



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

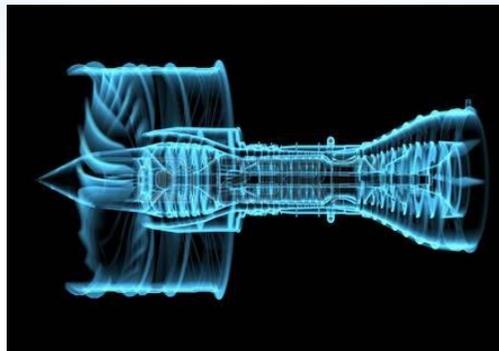


# Cours de Turbomachines Approfondies

Filière : Génie Mécanique  
Spécialité : Energétique

Présentée par :

Dr. ATIA Abdelmalek



Semestre : 2  
 Unité d'enseignement : UEF 1.2.2  
 Matière : Turbomachines approfondies  
 VHS : 45h00 (cours : 1h30, Td : 1h30 )  
 Crédits : 4  
 Coefficient : 2

#### Objectifs de l'enseignement :

Décrire, à partir des notions de base (de turbomachines et de mécanique des fluides) les méthodes de conception, d'analyse et de construction des turbomachines pour permettre aux étudiants la compréhension des écoulements qui s'établissent dans les turbomachines et pour développer des éléments de base pour la conception et la sélection de ces machines.

#### Connaissances préalables recommandées :

Thermodynamique, transfert thermique, mécanique des fluides, Turbomachines

#### Contenu de la matière :

**Chapitre1.** Rappel sur les turbomachines, classification, notion de similarité, nombres sans dimensions et triangles de vitesses, équation d'Euler des turbomachines (3 semaines)

**Chapitre2.** Aérodynamique des grilles d'aubes (3 semaines)  
 2.1 Efforts aérodynamiques (portance et traînée)

2.2 Corrélations pour la conception des grilles d'aubes (solidité, déviation, déflexion,...

**Chapitre3.** Écoulement 2D dans les turbomachines (4 semaines)

3.1 Équation de l'équilibre radial simplifié

3.2 Théorie des disques actuateurs

3.3 Écoulement aube à aube

3.4 Couches limites et notion de transition

**Chapitre4.** Écoulement 3D dans les turbomachines (3 semaines)

4.1 Équations gouvernantes

4.2 CFD pour les turbomachines (applications et limites)

4.3 Écoulement in-stationnaire et interaction Stator-Rotor

4.4 Refroidissement des turbomachines

4.5 Pertes dans les turbomachines (de profils, du aux écoulements secondaires, de

jeu,....

4.6 Techniques de mesure en turbomachines

**Chapitre 5.** Construction des turbomachines (2semaines)  
 5.1 Organes des turbomachines : paliers, accouplements, réducteurs, systèmes de lubrification et d'étanchéité

5.2 Construction des turbines à vapeur : tuyères, ailettes, efficacité d'un étage, corps et diaphragme, rotor, matériau, équilibrage, soupapes et vannes d'admission de vapeur, régulation de vitesse

5.3 Turbines à gaz : compresseur, chambre de combustion, turbine, carburants

5.4 Compresseurs : centrifuges, axiaux, alternatifs, utilisation.

**Mode d'évaluation :** Contrôle Continu : 40%, Examen : 60%.

# Contenu de Cours

#### Connaissances préalables recommandées :

Thermodynamique, transfert thermique, mécanique des fluides, Turbomachines

#### Contenu de la matière :

**Chapitre1.** Rappel sur les turbomachines, classification, notion de similarité, nombres sans dimensions et triangles de vitesses, équation d'Euler des turbomachines (3 semaines)

**Chapitre2.** Aérodynamique des grilles d'aubes

2.1 Efforts aérodynamiques (portance et traînée) (3 semaines)

2.2 Corrélations pour la conception des grilles d'aubes (solidité, déviation, déflexion,...

**Chapitre3.** Écoulement 2D dans les turbomachines (4 semaines)

3.1 Équation de l'équilibre radial simplifié

3.2 Théorie des disques actuateurs

3.3 Écoulement aube à aube

3.4 Couches limites et notion de transition

**Chapitre4.** Écoulement 3D dans les turbomachines (3 semaines)

4.1 Équations gouvernantes

4.2 CFD pour les turbomachines (applications et limites)

4.3 Écoulement in-stationnaire et interaction Stator-Rotor

4.4 Refroidissement des turbomachines

4.5 Pertes dans les turbomachines (de profils, du aux écoulements secondaires, de jeu,....

4.6 Techniques de mesure en turbomachines

**Chapitre 5.** Construction des turbomachines (2semaines)

5.1 Organes des turbomachines : paliers, accouplements, réducteurs, systèmes de lubrification et d'étanchéité

5.2 Construction des turbines à vapeur : tuyères, ailettes, efficacité d'un étage, corps et diaphragme, rotor, matériau, équilibrage, soupapes et vannes d'admission de vapeur, régulation de vitesse

5.3 Turbines à gaz : compresseur, chambre de combustion, turbine, carburants

5.4 Compresseurs : centrifuges, axiaux, alternatifs, utilisation.

## Chapitre II :

# Mécanique des Fluides et Thermodynamiques des Turbomachines

1. Équations Fondamentales des Turbomachines
2. Aérodynamique
3. Similitude des Turbomachines

# 1. Équations Fondamentales des Turbomachines

## Concept de volume de contrôle

L'évaluation des performances globales des turbomachines repose sur une utilisation de l'approche par volume de contrôle telle qu'elle est appliquée aux principes de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. On considère à cet effet, dans un fluide en écoulement, un volume de contrôle (fixe dans l'espace) dans lequel opère le rotor d'une turbomachine. Le volume de contrôle auquel seront appliquées les équations de bilan contient les aubes sur une hauteur  $dr$ . Radialement il est délimité par deux surfaces de courant axisymétriques concentriques, dont celle située à l'extérieure contient les points A, B, C, D. Axialement il est délimité par deux sections en forme de couronnes circulaires de rayon  $r_1$  et d'épaisseur  $dr_1$  en amont de la roue, de rayon  $r_2$  et d'épaisseur  $dr_2$  en aval. Ces deux sections sont suffisamment loin des aubes pour supposer que l'écoulement y est uniforme.

Volume de contrôle déformé  
avec le temps



Différents types de volume  
de contrôle



Concept de volume de contrôle

# 1. Équations Fondamentales des Turbomachines

## Reynolds Transport Theorem

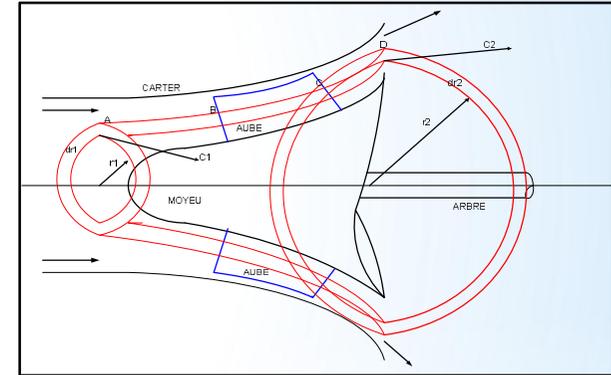
$$\frac{dB}{dt} = \iiint_{cv} \beta \rho d\mathcal{V} + \iint_{cs} \beta \rho \underline{v} \cdot \underline{dA}$$

Total rate of change of B in the fluid system

Rate of change of B stored in the control volume

Net outflow of B across the control surface

## Concept de volume de contrôle



## General balance équation

IN + GENERATION

=

OUT + ACCUMULATION

# The Reynolds Transport Theorem

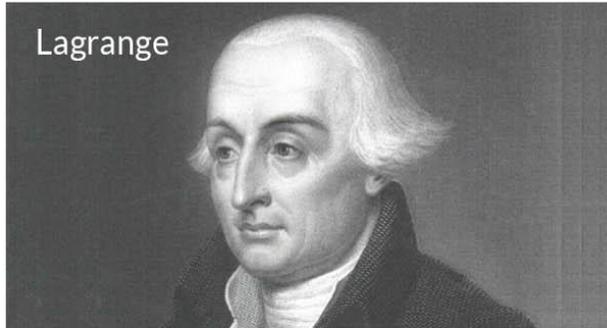
EME 303 - Penn State Hazleton

Dr. Joe Ranalli

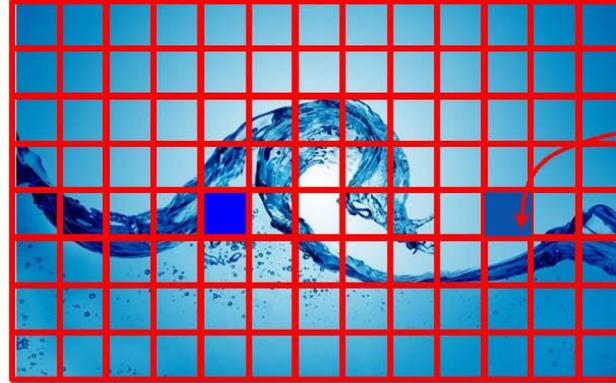
Osborne Reynolds  
( 1842- 1912)

