schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) = hf^{(3)}(\xi)$$

$$x_i - 2h < \xi < x_i$$

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

qui est un schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde

c) Différences finies centrées

On considère le développement de $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

Eliminant $f(x)$ entre les deux équations, on a :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$O(h^2) = -\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi) \quad x_i - h < \xi < x_i + h$$

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

qui est un schéma de différences finies centrées de la dérivée seconde.

II.2.2. Procédure de résolution des problèmes aux limites

La résolution d'un problème aux limites par la méthode des différences finies se fait selon les principales étapes suivantes:

- Construire le maillage ou grille du domaine Ω
- Transformer l'équation aux dérivées partielles et l'exprimer sous forme de molécule ou *schéma numérique* de différences finies.
- Ecrire l'équation de différences finies aux points du maillage.
- Obtenir le système d'équations algébriques discrètes $[K]\{\phi\} = \{\phi_c\}$
 $\{\phi_c\}$ est le vecteur connu donné par les conditions aux limites non homogènes, $[K]$ est la matrice des coefficients et $\{\phi\}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.
- Trouver la solution $\{\phi\}$ en résolvant le système d'équations $[K]\{\phi\} = \{\phi_c\}$

Construction du maillage

Un problème est défini sur un domaine d'intégration Ω . Ce domaine peut être régulier ou non. Dans le cas d'une frontière irrégulière courbe en général comme le montre la figure , le maillage devient complexe et difficile à programmer.

Pour ce type de frontière on construit le maillage comme suit :

- On construit un rectangle dont les dimensions (L, ℓ) sont supérieures ou égales aux distances séparant les points extrêmes de la frontière selon les directions x et y . Le rectangle ainsi construit contient entièrement le domaine (Ω)

- Le rectangle étant un domaine régulier, son maillage est obtenu facilement en choisissant des pas Δx et Δy comme le montre la figure . Le nombre de points m et n selon x et y est donné par les relations connues $m = L/\Delta x + 1$ et $n = \ell/\Delta y + 1$
- L'étape suivante est d'obtenir le maillage de Ω à partir du maillage du domaine rectangulaire. Pour construire le maillage, les deux méthodes suivantes sont adoptées.

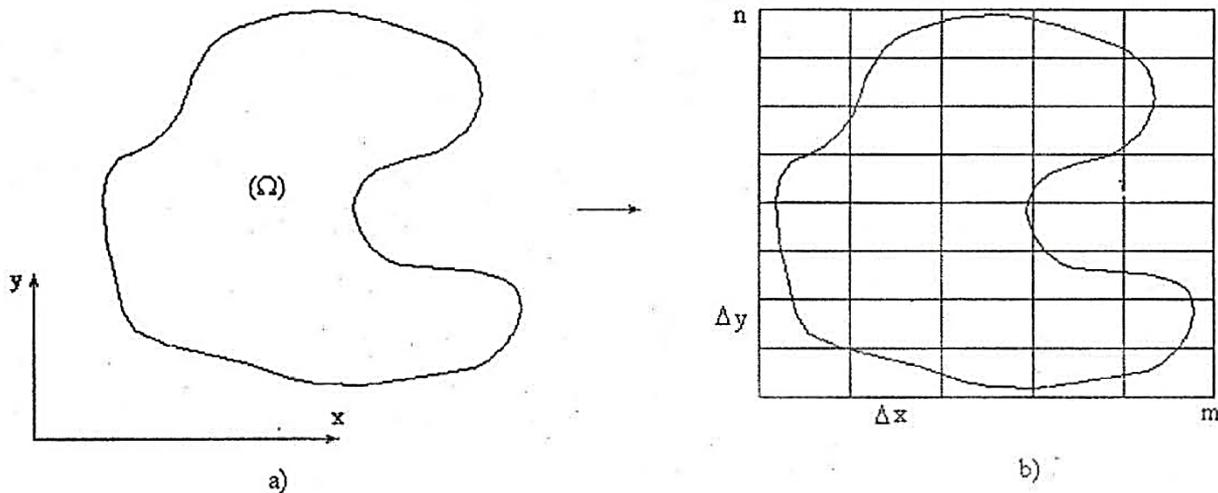


Fig. 1 : Procédure de maillage d'un domaine irrégulier

II.2.3. Résolution de problèmes elliptiques

II.2.3.1. Le problème de Dirichlet

Formulation

Soit le problème elliptique donné par l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

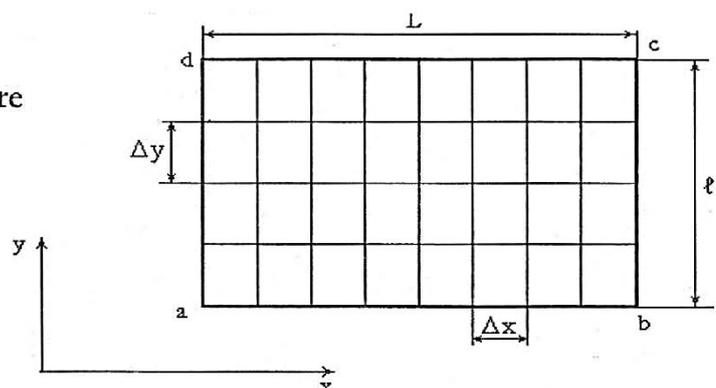
et les conditions aux limites appliquées sur les frontières du domaine rectangulaire (L, ℓ) (Problème de Dirichlet)

$$T(x, 0) = T_{ab}, \quad T(L, y) = T_{bc}, \quad T(x, \ell) = T_{cd} \quad \text{et} \quad T(0, y) = T_{ad}$$

Le maillage

Le domaine Ω étant à frontière régulière est construit à l'aide des relations $m = L/\Delta x + 1$ et $n = \ell/\Delta y + 1$ (Figure 1)

Fig. 2 : Maillage du domaine rectangulaire régulier (données : Δx , Δy , L et ℓ)