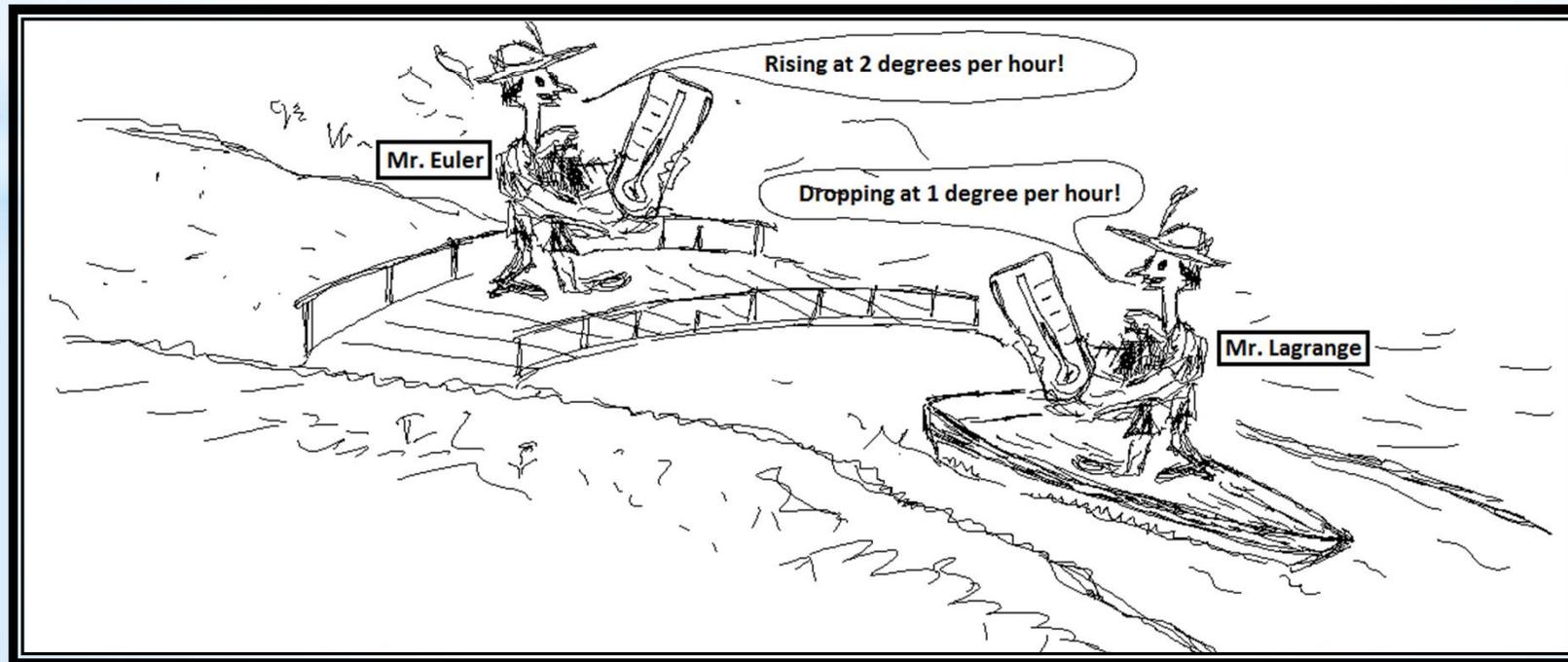
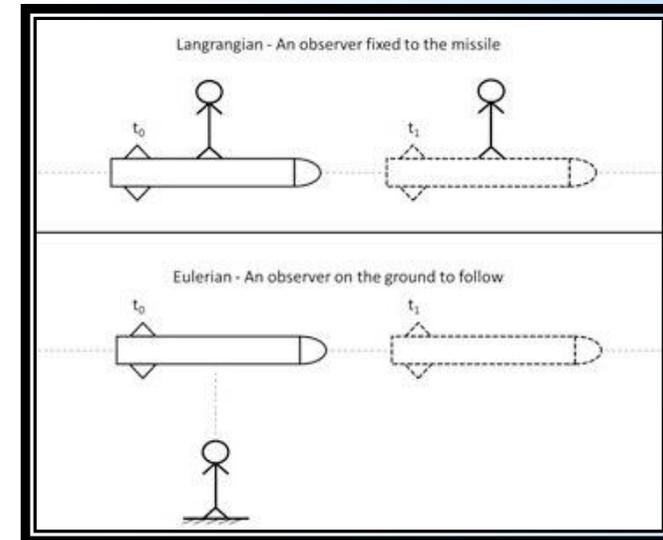
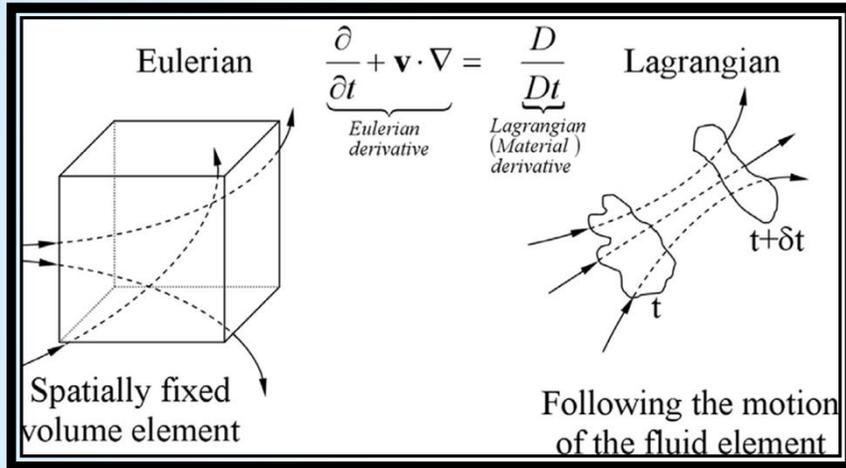


Lagrange



Euler





Lagrangian — Fixed Packet Of Mass — System

Can change size and shape, but we always follow that packet of mass

Eulerian — Fixed Region of Interest — Control Volume

Can change size and shape and mass might cross boundary

Our Physics experience applies to **Systems** not **Control Volumes!**

$$\sum \vec{F}_{sys} = m_{sys} \vec{a}_{sys}$$

$$\sum \vec{F}_{cv} \neq m_{cv} \vec{a}_{cv}$$

BY : KHALID AL-OTAIBI

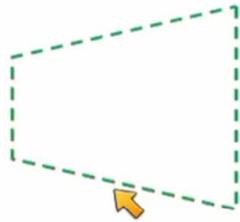


منهج أويلر  
Eulerian

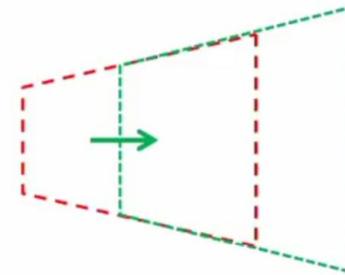
منهج لاغرانج  
Lagrangian

- Define  $B$  to be any extensive property (mass, momentum, volume, energy)
- Define  $b$  to be the intensive version  $\rightarrow b = B/m$

$$B_{\text{sys}} = \int_{\text{sys}} \rho b dV$$

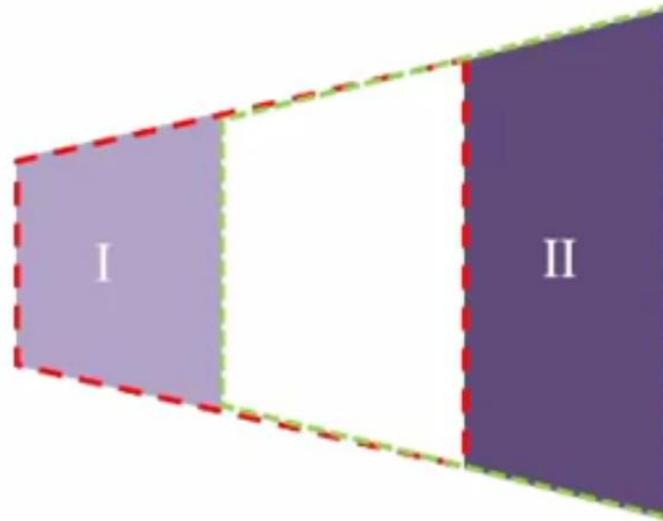


At  $t_0$  — System and CV coincide



At  $t_0$  — System and CV coincide

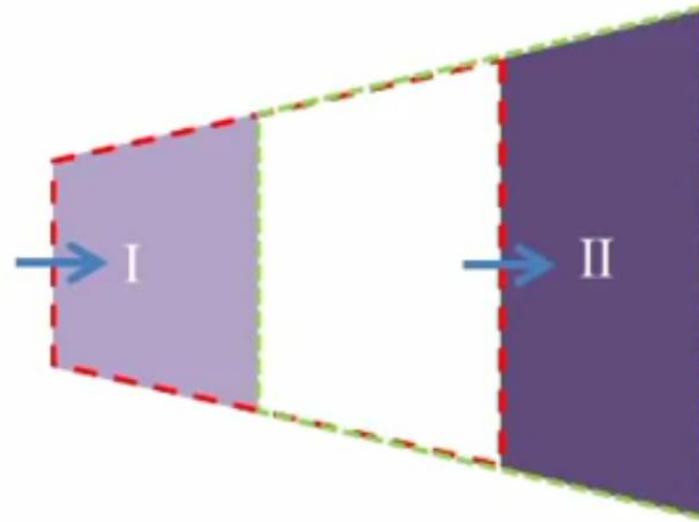
At  $t_0 + dt$  — CV stays stationary, but System has moved



At time  $t_0 + dt$ :

I – Mass that enters **CV** to fill space **System** left

II – Portion of **System** no longer in **CV**



Take limit when  $dt \rightarrow 0$

This means the volume refers to both the **System** and the **CV** at that instant!

$$B_{sys}(t) = B_{cv}(t)$$

$$B_{sys}(t + dt) = B_{cv}(t + dt) - B_I(t + dt) + B_{II}(t + dt)$$

$$\frac{\Delta B_{sys}}{dt} = \frac{B_{sys}(t + dt) - B_{sys}(t)}{dt} = \frac{B_{cv}(t + dt) - B_{cv}(t) - B_I(t + dt) + B_{II}(t + dt)}{dt}$$

For the things that occupy a volume

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{B_{sys}(t + dt) - B_{sys}(t)}{dt} = \frac{DB_{sys}}{Dt}$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{B_{cv}(t + dt) - B_{cv}(t)}{dt} = \frac{\partial B_{cv}}{\partial t}$$

For the things that cross a boundary

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-B_I(t + dt)}{dt} = -\rho A_1 V_1 b_1 = \dot{B}_{in}$$

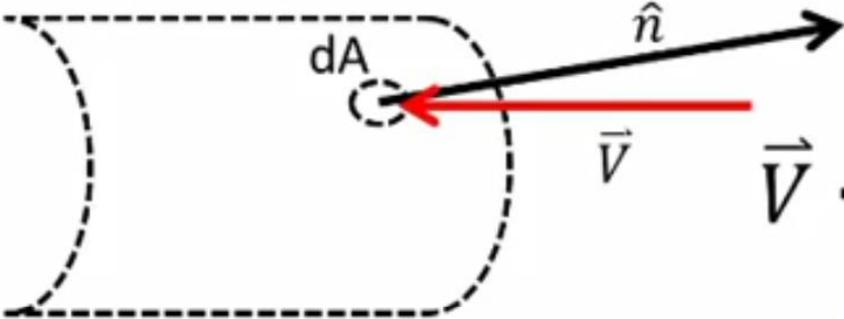
$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + dt)}{dt} = \rho A_2 V_2 b_2 = \dot{B}_{out}$$

$$\underbrace{\frac{DB_{sys}}{Dt}}_{\text{Change within System}} = \underbrace{\frac{\partial B_{cv}}{\partial t}}_{\text{Change within CV}} + \underbrace{\dot{B}_{out} - \dot{B}_{in}}_{\text{Stuff that crossed boundary}}$$

Similar to Laws of Thermodynamics!

# Generalizing

$\hat{n}$  - The surface outward normal with magnitude 1



$$\vec{V} \cdot \hat{n} < 0!$$

Covers inlets and outlets. The dot product is negative if the velocity and surface normal are opposite in direction!

$$\dot{B}_{out} = \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

A yellow arrow points to the 'CS' label in the integral.

# The Reynolds Transport Theorem

$$\underbrace{\frac{DB_{sys}}{Dt}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho b dV}_{\text{Change within CV}} + \underbrace{\int_{cs} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} dA}_{\text{Stuff that crossed the boundary}}$$

Change within moving System

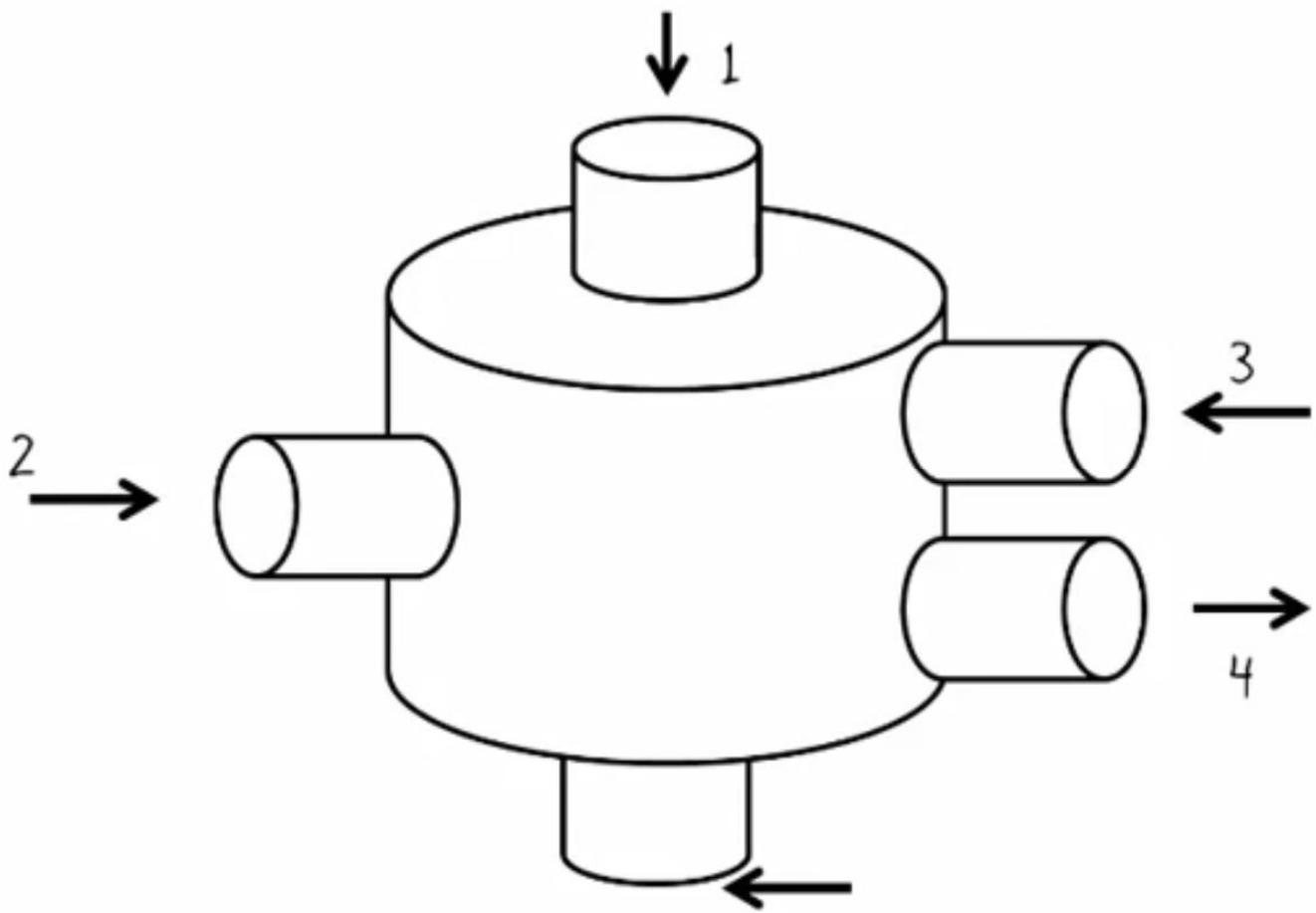
Change within CV

Stuff that crossed the boundary

Describes transport of  $b$  and relates the Lagrangian and Eulerian perspectives

Full screen (normal)

- Find  $\int_{CS} \vec{V} \cdot \hat{n} dA$  for inlets and outlets,  $\vec{V}$  and  $A$  known for each inlet/outlet



5 (Air blows across nozzle)

Common assumptions on the conservation equation

The conservation equation is very general and applies to any property a system can have. However, it can also lead to complicated equations, and so in order to simplify calculations when appropriate, it is useful to apply assumptions to the problem.

**Closed system:** A closed system is one which does not have flows in or out of the substance. Almost always, when one refers to a closed system, it is implied that the system is closed to mass flow but not to other flows such as energy or momentum. The equation for a closed system is:

$$\text{Accumulation} = \text{Generation}$$

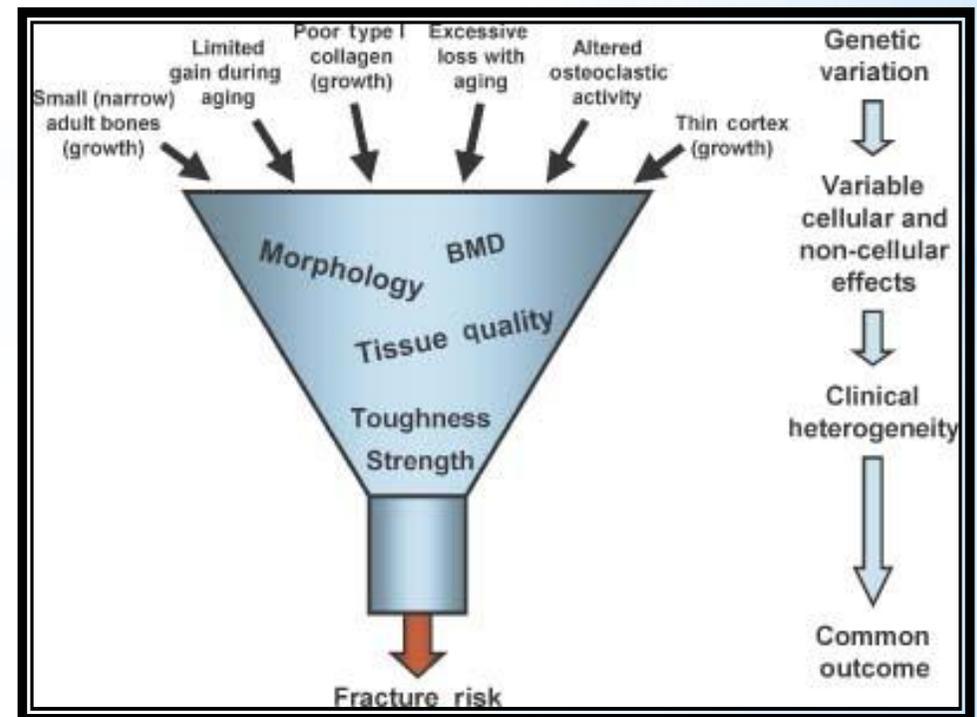
## Systems

Closed System – Matter stays within, Energy can go in/out of system

Open System – Both Matter and Energy can go in/out of system



The opposite of a closed system is an open system in which the substance is allowed to enter and/or leave the system. The funnel in the example was an open system because mass flowed in and out of it.



**No generation:** Certain quantities are always conserved in the strict sense that they are never created or destroyed. These are the most useful quantities to do balances on because then the model does not need to include a generation term: The most commonly-used conserved quantities in this class are mass and energy (other conserved quantities include momentum and electric charge). However, it is important to note that though the total mass and total energy in a system are conserved, the mass of a single species is not (since it may be changed into something else in a reaction). Neither is the "heat" in a system if a so-called "heat-balance" is performed (since it may be transformed into other forms of energy. Therefore, one must be careful when deciding whether to discard the generation term).

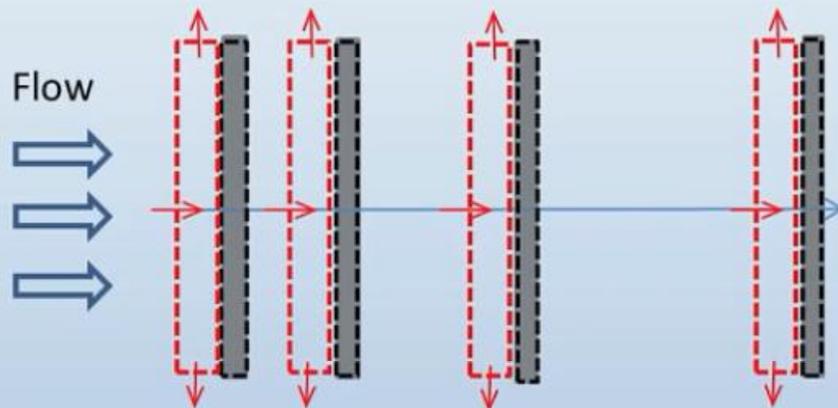
$$\textit{Accumulation} = \textit{In} - \textit{Out}$$

**Steady State:** A system which does not accumulate a substance is said to be at steady-state. Often times, this allows the engineer to avoid having to solve differential equations and instead use algebra.

$$\mathbf{In - Out + Generation - Consumption = 0}$$

All problems in **this courses assume steady state** but it is not always a valid assumption. It is mostly valid after a process has been running in a controlled manner for long enough that all the flow rates, temperatures, pressures, and other system parameters have reached reasonably constant values. It is not valid when a process is first warming up (or an operating condition is changed) and the system properties change significantly over time.

## System versus Control Volume (CV)



- **System** (no mass exchange across boundaries)
- **Control Volume** (mass exchange across boundaries)

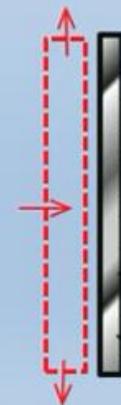
Mass conservation for the **system** →  $\left(\frac{dM}{dt}\right)_{sys} = 0$

Momentum conservation for the **system** →  $\left(\frac{dM\bar{V}}{dt}\right)_{sys} = \sum \bar{F} = \sum \bar{F}_S + \sum \bar{F}_B$

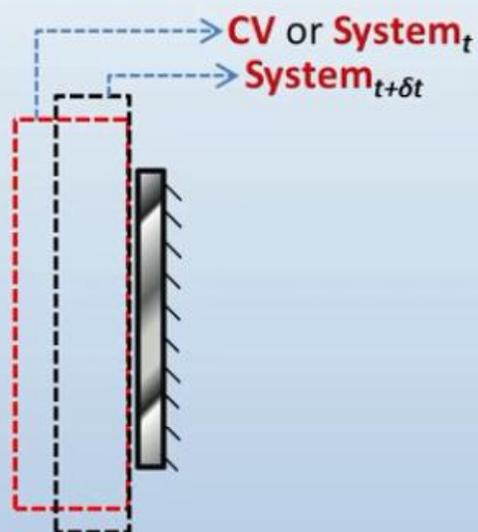
How to write the conservation equations for the **CV**?  
 How to write time derivative of quantities of a system for a **CV**?