Le schéma numérique

Les dérivées secondes apparaissant dans l'équation aux dérivées s'écrivent en un point pivot (i, j) de Ω à l'aide d'un schéma de différences centrées

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad ; \quad O(\Delta x^2) = -\frac{1}{12} \Delta x^2 \phi^{(4)}(\xi, \eta) \Big|_{(i,j)}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad ; \quad O(\Delta y^2) = -\frac{1}{12} \Delta y^2 \phi^{(4)}(\xi, \eta) \Big|_{(i,j)}$$

En tronquant l'erreur $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$, l'équation de Laplace s'écrit alors :

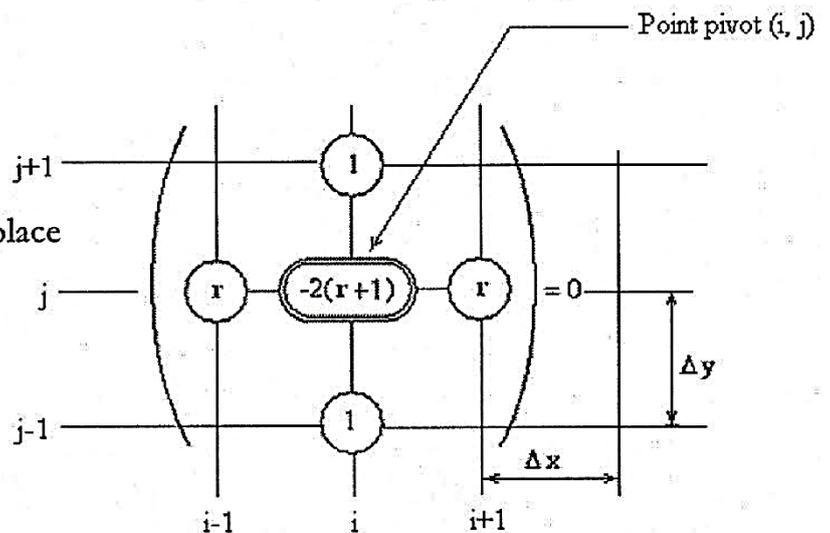
$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

En posant $r = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$ l'équation (2.37) devient :

$$r\phi_{i-1,j} - 2(r+1)\phi_{i,j} + r\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} = 0$$

qui s'écrit plus conventionnellement sous la forme moléculaire en un point (i, j)

Fig. : Molécule de l'équation de Laplace en un point (i, j) du maillage

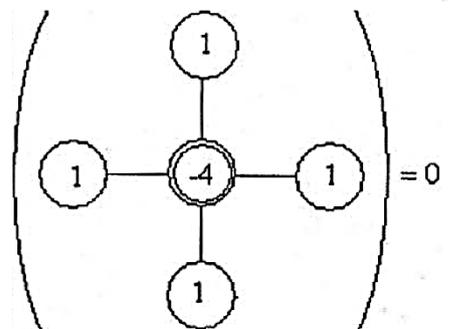


Le plus souvent, on choisit un maillage à pas égaux $\Delta x = \Delta y$, $r = 1$, l'équation devient :

$$\phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} = 0$$

ou sous forme de molécule

Fig. : Molécule de l'équation de Laplace ($r = 1$)

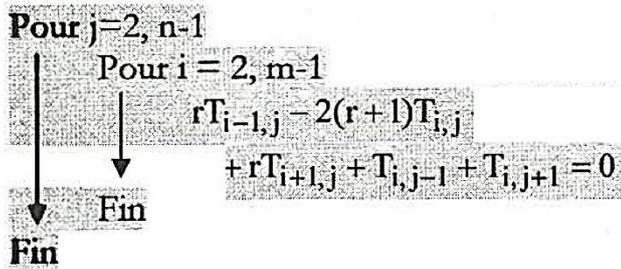


Le système d'équations algébriques

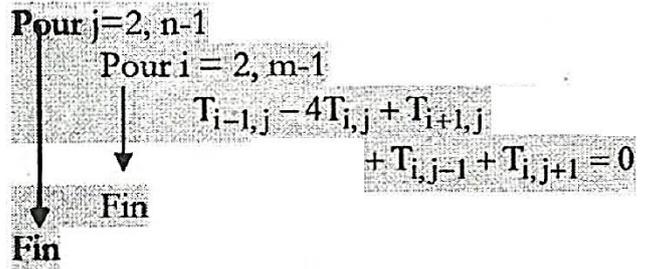
A cette étape on écrit le système d'équations algébriques. Ce résultat est obtenu lorsque la molécule parcourt l'ensemble des points (points pivots) du maillage. Le nombre d'inconnues du problème est égal au nombre des points pivots du maillage.

Le système d'équations algébriques est obtenu les deux algorithmes suivants selon la valeur de $r = (\Delta y / \Delta x)^2$

● **Algorithme 1** $r \neq 1$



● **Algorithme 2** $r = 1$



Exemple 15 : Construction des équations algébriques

Soit par exemple $m=5$ et $n = 4$ (Fig.). On obtient un maillage de $(m-2)(n-2)=6$ points pivots (on suppose $r=1$).

On aura à appliquer l'algorithme 2 ($r=1$). Sachant qu'aux frontières les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 T_{i,1} &= T_{ab} & i = 1, m (=5) \\
 T_{i,n} &= T_{cd} & i = 1, m \\
 T_{1,j} &= T_{bc} & j=1, n (=4) \\
 T_{m,j} &= T_{ad} & j=1, n
 \end{aligned}$$

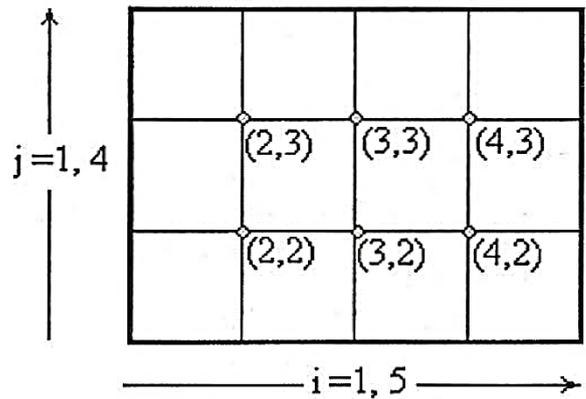


Fig. : Maillage du domaine Ω

II.2.3.2. Le problème de Neumann

On considère de nouveau le problème elliptique de conduction thermique régi par l'équation de Laplace mais avec une condition de Neumann sur le côté cd comme le montre la figure La condition de Neumann est donnée par :

$$a = \frac{\partial T}{\partial y} \quad y = l, \quad 0 \leq x \leq L$$

où a est une constante donnée.