Accelerating **CV** → **non-inertial** frame of reference

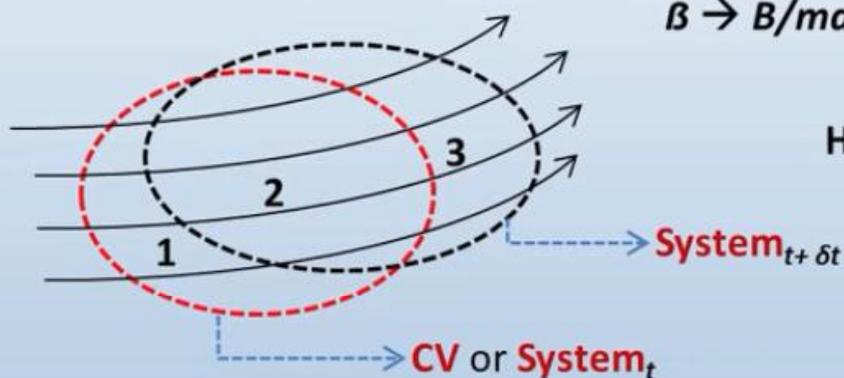
Fixed/constant velocity **CV** → **inertial** frame of reference



## Conservation equations for CV



More generalized CV



$B \rightarrow$  Variable considered (mass, momentum etc)  
 $B \rightarrow B/\text{mass}$

How to write  $\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{system}}$  for a CV?

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{system}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{\text{sys},t+\delta t} - B_{\text{sys},t}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{CV} - B_1 + B_3)_{t+\delta t} - B_{CV,t}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_{CV,t+\delta t} - B_{CV,t})}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_3 - B_1)}{\delta t}$$

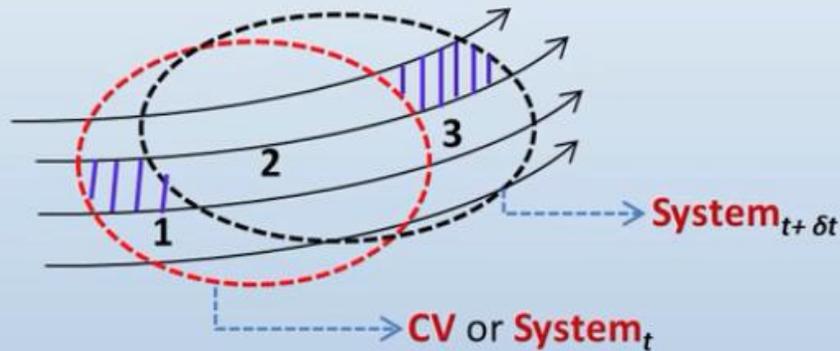
$$B_{\text{sys},t} = B_{CV,t}$$

$$= \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_3 - B_1)}{\delta t}$$

$$B_{\text{sys},t+\delta t} = B_2 + B_3 = (B_{CV,t+\delta t} - B_1) + B_3$$

# Conservation equations for CV

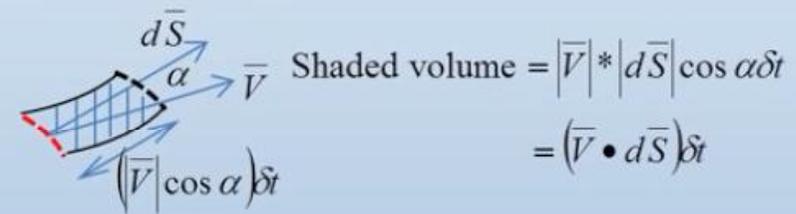
Generalized CV



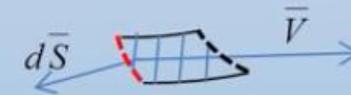
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(B_3 - B_1)}{\delta t}$$

*Element volume in 3*

$$B_{CV} = \int_{CV} \beta \rho dv \quad B_3 = \int_{CS3} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \delta t$$



$$B_1 = - \int_{CS1} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \delta t$$



Net rate at which B exits the CV through the CS

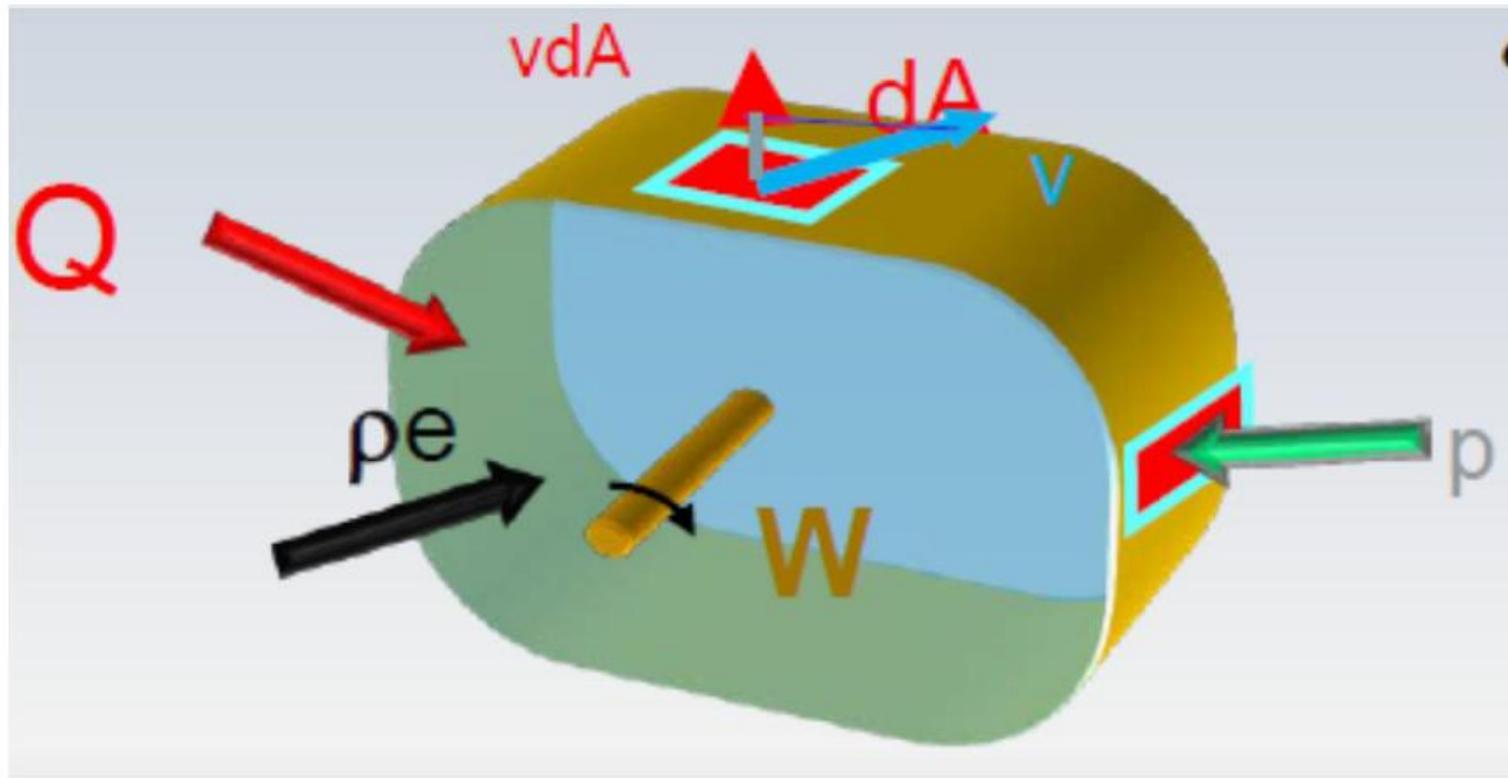
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \beta \rho dv + \int_{CS3} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_{CS1} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \beta \rho dv}_{\text{Rate of change of B in the CV}} + \underbrace{\int_{CS} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}}_{\text{Net rate at which B exits the CV through the CS}}$$

**Reynolds Transport Theorem**

Rate of change of B in the CV

# 1. Équations Fondamentales des Turbomachines



## 1.4.2 Les équations de bilan

Les équations de bilan appliquée au fluide contenu dans le volume de contrôle défini ci-dessus s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} = \iint_S g \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V g \rho dv \quad (1.1)$$

Ou  $G$  représente une grandeur extensive liée au fluide (masse, quantité de mouvement, ...  
et  $g$  sa densité massique.

- **Bilan de masse** : dans le cas d'absence d'une source l'équation de bilan devra :

$$0 = \iint_S \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dv \quad (1.2)$$

- **Bilan de quantité de mouvement**

$$\iint_S \vec{C} (\rho \vec{C} \cdot \vec{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{C} (\rho dv) = \iint_S \vec{F}_s dS + \iiint_V \vec{F}_m \rho dv \quad (1.3)$$

- **Bilan du moment cinétique**

$$\Gamma = \iint_S \vec{r} \wedge \vec{C} (\rho \vec{C} \cdot \vec{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{C} (\rho dv) = \iint_S \vec{r} \wedge \vec{F}_s dS + \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{F}_m \rho dv \quad (1.4)$$

- **Bilan d'énergie**

$$\frac{dq}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = \iint_S (e_0 + \frac{P}{\rho}) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e_0 dv \quad (1.5)$$

$\vec{F}_s$  : Force par unité de surface ;

$\vec{F}_m$  : Force par unité de masse.

$W_s$  : travail effectué à l'intérieur du volume de contrôle, par le rotor et les tensions visqueuses.

$h_0$  : enthalpie totale (  $h_0 = h + \frac{V^2}{2}$  ) ;  $q$  : chaleur transférée ;  $e_0$  : énergie totale.

Le taux de travail  $[dW_s/dt]$  transféré à travers la surface de contrôle est constitué de diverses contributions :

- la puissance transférée par le rotor ( partie la plus importante ) :  $P_a = C.\omega$  ;  
(  $\omega$  : vitesse angulaire de l'arbre ).
- la puissance des forces de pression : elle est incluse dans le terme contenant :  $h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}$  .
- la puissance des forces de viscosité ( frottements disque, frottement visqueux sur les aubes , ... ) ;  
on la désignera par :  $P_f$  .