Fig. : Transfert thermique avec condition de Neumann

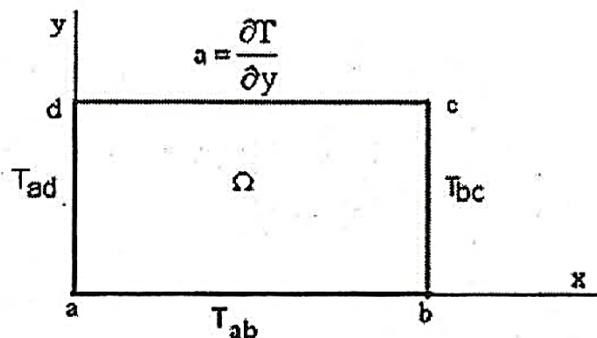


Schéma numérique

Le schéma aux différences finies de l'équation de Laplace est modifié aux points de la frontière cd. Considérons un point (i, j) de cette frontière (Fig.).

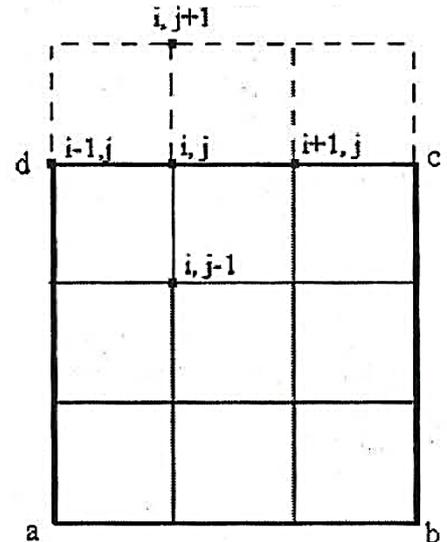


Fig. : Maillage de la frontière soumise à une condition de Neumann

En ce point la température est inconnue. On utilise la condition de Neumann pour exprimer la température en ce point. Utilisant l'équation de différences finies centrées de la dérivée première on a :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{1}{2\Delta y} (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) = a$$

en résolvant pour $T_{i,j+1}$ on obtient :

$$T_{i,j+1} = 2a\Delta y + T_{i,j-1}$$

Substituant cette valeur dans l'équation on obtient

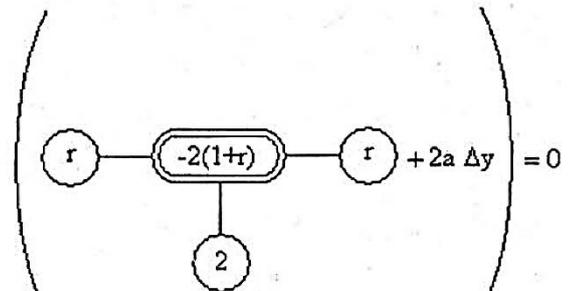
$$rT_{i-1,j} - 2(1+r)T_{i,j} + rT_{i+1,j} + T_{i,j-1} + (2a\Delta y + T_{i,j-1}) = 0$$

en réarrangeant on obtient

$$rT_{i-1,j} - 2(1+r)T_{i,j} + rT_{i+1,j} + 2T_{i,j-1} + 2a\Delta y = 0$$

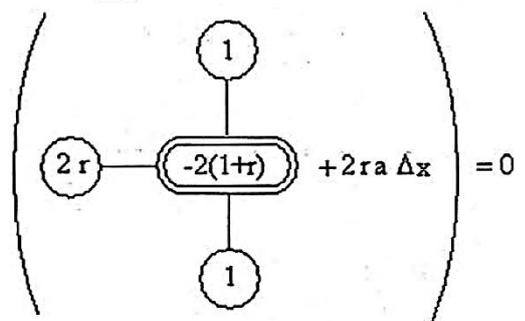
L'équation est présentée sous la forme moléculaire

Fig. : Molécule aux points de la frontière cd



Dans le cas où le côté bc est soumis à la condition de Neumann $\frac{\partial T}{\partial x} = a$ on a par un calcul similaire la molécule :

Fig. : Molécule aux points de la frontière bc



Si $r = 1$ les molécules ci-dessus deviennent

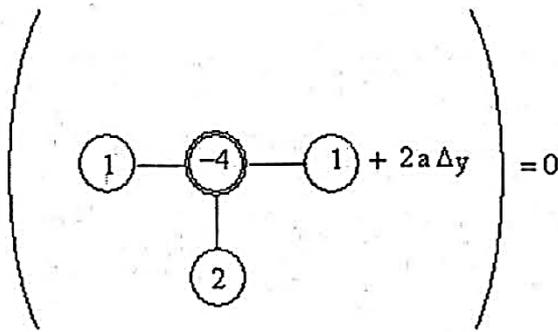


Fig. : Molécule aux points de frontière cd ($r=1$)