Dans le cas du mouvement permanent et en ne considérant que l'équation du moment et de la quantité de mouvement (la plus utile pour une machine tournante), on obtient :

- **Equation de continuité**

$$\iint_S \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.6)$$

- **Equation du moment cinétique**

$$M = \iint_S \vec{r} \wedge \vec{C} (\rho \vec{C} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \vec{r} \wedge \vec{F}_S dS \quad (1.7)$$

- **Equation de l'énergie**

$$\dot{q} = P_a + P_f + \iint_S h_0 \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dS \quad (1.8)$$

### 1.4.3 Triangle de vitesse

Si on considère une particule (fluide) traverse la roue d'une turbine centripète, à chaque instant et à chaque point nous avons :

$$\vec{C} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \text{et } \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1.9)$$

$\vec{C}$  : Vitesse absolue de la particule.

$\vec{u}$  : Vitesse d'entraînement ou circonférentielle.  $\vec{w}$  : Vitesse relative de la particule.

$\vec{C}_r$  : Composante circonférentielle (suivant le rayon).  $\vec{C}_u$  : Composante radiale.

$\vec{\omega}$  : Vecteur vitesse instantanée de rotation.  $\vec{r}$  : Rayon.

Les indices 1 et 2 indiquent les sections d'entrée et de sortie de la roue.

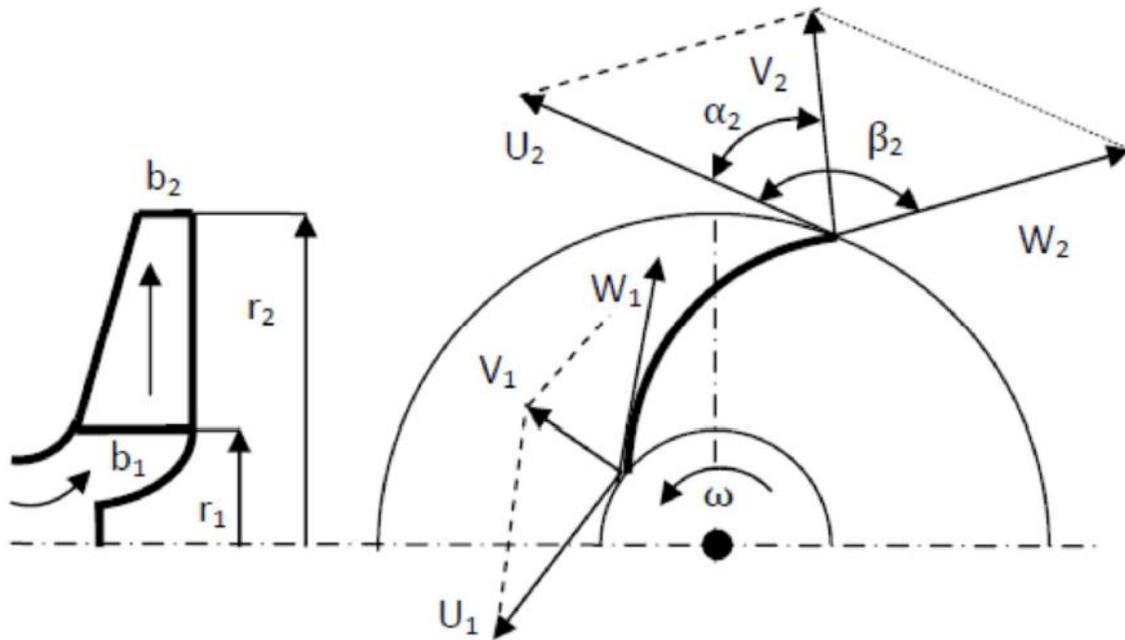


Figure 2.5 roue d'une pompe centrifuge.

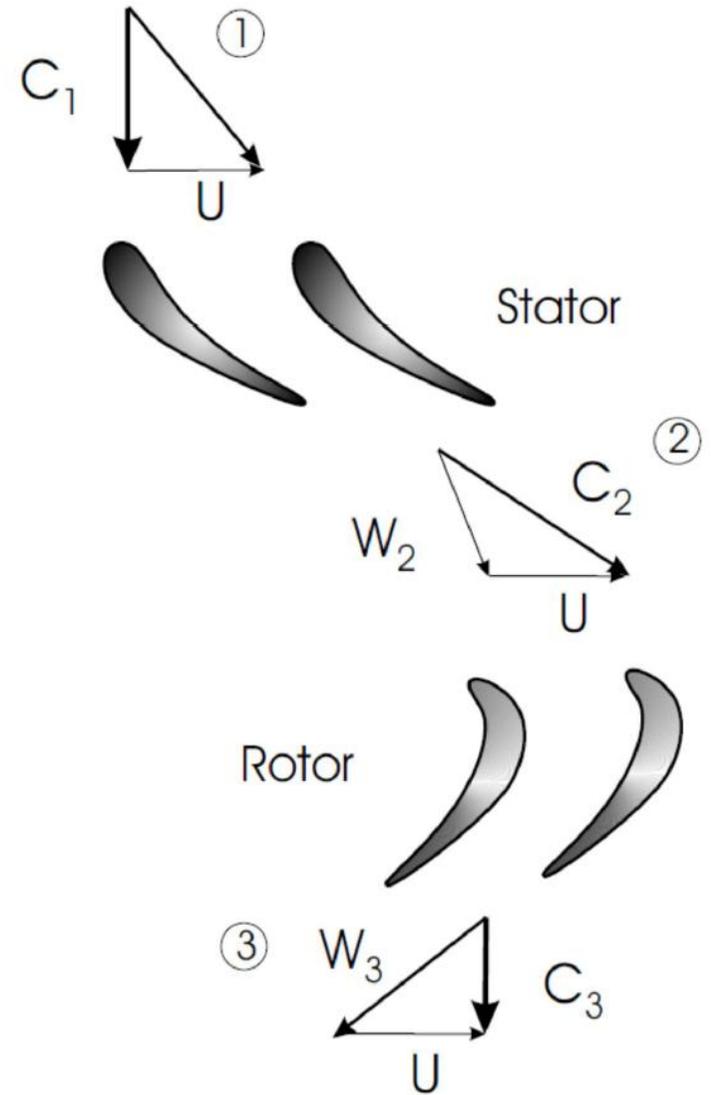


Figure 3.10 Etage d'une turbine

#### **1.4.4 Mécanisme de transfert de moment cinétique et d'énergie**

L'application des équations de bilan aux cas concrets exige la définition des caractéristiques de l'écoulement (vitesses, champ des forces, masse volumique,...) ; Cette démarche, assez complexe, est souvent laissée à des étapes d'analyse très fine des phénomènes d'écoulement et de simulation des performances avec des degrés de précision élevés. Ceci passe par des calculs longs et coûteux qui ne peuvent être réalisés dans des opérations routinières de bureau d'études. Aussi, pour évaluer les performances d'une machine dans un calcul d'avant-projet, on se contente d'une analyse monodimensionnelle de l'écoulement dont le but principal est d'établir des relations entre ces performances (telles que le rendement, la puissance, les variations de température et de pression ...) et la géométrie de la machine.

Dans la suite on admettra les hypothèses suivantes :

- On considère le fluide parfait en écoulement permanent par rapport aux aubages et uniforme en amont et aval de la roue.
- L'écoulement est supposé axisymétrique.
- Le système est adiabatique.

Les équations précédentes seront appliquées à un volume de contrôle contenant une roue de compresseur et on adoptera les notations suivantes :

Système de coordonnées cylindriques :  $r$  - direction radiale ; (axe  $\vec{r}$  )

$\theta$  - direction tangentielle ; (axe  $\vec{u}$  )

$a$  - direction axiale ; (axe  $\vec{a}$  )

$\vec{C}$  : vitesse absolue du fluide ;  $\vec{C} \begin{cases} C_r : \text{composante radiale} \\ C_u : \text{composante tangentielle} \\ C_a : \text{composante axiale} \end{cases}$

$P_a$  : puissance sur l'arbre du rotor ;  $\omega$  : vitesse angulaire du rotor.

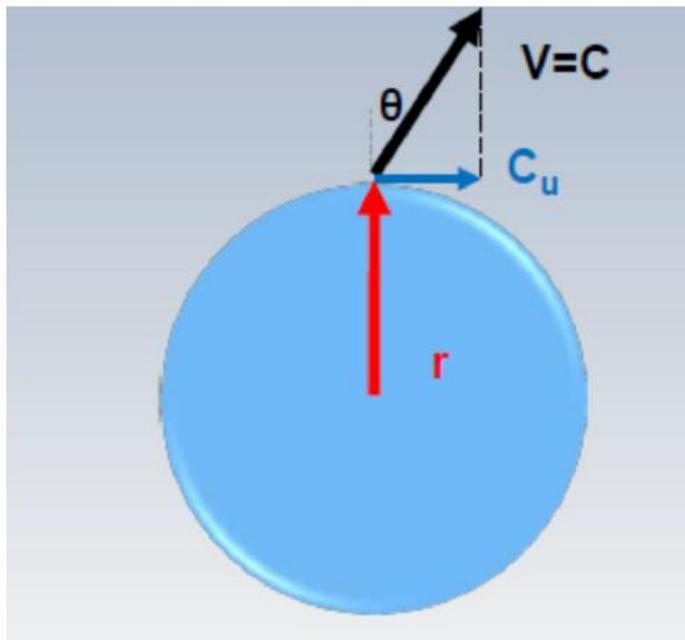


Figure 1.7 vitesse tangentielle  $C_u$

L'apport d'énergie vers le fluide contenu dans le volume de contrôle s'effectue par l'intermédiaire de l'arbre d'entraînement du rotor sous la forme d'un couple mécanique de la forme :  $\vec{r} \wedge \vec{F}_u$  , où  $\vec{F}_u$  représente la composante tangentielle de la force d'aubage .

Ce couple est transmis à l'élément de l'aube, contenu dans le volume de contrôle. L'aube, en mouvement, exerce à son tour une force tangentielle  $F_u$  sur le fluide qui l'entoure.

L'équation de bilan de masse Sur les surfaces de courant axisymétriques s'écrit :

$$\iint_{dS_1} \rho_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{dS_2} \rho_2 \vec{C}_2 \cdot \vec{n}_2 dS \quad (1.11)$$

Le volume de contrôle forme un tube de courant de faible épaisseur 'dr', on peut admettre que les paramètres de l'écoulement sont constants dans les sections :  $dS_1 = 2\pi r_1 dr_1$  et  $dS_2 = 2\pi r_2 dr_2$  . Le débit massique élémentaire sera :

$$\rho_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \rho_2 \vec{C}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = dQ_m \quad (1.12)$$

Seules les composantes tangentielles des forces d'aubages ont un moment par rapport à l'axe de rotation du rotor.