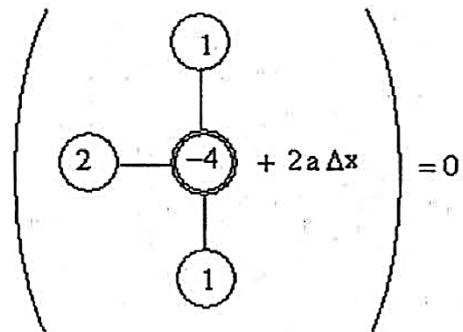
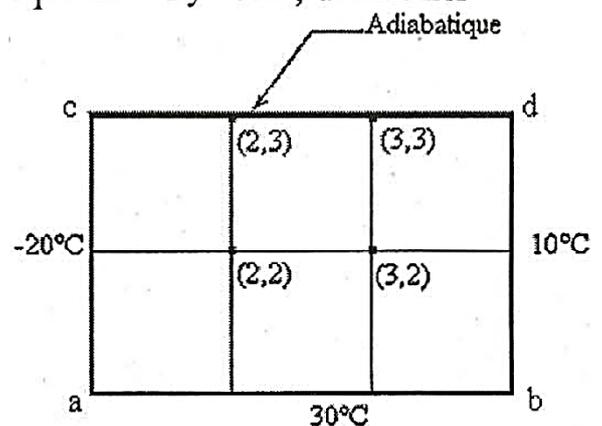


Fig. : Molécule aux points de la frontière bc ($r=1$)

Exemple 16 :

Considérer la plaque rectangulaire de dimension $L=3\text{cm}$, $l=2\text{cm}$, soumise à un échange de chaleur adiabatique sur le côté cd. Sachant que $\Delta x = \Delta y = 1\text{cm}$, déterminer les températures aux points du maillage de la figure

Fig. : Plaque rectangulaire soumise à une condition de Neumann sur la frontière cd



II.2.4. Résolution des problèmes paraboliques

Formulation

Pour un problème 1D, la formulation est donnée par l'équation parabolique,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \phi \in \Omega_{x,t}$$

les conditions aux deux extrémités de gauche et de droite

$$\phi(0,t) = \phi_G \quad t > 0,$$

$$\phi(L,t) = \phi_D \quad t > 0,$$

et la condition initiale: $\phi(x,0) = f(x)$

Avec $\Omega_{x,t} = \Omega_x \otimes \Omega_t$, domaine spatio-temporel où $\Omega_x = \{x/0 < x < L\}$ et $\Omega_t = \{t/t > 0\}$, α est le coefficient de diffusion (ou de propagation de chaleur dans le matériau du milieu Ω_x). ϕ_G , ϕ_D et $f(x)$ sont des valeurs spécifiées (connues). Le problème consiste à déterminer $\phi(x,t)$ en point x et à un instant donné t dans le domaine $\Omega_{x,t}$.

Le maillage

Le maillage du domaine $\Omega_{x,t}$ est construit à l'aide des relations connues $m = L/\Delta x + 1$ et $n = D/\Delta y + 1$, D est la durée du phénomène physique transitoire.

L'équation aux dérivées partielles est discrétisée aux points pivots du maillage, les conditions aux limites () sont spécifiées aux frontières gauche et droite du domaine géométrique Ω_x comme le montre la figure

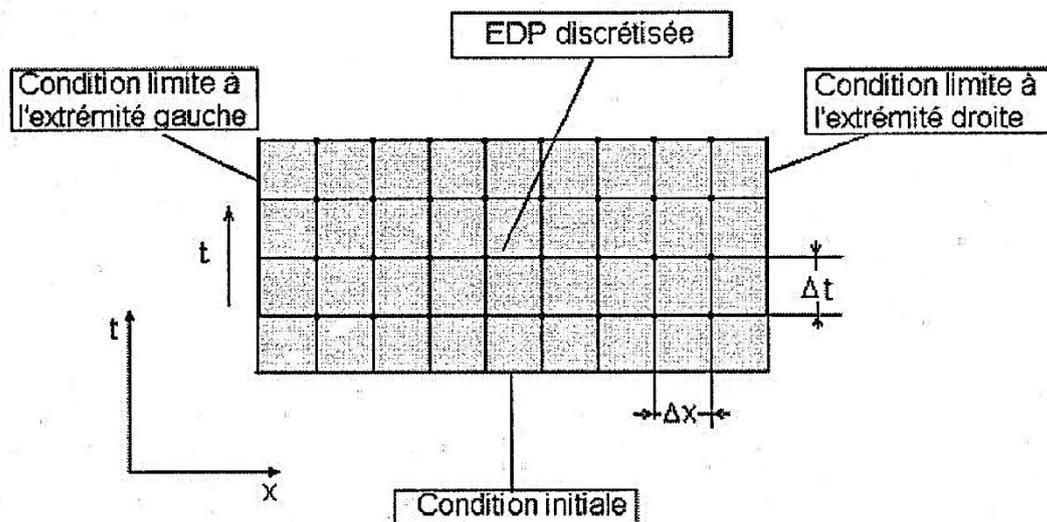


Fig. : Le problème parabolique et sa discrétisation

Différentes méthodes sont utilisées pour la résolution du problème parabolique. On peut citer principalement la méthode explicite, la méthode implicite et la méthode de Crank-Nicholson.

II.2.4.1. La méthode explicite (schéma FTCS)

On exprime la dérivée première temporelle à l'aide des différences finies en avant (la différence centrée pourtant plus précise n'est pas considérée ici car elle conduit à un schéma instable):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\text{où } O(\Delta t) = -\frac{\Delta t}{2} \phi^{(2)}(\xi) \quad t_j < \xi < t_j + \Delta t$$

La dérivée seconde spatiale est une différence centrale

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\text{L'équation (2.69) s'écrit alors: } \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[\Delta t, (\Delta x)^2]$$

En tronquant l'erreur et en réarrangeant, l'équation s'écrit :

$$\phi_{i,j+1} = r\phi_{i-1,j} + (1-2r)\phi_{i,j} + r\phi_{i+1,j} \quad \text{où} \quad r = \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

On a utilisé un schéma temporel de différences en avant et un schéma spatial centré pour formuler l'équation parabolique. Ce type de schéma est appelé FTCS (de l'anglais 'Forward Time Centered Space'). C'est un schéma explicite de résolution de l'équation. Comme le montre l'équation, l'appellation explicite de la méthode se justifie par le fait que la solution recherchée $\phi_{i,j+1}$ à l'étape de temps actuel $(j+1)\Delta t$ est explicitement déterminée à partir des solutions $\phi_{i-1,j}$, $\phi_{i,j}$ et $\phi_{i+1,j}$ connues à l'étape de temps précédent $j\Delta t$.

Le schéma numérique

Le schéma numérique de l'équation explicite peut se mettre sous la forme moléculaire

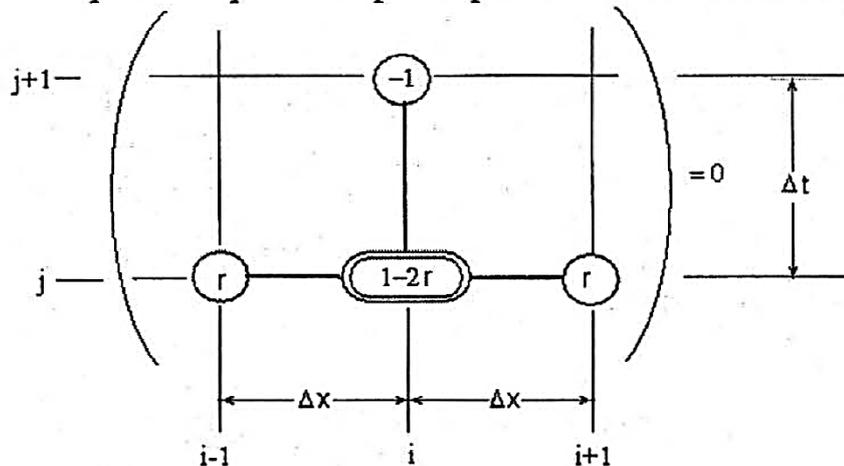


Fig. : Représentation moléculaire de l'équation explicite

Algorithme de la méthode explicite

Comme la condition initiale est connue, on peut trouver $\phi_{i,2}$ à l'instant Δt puis avancer dans le temps pas par pas. Ce schéma ne nécessite pas d'inversion de matrice. Les valeurs inconnues $\phi_{i,j+1}$ sont déterminées en tout point du maillage selon l'algorithme suivant:

$$\phi(x,0) = f(x) \text{ (solution initiale à } t = 0)$$

Pour $j=1, n$

Pour $i=2, m-1$

$$\phi_{i,j+1} = r\phi_{i-1,j} + (1-2r)\phi_{i,j} + r\phi_{i+1,j}$$

sortir $\phi_{i,j+1}$

Fin

Fin

la méthode explicite est convergente pour $r \leq \frac{1}{2}$ car l'erreur tend vers zéro quand Δx et Δt tendent toutes les deux vers zéro.

qui est le critère de stabilité de la solution donnée par la méthode explicite. On dit que la méthode est conditionnellement stable

L'avantage de la méthode explicite est qu'elle ne présente pas beaucoup de difficultés pour sa programmation.

L'inconvénient, est la limitation sur le pas de temps qui ne doit pas excéder la valeur imposée par le critère de convergence. Si le pas en temps dépasse cette limite, la méthode diverge. Comme conséquence de cette contrainte sur le pas en temps, la solution ne peut être obtenue qu'au bout d'un temps calcul assez important.

Exemple 17 :

Soit à résoudre par la méthode explicite le problème thermique de la propagation de la chaleur dans un mur d'épaisseur L . Le problème est formulé comme suit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < L = 10\text{cm}, t \in]0, D],$$

$$\text{durée du phénomène } D=4\text{s} \quad \alpha = 4.10^{-6} \text{m}^2.\text{s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_G = 350\text{K} & t > 0 & \quad T(x, 0) = f(x) = T_0 = 300\text{K} \\ T(L, t) &= T_D = 440\text{K} & t > 0 & \end{aligned}$$

On choisit les données suivantes: $\Delta t = 1\text{s}$, $\Delta x = 1\text{cm}$

II.2.4.2. La méthode implicite

Le schéma numérique

La méthode explicite discutée précédemment est simple du point de vue calcul, mais la taille maximale du pas de temps est limitée par des considérations de stabilité. Si les calculs sont menés sur une grande durée de temps, le nombre d'itérations temporelles devient très grand. D'où un grand temps de calcul machine. La méthode implicite, présentée dans ce paragraphe, surmonte cette difficulté. La méthode converge quelque soit la taille du pas de temps. On peut donc choisir un pas de temps assez grand pour accélérer la solution.

Considérons de nouveau le problème parabolique donné par les équations (). Pour formuler la méthode implicite, on évalue la dérivée seconde à l'étape $(j+1)$. Le schéma FTCS s'écrit :

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + O[\Delta t, (\Delta x)^2]$$

soit,

$$-r\phi_{i-1,j+1} + (1+2r)\phi_{i,j+1} - r\phi_{i+1,j+1} = \phi_{i,j} \quad \text{avec} \quad r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

L'équation () représente le schéma implicite en un point pivot (i, j) . A l'étape $j+1$, les solutions $\phi_{i,j+1}$ sont inconnues. A l'étape j $\phi_{i,j}$ est connue. Pour déterminer les inconnues de l'étape $j+1$, on doit résoudre le système d'équations obtenues à cette étape. La solution n'est donc connue qu'après avoir résolu le système d'équations.

La figure () montre la molécule et le principe de fonctionnement de la méthode implicite.