L'action des forces d'aubages peut être remplacée par un champ de forces  $\vec{F}_u$  par unité de masse à l'intérieur du volume de contrôle. La projection de l'équation du moment cinétique s'écrit :

$$\iint_S \vec{r} \wedge \vec{F}_S dS = \iint_{dS_2} r_2 \cdot C_{u2} (\rho_2 \vec{C}_2 \cdot \vec{n}) dS - \iint_{dS_1} r_1 \cdot C_{u1} (\rho_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{n}_1) dS \quad (1.13)$$

L'écoulement étant uniforme dans les sections  $dS_1$  et  $dS_2$ , et en utilisant l'équation de continuité on obtient :

$$\iint_S \vec{r} \wedge \vec{F}_S dS = dQ_m (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}) \quad (1.14)$$

L'intégrale porte sur la contribution des moments de toutes les forces contenues dans le volume de contrôle ; Le moment résultant doit être égal au couple transmis par l'arbre au tube de courant d'épaisseur  $dr$ , D'où :

$$dT = dQ_m (r_2 C_{u2} - r C_{u1}) \quad (1.15)$$

Où  $dT$  est la variation du moment cinétique.

La puissance correspondante sera

$$dP_a = dT \cdot \omega = \omega dQ_m (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}) \quad (1.16)$$

La puissance totale sera

$$P_a = Q_m \omega (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}) \quad (1.17)$$

- Dans une machine axiale,  $r_1 = r_2 \Rightarrow U_1 = U_2 = U$  donc on a :

$$P_a = Q_m U (C_{u2} - C_{u1}) \quad (1.18)$$

Compte tenu des hypothèses et notations ci-dessus, l'équation d'énergie s'écrit :

$$\dot{q} = P_a + P_f + Q_m (h_{02} - h_{01}) \quad (1.19)$$

En fluide parfait ( $\mu = 0 \Rightarrow P_f = 0$ ) , et si l'écoulement est adiabatique ( $\dot{q} = 0$ ) on obtient :

$$\frac{P_a}{Q_m} = h_{01} - h_{02} \quad (1.20)$$

Pour un compresseur :  $P_a < 0 \Rightarrow h_{02} > h_{01}$ .

Pour une turbine :  $P_a > 0 \Rightarrow h_{02} < h_{01}$

En combinant ces relations avec celles du moment cinétique on aura l'équation d'Euler

$$\frac{P_a}{Q_m} = h_{02} - h_{01} = (U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}) \quad (1.21)$$

- Pour les turbomachines incompressibles l'équation précédente devra

$$\frac{P_a}{Q_m} = \frac{P_{02} - P_{01}}{\rho} = g(H_2 - H_1) \quad (1.22)$$

$$g(H_2 - H_1) = (U_2 C u_2 - U_1 C u_1) \quad (1.23)$$

$$H = \frac{U_2 C u_2 - U_1 C u_1}{g} \quad (1.24)$$

Ou H est la Hauteur d'Euler. C'est l'une des équations les plus importantes dans le cours des turbomachines. Cette relation lie l'énergie transférée du fluide aux composantes de la vitesse, elle est aussi applicable aux machines à passage axial.

Une deuxième forme de l'équation d'Euler peut être trouvée à partir de la relation trigonométrique :

$$C^2 + U^2 - 2UC \cos \bar{\alpha} = W^2 \quad (1.25)$$

Alors, les équations d'Euler pour le travail spécifique  $\dot{W}$  et la charge  $H$  deviennent respectivement :

$$\dot{W} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \quad (1.26)$$

$$H = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g} \quad (1.27)$$

Ces deux équations montrent que le transfert d'énergie peut être reparti de différentes manières. Le premier terme indique la variation d'énergie cinétique dans l'écoulement, le deuxième, la variation d'énergie due aux forces centrifuges et le troisième la variation d'énergie due aux vitesses relatives  $W_i$ .

### 1.4.6 Complément et rappelle de thermodynamique pour les turbomachines

La thermodynamique permet l'extension des principes de la mécanique aux milieux continus et déformables que sont les fluides compressibles. Elle aura donc à être utilisée pour les compresseurs et les turbines lorsque les rapports de pression seront suffisamment importants pour que les effets de la compressibilité se manifestent, ce qui sera généralement le cas. Les notions fondamentales présentées dans cette section pourront servir de base à l'étude particulière de chaque type d'appareil développée dans la famille de turbomachine.

- **Equations des gaz parfaits**

Le gaz parfait est un modèle thermodynamique décrivant le comportement des gaz réels à basse pression. Comme pour tout gaz, l'état d'équilibre thermodynamique d'un gaz parfait est fixé pour  $n$  moles de molécules, par deux paramètres macroscopiques, au choix. Les autres paramètres peuvent se calculer à partir des deux paramètres choisis par l'équation d'état. L'équation la plus couramment utilisée est l'équation des gaz parfaits.

$$PV = nRT = m \frac{R}{M} T = mrT \quad (1.30)$$

Où  $M$  est la masse molaire et  $R$  est le constante des gaz parfait ( $R = 8.31 J.mol^{-1}.K^{-1}$ ),  $r$  est le rapport entre la constante universelle  $R$  et la masse moléculaire du gaz

$$r = \frac{R}{M} \quad (1.31)$$

En utilisant  $\rho = \frac{m}{V}$ , On peut écrire l'équation des gaz parfait par la formule suivante

$$P = \rho r T \quad (1.32)$$

Les relations de Mayer pour un gaz parfait sont définies comme suite

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}; r = c_p - c_v; c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}; c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \quad (1.33)$$

L'énergie interne  $u$  est définie comme suite

$$u = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT \quad (1.34)$$

L'enthalpie  $h$  est définie par les relations suivantes

$$h = u + Pv; \quad h = u + \frac{P}{\rho}; \quad h = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \quad (1.35)$$

Le premier principe de thermodynamique est exprimé par l'équation

$$du = dq - dw \quad (1.36)$$

Par l'utilisation des relations suivantes

$$dq = Tds, \quad dw = Pdv \quad \text{et} \quad dh = du + vdP + Pdv \quad (1.37)$$

On peut obtenir l'équation de **Gibbs**

$$Tds = du + Pdv = dh - vdP \quad (1.38)$$

Il s'agit de la formulation du premier principe en fonction de variables d'état uniquement.

- **Entropie**

Le concept d'entropie permet de mesurer les pertes d'énergie et le degré d'irréversibilité dans le système lors une transformation. La relation générale de l'entropie est

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_{gen} \quad (1.39)$$

Le premier terme  $\left( \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \right)$  représente le transfert d'énergie à partir du système ou vers

celui-ci. Il peut prendre les signes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} > 0 \text{ transfert de chaleur vers le système} \\ \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} < 0 \text{ transfert de chaleur depuis le système} \\ \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = 0 \text{ si le système est adiabatique} \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Le deuxième terme ( $S_{gen}$ ) exprime les pertes causées par le mouvement aléatoire des molécules et des collisions les unes avec les autres et avec les parois du système, aussi il produit une quantité d'énergie qui augmente l'entropie. Il peut être réduit mais il ne peut pas être éliminé. Il peut prendre les signes suivants

$$\begin{cases} S_{gen} > 0 \text{ si le système est irréversible} \\ S_{gen} = 0 \text{ si le système est réversible} \\ S_{gen} < 0 \text{ impossible} \end{cases} \quad (1.41)$$

Pour un fluide incompressible

$$s_2 - s_1 = c \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (1.42)$$

Pour un gaz idéal, avec l'aide de l'équation de Gibbs, on peut obtenir les relations suivantes pour la variation d'entropie entre deux états 1-2 :

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + r \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.43)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{v_2}{v_1} + c_v \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.44)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + r \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.45)$$

Pour un processus isentropique on a ( $s_2 - s_1 = 0$ ), d'où la formule ci-dessus peut s'écrire comme suite

$$c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + r \ln \frac{P_2}{P_1} = 0 \Rightarrow \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{r}{c_p}} \Rightarrow \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.46)$$

C'est la relation isentropique lorsque  $c_p = cont$

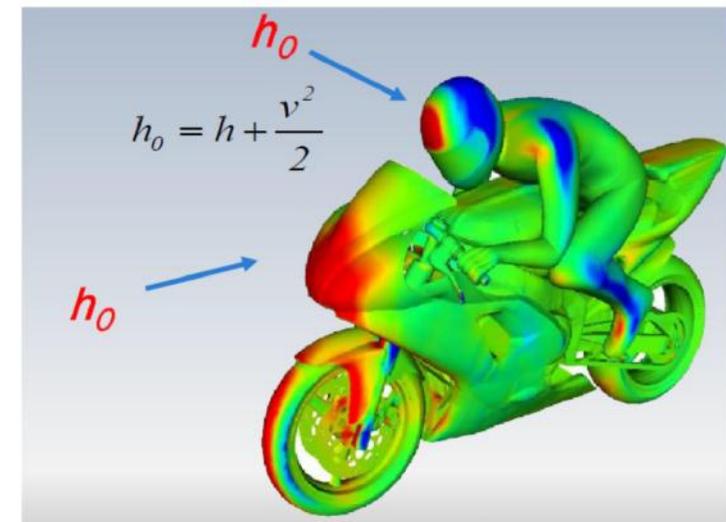
- **Propriétés statique et Propriétés de stagnation (totale)**

On appelle état d'arrêt, total, ou de stagnation, l'état que prend toute variable de l'écoulement si on l'amenait au repos de manière adiabatique et réversible, donc isentropique.

On note par  $h_0$  l'enthalpie d'arrêt, totale ou de stagnation. Elle représente la combinaison de l'énergie cinétique avec l'enthalpie. Elle est définie par la relation suivante :

$$h_0 = h + \frac{C^2}{2} \quad (1.47)$$

Où  $h$  est l'enthalpie de statique.



Et pour un gaz parfait

$$c_p = \text{cte}; \quad h = c_p T; \quad h_0 = c_p T_0 \quad (1.48)$$

Alors

$$T_0 = T + \frac{C^2}{2c_p} \quad (1.49)$$

Où  $T_0$  et  $T$  sont les températures totale et statique, respectivement.

La relation entre la pression totale et statique est exprimée comme suite

$$P_0 = P + \rho \frac{C^2}{2} \quad (1.50)$$

En utilisant les relations de Mayer et l'équation de vitesse de son  $a$

$$a = \sqrt{\gamma r T} \quad (1.51)$$

On obtient

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma-1)C^2}{2a^2}; \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} Ma^2; \quad Ma = \frac{C}{a} \quad (1.52)$$

$Ma$  est le nombre de Mach. Ce nombre est le paramètre dominant dans l'étude de l'écoulement compressible. L'aérodynamique notamment utilise une classification des écoulements en fonction des diverses valeurs du nombre de Mach :

$Ma < 0.3$  : Écoulement incompressible, où les effets de la densité sont négligeables.