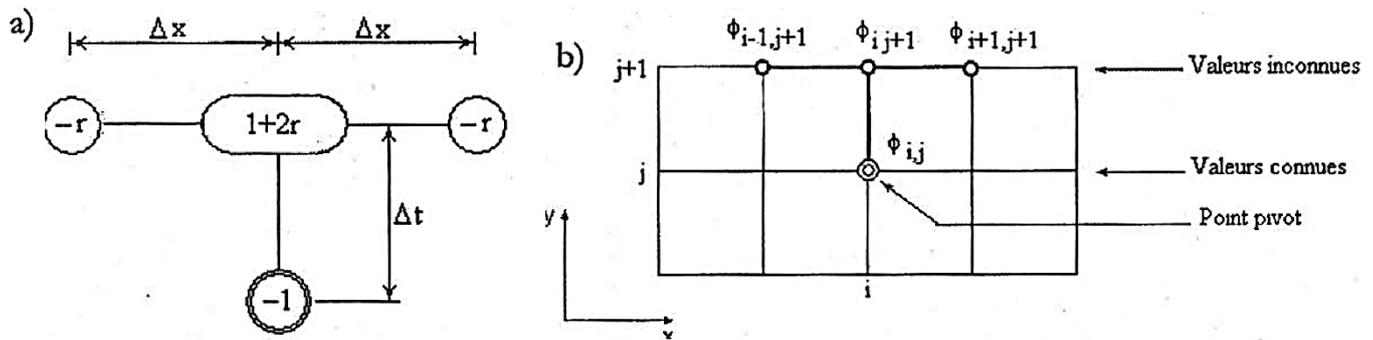
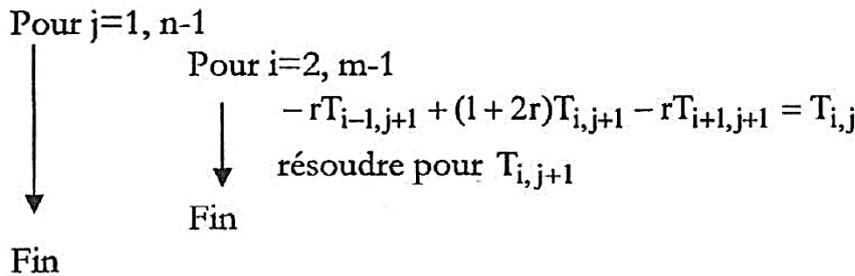


Fig. : Schéma numérique de la méthode implicite

Algorithme de la méthode implicite

L'algorithme de la méthode implicite est le suivant :



Exemple 18 :

Soit à résoudre par la méthode implicite le problème suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$T(0, t) = T_G = 0 \quad t \geq 0$$

$$T(L, t) = T_D = 0 \quad t \geq 0$$

$$T(x, 0) = 300 = \bar{T}$$

La solution exacte est donnée par: $T(x, t) = \frac{2\bar{T}}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\lambda_n L)}{\lambda_n} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$

II.2.4.3. La méthode de Crank-Nicholson

Principe de la méthode

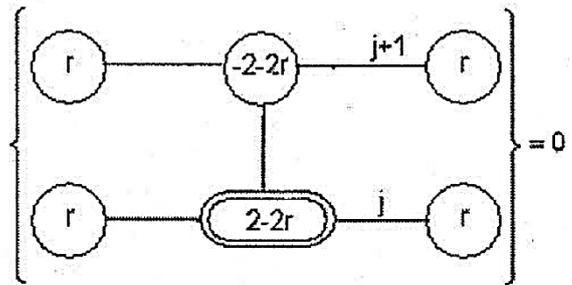
La méthode de Crank-Nicholson, appelée aussi méthode semi-implicite, se base sur le principe de la méthode implicite. Le schéma numérique est une combinaison des méthodes explicite et implicite. On évalue la moyenne des dérivées secondes de l'équation parabolique par rapport à x en j et j+1. On a :

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$

en posant $r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ et en réarrangeant, l'équation s'écrit:

$$r\phi_{i-1,j+1} - 2(1+r)\phi_{i,j+1} + r\phi_{i+1,j+1} = -r\phi_{i-1,j} - 2(1-r)\phi_{i,j} - r\phi_{i+1,j}$$

Fig. : Molécule de l'équation parabolique



Le schéma numérique de la méthode de Crank-Nicholson est donné par les figures et . La méthode converge quelque soit r . On obtient, comme pour la méthode implicite, un système de $(m-2)$ équations à $(m-2)$ inconnues. Le système est résolu à chaque pas de temps.

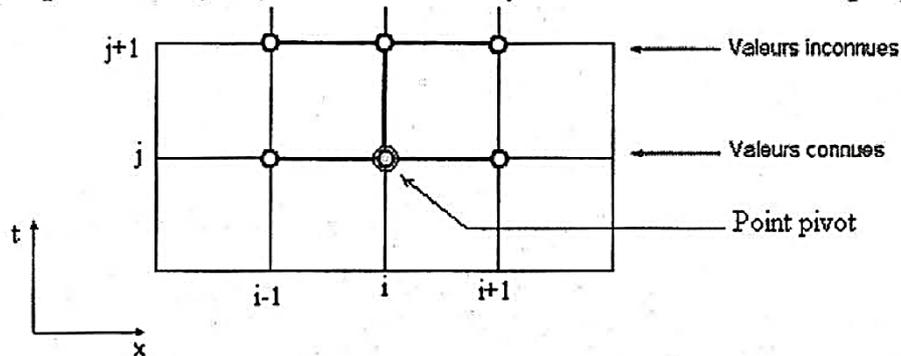


Fig. : Schéma numérique de Crank-Nicholson

Programmation de la méthode de Crank-Nicholson

Utilisant la méthode SOR de résolution du système d'équations, la méthode de Crank-Nicholson est donnée par l'algorithme suivant :

$$T_{i,0} = f(x)$$

Pour $j=1, n-1$

$i=2, m-1$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j+1}(1 - \omega) +$$

$$\omega \frac{rT_{i-1,j} + (2 - 2r)T_{i,j} + rT_{i+1,j} + rT_{i-1,j+1} + rT_{i+1,j+1}}{(2 + 2r)}$$

résoudre pour $T_{i,j+1}$

Fin

Fin

II.2.5. Résolution des problèmes hyperboliques

Formulation

Le problème hyperbolique est donné par l'équation hyperbolique $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

qui satisfait les conditions de Cauchy $y(0, t) = a_1 y + b_1 \frac{\partial y}{\partial x} = f_1(t)$ en $x = 0, t \geq 0$

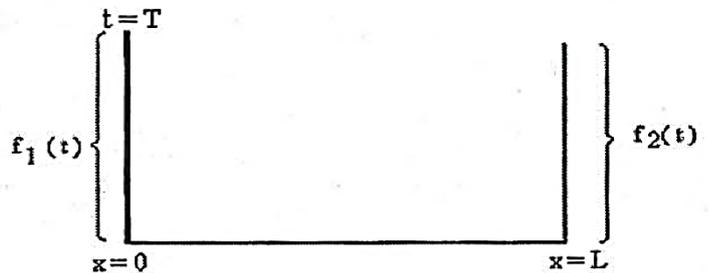
$y(L, t) = a_2 y + b_2 \frac{\partial y}{\partial x} = f_2(t)$ en $x = L, t \geq 0$

et les conditions aux limites initiales $y(x, 0) = g_1(x)$ à $t = 0$

$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g_2(x)$ à $t = 0$

Cette deuxième condition est nécessaire car on a une dérivée seconde en t dans l'équation d'onde.

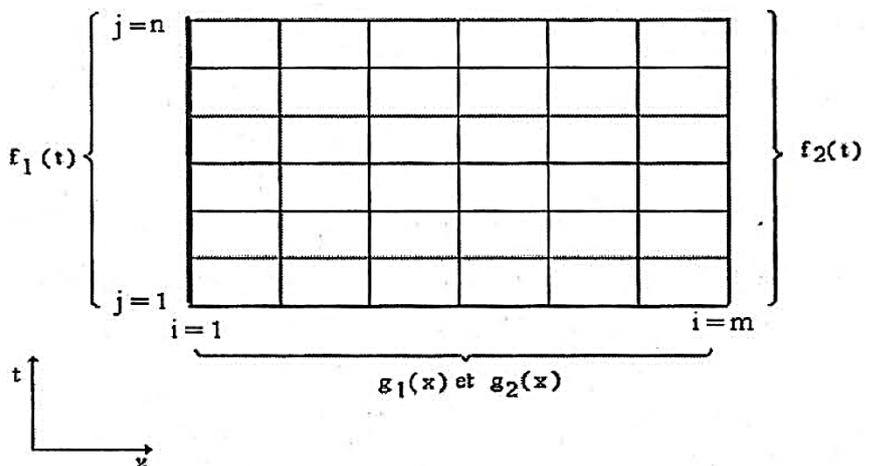
Fig. : Condition aux frontières du problème hyperbolique



Le maillage

Le domaine $\Omega_{x,t}$ est discrétisé selon les relations connues $m = L / \Delta x + 1$ et $n = T / \Delta t + 1$ où T est la durée totale du phénomène étudié. On obtient le maillage suivant :

Fig. : Maillage et conditions limites du domaine $\Omega_{x,t}$



II.2.5.1. La méthode explicite

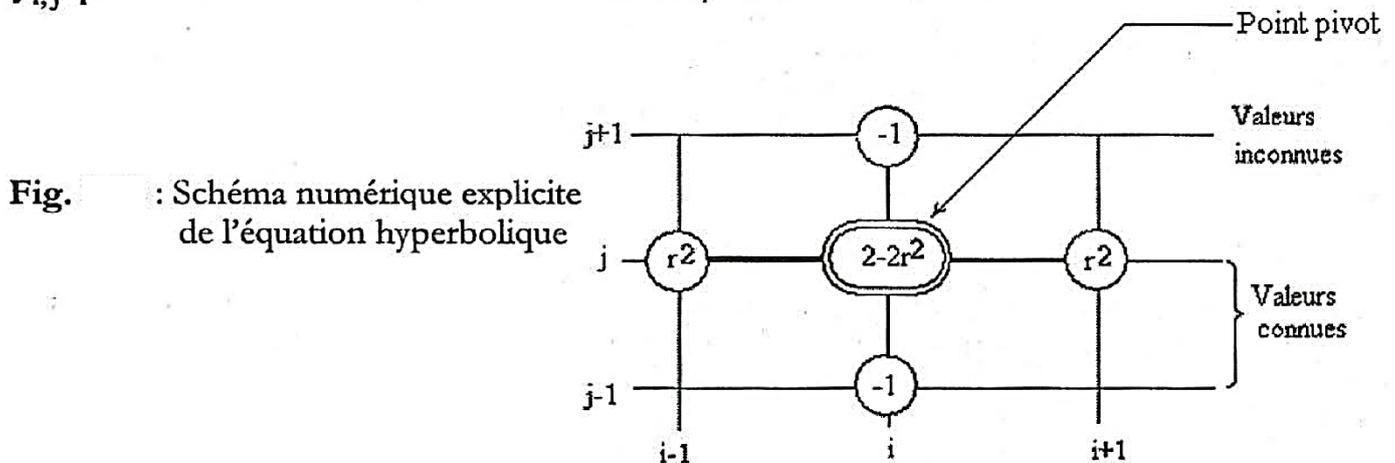
Formulation de la méthode explicite

Utilisant un schéma de différences finies centrées l'équation d'onde s'écrit :

$$c^2 \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{\Delta x^2} = \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{\Delta t^2}$$

soit $y_{i,j+1} = r^2 y_{i-1,j} + 2(1-r^2)y_{i,j} + r^2 y_{i+1,j} - y_{i,j-1}$ où $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$

L'équation est l'équation explicite de résolution du problème hyperbolique. Le schéma numérique correspondante est donné par la figure . La méthode consiste à déterminer à chaque étape de temps l'inconnue $y_{i,j+1}$, les quantités $y_{i-1,j}$, $y_{i,j}$, $y_{i+1,j}$ et $y_{i,j-1}$ contenues dans le second membre de l'équation sont connues.