$0.3 < Ma < 0.8$  : Écoulement subsonique, où les effets de la densité sont importants mais sans apparition des ondes de choc.

$0.8 < Ma < 1.2$  : Écoulement transsonique, où les ondes de choc apparaissent, en divisant l'écoulement en régions subsonique et supersonique.

$1.2 < Ma < 5.0$  : Écoulement supersonique, où les ondes de choc existent sans aucune région subsonique.

$5.0 < Ma$  : Écoulement hypersonique, où les ondes de choc et d'autres variations des propriétés de l'écoulement sont spécialement fortes.

Ces cinq catégories sont essentiellement utilisées dans les écoulements compressibles externes. Alors, pour les écoulements internes, la question sera simplement si que l'écoulement est subsonique ( $Ma < 1$ ) ou supersonique ( $Ma > 1$ ).

Lors d'un processus adiabatique et réversible (isentropique), pour un gaz idéal, les relations entre les propriétés totales et statiques sont :

$$\frac{P_0}{P} = \left( \frac{T_{0s}}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; \frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_{0s}}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.53)$$

Où l'indice  $s$  a été ajouté pour insister que le passage de l'état statique vers l'état de stagnation s'effectue suivant un processus isentropique.

### 1.4.7 Types de Rendement et travaux

Dans une turbomachine, il a fondamentalement deux types de pertes : les pertes externes entre la machine et l'ambient et les pertes internes de l'écoulement qui sont causées par les forces visqueuses et l'étanchéité de la machine elle-même. Ces différents types de pertes ont donné lieu à diverses définitions de rendement.

- **Diagramme h-s**

Le diagramme h-s est utilisé pour représenter les transformations dans les turbomachines. Dans le plan h-s on peut facilement visualiser et comparer les variations d'enthalpie entre une transformation réelle et la transformation idéale.

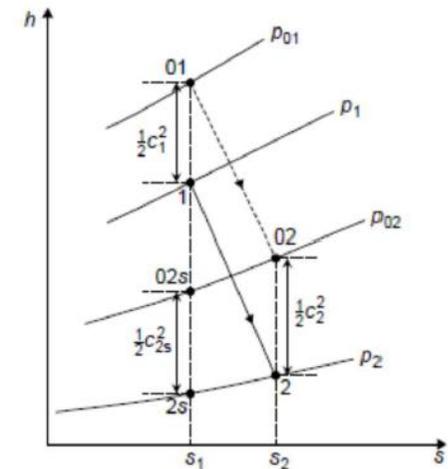


Figure 1.13 Diagramme h-s

- **Rendement totale a totale**

Ce type de rendement est utilisée lors en exploitant l'énergie cinétique à la sortie d'une turbomachine. Ce rendement appelle *total-a-total* est donne par les relations :

$$\eta_{tt} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}} \text{ (pour les Turbines)} \quad (1.54)$$

$$\eta_{tt} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \text{ (pour les compresseur)} \quad (1.55)$$

- **Rendement totale à statique**

Le rendement total-a-statique suppose que la machine n'utilise pas l'énergie cinétique à la sortie ou elle est négligeable. Cette énergie non exploitable est considérée comme une perte et le rendement est donne par :

$$\eta_{ts} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{2s}} \text{ (pour pour les Turbines)} \quad (1.56)$$

$$\eta_{ts} = \frac{h_{2s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \text{ (pour les compresseur)} \quad (1.57)$$

La relation entre les rendements total-a-total et total-a-statique est donne par :

$$\frac{1}{\eta_{tt}} = \frac{h_{01} - h_{02s}}{h_{01} - h_{02}} = \frac{h_{01} - h_{2s} - \frac{V^2}{2}}{h_{01} - h_{02}} = \frac{1}{\eta_{ts}} - \frac{V^2}{2(h_{01} - h_{02})} \quad (1.58)$$

- **Rendement et travail isentropique**

La nature non isentropique de l'écoulement suggère l'utilisation d'un rendement pour prendre en compte les irréversibilités de façon globale. En général, le rendement est défini comme une relation

entre le travail spécifique idéal (possible) et le travail spécifique réel (efficace). La définition dépend s'il s'agit d'une machine qui consomme de l'énergie ou bien d'une machine qui fournit de l'énergie.

➤ **Pour les Turbines**

Le rôle d'une turbomachine motrice est la conversion de l'énergie disponible dans le fluide en énergie mécanique. Puisque les pertes diminuent le travail possible, on définit le rendement isentropique comme le rapport entre le travail possible théorique et l'énergie disponible. Alors,

$$\eta_s = \frac{\text{Travail dans l'arbre}}{\text{Énergie disponible théorique du fluide}} = \frac{W_r}{W_s} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}} \quad (1.59)$$

Où les indices  $r$  et  $s$  indiquent des conditions réelles et isentropiques (idéales), respectivement. Ainsi,  $W_r$  indique le travail réel et  $W_s$  le travail idéal.

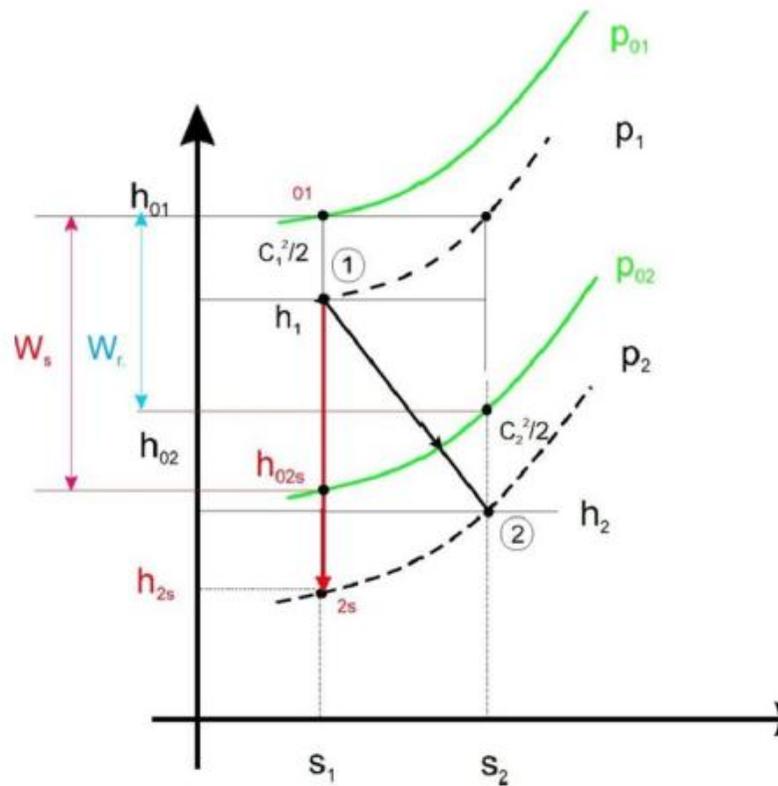
Le travail isentropique d'une turbomachine motrice est calculé comme suite

$$W_s = \Delta h_0 = h_{01} - h_{02s} = c_p (T_{01} - T_{02s}) = c_p T_{01} \left(1 - \frac{T_{02s}}{T_{01}}\right) \quad (1.60)$$

En utilisant les équations  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} r$ ,  $\frac{T_{02s}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$  et  $rT_{01} = \frac{P_{01}}{\rho_{01}}$ , on peut réécrire le

travail isentropique comme suite

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma-1} r T_{01} \left(1 - \frac{T_{02s}}{T_{01}}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_{01}}{\rho_{01}} \left(1 - \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \quad (1.61)$$



**Figure 1.14 Variation d'enthalpies dans une turbine.**

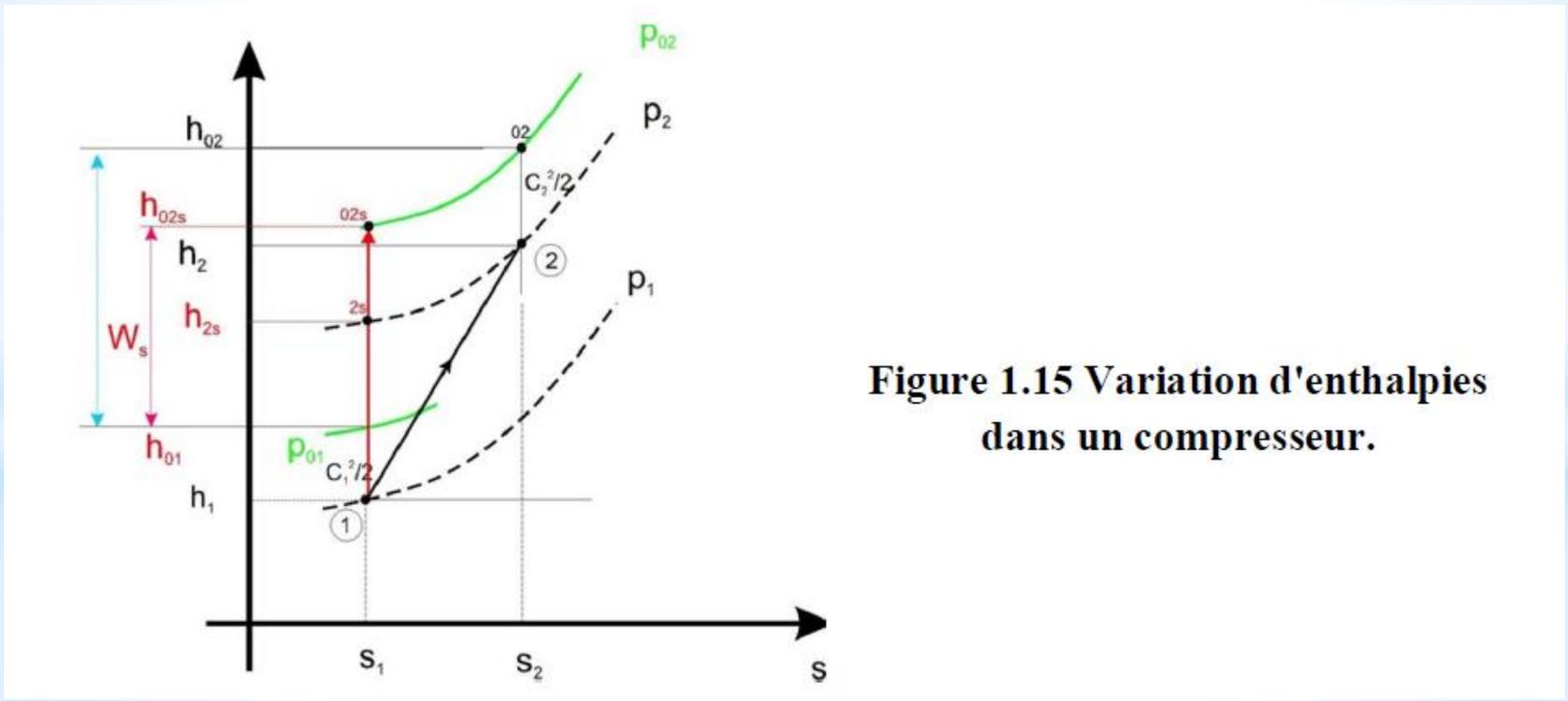
➤ **Pour les compresseurs**

Le rôle d'une turbomachine réceptrice est celui de fournir de l'énergie au fluide. Dans ce cas, le travail réel est plus grand que dans une machine idéale sans pertes. On définit alors le rendement par le rapport entre l'énergie dans le fluide et l'énergie appliquée dans l'arbre.