Il existe cependant une difficulté pour appliquer l'équation explicite à $t = 0$ c'est-à-dire en $j=1$. L'équation s'écrit pour $j=1$ ($i=2, m-1$):

$$y_{i,2} = r^2 y_{i-1,1} + 2(1-r^2)y_{i,1} + r^2 y_{i+1,1} - y_{i,0}$$

Le terme $y_{i,0}$ n'est pas connu. On utilise la condition initiale $\frac{\partial y}{\partial t} = g_2(x)$ pour le déterminer. Utilisant une approximation de différences centrées de la dérivée première, on a:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{y_{i,2} - y_{i,0}}{2\Delta t} = g_2(x_i) \quad \text{D'où} \quad y_{i,0} = y_{i,2} - 2g_2(x_i)\Delta t$$

En substituant cette valeur dans l'équation , on obtient l'équation explicite à $j = 1$

$$y_{i,2} = \frac{1}{2} \left(r^2 y_{i-1,1} + 2(1-r^2)y_{i,1} + r^2 y_{i+1,1} \right) + g_2(x_i)\Delta t$$

On montre que la solution obtenue par la méthode explicite converge si la condition suivante est réalisée $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

Exemple 19 :

Soit le problème hyperbolique : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.6$

avec les conditions aux limites : $\phi(0, t) = 0 \quad \phi(1, t) = 0$

et les conditions initiales: $\phi(x, 0) = \sin \pi x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1$

Résoudre par la méthode explicite en prenant $\Delta x = 0.1$ et montrer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux obtenus par la solution exacte $\phi = \sin \pi x \cos \pi t$.

II.2.5.2. La méthode implicite

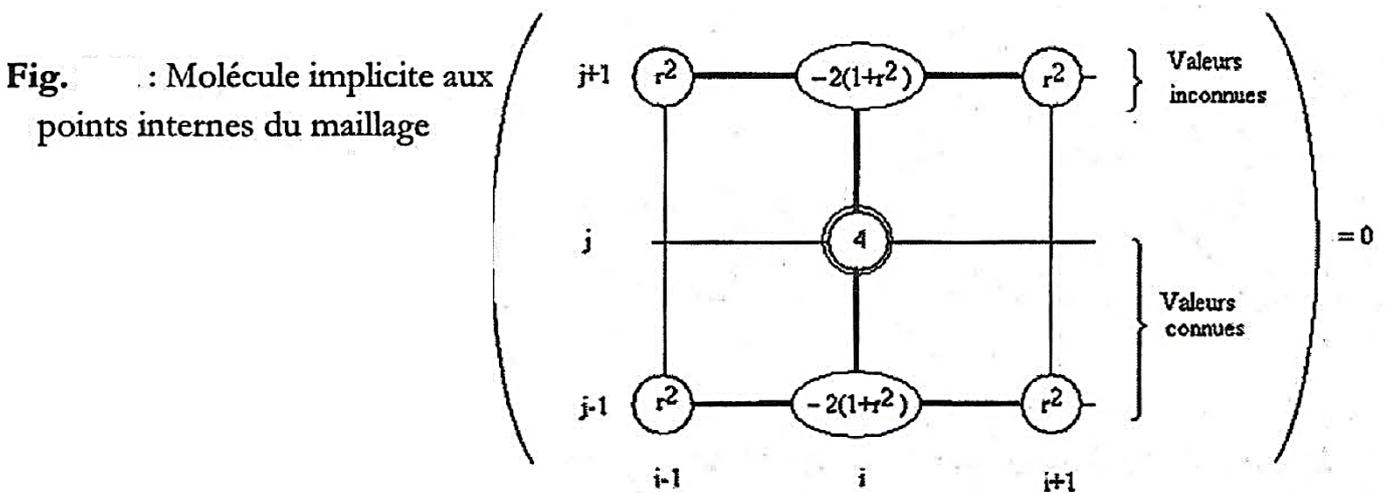
Formulation

La méthode implicite consiste à évaluer la moyenne des dérivées en x (interpolation linéaire de la fonction dérivée seconde aux points (i, j-1) et (i, j+1) de l'équation hyperbolique :

$$\left(\frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{y_{i-1,j-1} - 2y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \right) \frac{c^2}{2} = \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{\Delta t^2}$$

Substituant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, on obtient l'équation implicite et sa forme moléculaire :

$$r^2 y_{i-1,j+1} - 2(1+r^2)y_{i,j+1} + r^2 y_{i+1,j+1} = -4y_{i,j} - r^2 y_{i-1,j-1} + 2(1+r^2)y_{i,j-1} - r^2 y_{i+1,j-1}$$



Calcul implicite à $t = 0$

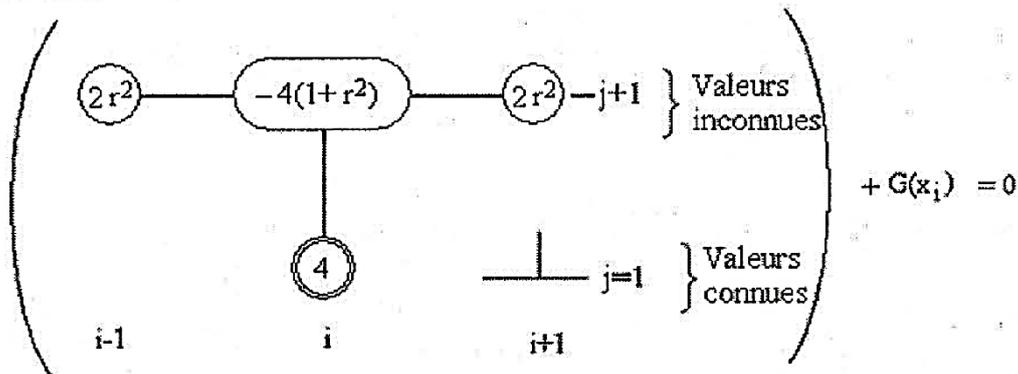


Fig. : Molécule implicite à $t = 0$

Où $G(x_i) = -2r^2 2g_2(x_{i-1})\Delta t + 4(1+r^2)g_2(x_i)\Delta t - 2r^2 g_2(x_{i+1})\Delta t$