$$\eta_s = \frac{\text{Énergie du fluide}}{\text{Énergie donnée par l'arbre}} = \frac{W_s}{W_r} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \quad (1.62)$$

Le travail isentropique d'une turbomachine réceptrice est calculé comme suite

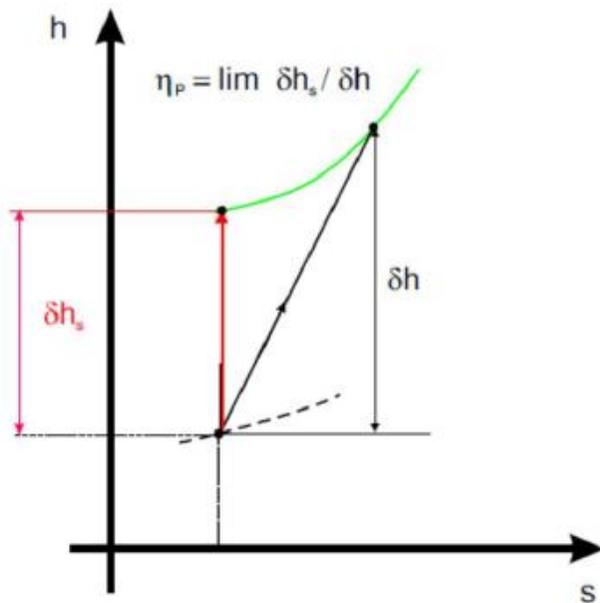
$$W_s = h_{02s} - h_{01} = c_p (T_{02s} - T_{01}) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} r T_{01} \left( \frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (1.63)$$



**Figure 1.15** Variation d'enthalpies dans un compresseur.

- **Rendement polytropique**  $\eta_p$

Le rendement polytropique est un concept théorique au moyen duquel on imagine que la compression (ou l'expansion) a lieu suivant une série d'étapes infinitésimales. Ce rendement équivaut à l'efficacité isentropique d'un étage infinitésimal.



**Figure 1.16 Rendement polytropique élémentaire d'un compresseur.**

➤ **Pour de détente (les Turbines)**

Le rendement polytropique de détente est le rapport entre le travail réel le travail de détente polytropique isentropique. C'est aussi un indicateur qui permet de comptabiliser les irréversibilités lors de l'évolution du fluide. Il s'écrit:

$$\eta_p = \frac{dh}{dh_s} \text{ avec } dh = c_p dT \quad (1.64)$$

A l'aide de l'équation de Gibbs on peut écrire

$$T ds \Big|_{s=const} = dh_s - v dP \quad (1.65)$$

D'ou

$$ds = 0 \Rightarrow dh_s = v dP = \frac{dP}{\rho} = rT \frac{dP}{P} \quad (1.66)$$

Donc

$$\eta_p = \frac{c_p}{r} \frac{dT}{T} \frac{P}{dP} \Rightarrow \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{r}{c_p} \eta_p \int_1^2 \frac{dP}{P} \quad (1.67)$$

Après l'intégration on obtient la relation polytropique pour une détente

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\eta_p \frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\eta_p \frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.68)$$

On peut formuler le rendement isentropique de la turbine en fonction du rendement polytropique comme suite

$$\eta_s = \frac{T_{01} - T_{02}}{T_{01} - T_{02s}} = \frac{1 - T_{02}/T_{01}}{1 - T_{02s}/T_{01}} = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\eta_p \frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\eta_p \frac{1-\gamma}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = \frac{1 - (\chi)^{\eta_p \frac{1-\gamma}{\gamma}}}{1 - (\chi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \quad (1.69)$$

Ou  $\chi = \frac{P_1}{P_2}$  est le facteur de détente.

- **Rendement polytropique de compression (les compresseurs)**

Le rendement polytropique est le rapport entre le travail de compression polytropique réversible et le travail réel. Aussi C'est un indicateur qui permet de comptabiliser les irréversibilités de la transformation fluide. Il s'écrit:

$$\eta_p = \frac{dh_s}{dh} \text{ avec } dh = c_p dT \text{ et } dh_s = rT \frac{dP}{P} \quad (1.70)$$

Si on suit la même démarche précédente, on obtient la relation polytropique pour une compression, c.-à-d.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{r}{\eta_p c_p}} \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\eta_p \gamma}} \quad (1.71)$$

Aussi on peut formuler le rendement isentropique du compresseur en fonction du rendement polytropique comme suit

$$\eta_s = \frac{T_{01} - T_{02s}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{1 - T_{02s}/T_{01}}{1 - T_{02}/T_{01}} = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\eta_p \gamma}}} = \frac{1 - \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\eta_p \gamma}}} \quad (1.72)$$

où  $\varepsilon = \frac{P_2}{P_1}$  est le facteur de compression.

- **Rendement mécanique**  $\eta_m$

Ce rendement caractérise les pertes par friction entre les composantes mécaniques et se traduit par une relation entre le travail spécifique utile et le travail fourni au rotor.

$$\eta_m = \frac{\text{énergie disponible sur l'arbre}}{\text{énergie fournie au rotor}} \quad (\text{pour une turbomachine motrice}) \quad (1.73)$$

$$\eta_m = \frac{\text{énergie fournie au rotor}}{\text{énergie disponible sur l'arbre}} \quad (\text{pour une turbomachine réceptrice}) \quad (1.74)$$

- **Rendement volumétrique**  $\eta_v$

Dans les machines radiales l'espacement entre composantes fixes (le carter) et mobiles (le rotor) permet l'apparition d'un débit de recirculation  $\dot{m}_r$  entre ces parties. Ce débit modifie celui qui traverse le rotor en le faisant plus grand que le débit  $\dot{m}$  fournit par le système.

$$\eta_v = \frac{\dot{m} - \dot{m}_r}{\dot{m}} \quad (\text{pour une turbomachine motrice}) \quad (1.75)$$

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_r} \quad (\text{pour une turbomachine réceptrice}) \quad (1.76)$$

- **Rendement globale**  $\eta_g$

Le rendement global est défini par

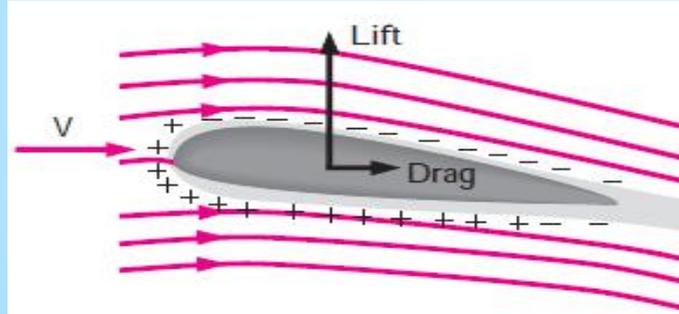
$$\eta_g = \eta_{tt} \cdot \eta_m \quad \text{ou} \quad \eta_g = \eta_{ts} \cdot \eta_m \quad (1.77)$$

On note que le rendement volumétrique n'apparaît pas dans ces expressions puisque toute perte autre que mécanique est comprise dans le rendement interne soit total-a-total ou total-a statique.

# Aérodynamique

L'aérodynamique (Écouter) est une branche de la dynamique des fluides qui porte principalement sur la compréhension et l'analyse des écoulements d'air, ainsi qu'éventuellement sur leurs effets sur des éléments solides qu'ils environnent. L'aérodynamisme (terme non scientifique) qualifie l'apparence d'un corps en mouvement dans l'air et sa résistance à l'avancement.

L'aérodynamique s'applique aux véhicules en mouvement dans l'air (aéroplanes, automobiles, trains), aux systèmes de propulsion (hélices, rotors, turbines, turboréacteurs), aux installations fixes dans un air en mouvement subissant les effets du vent (bâtiments, tours, ponts) ou destinés à la production d'énergie (éoliennes), aux systèmes mécaniques transformant une énergie aérodynamique en énergie mécanique et vice-versa (turbines, compresseurs).

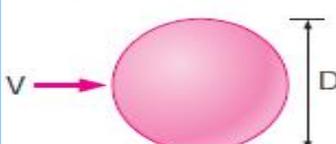
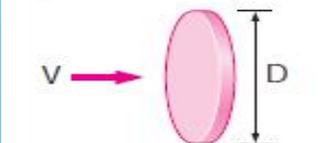
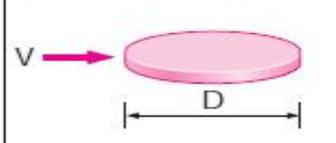


Coefficient de traînée:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

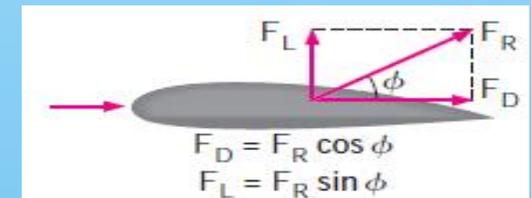
Coefficient de portance:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

<p><b>Sphere</b></p>  <p><math>C_D = 24/Re</math></p>	<p><b>Hemisphere</b></p>  <p><math>C_D = 22.2/Re</math></p>
<p><b>Circular disk (normal to flow)</b></p>  <p><math>C_D = 20.4/Re</math></p>	<p><b>Circular disk (parallel to flow)</b></p>  <p><math>C_D = 13.6/Re</math></p>



Les vents violents abattent les arbres, les lignes électriques et même les gens à cause de la force de traînée.



Carrosserie semi-fastback



Carrosserie hatchback



Forme		Coefficient de traînée
Sphère	→ 	0.47
Demi-sphère	→ 	0.42
Cube	→ 	1.05
Corps profilé	→ 	0.04
Semi-corps profilé	→ 	0.09

Mesures des coefficients de traînée

## Types d'aérodynamique

Le champ d'études peut se subdiviser en aérodynamique incompressible et compressible en fonction du nombre de Mach, c'est-à-dire en fonction du rapport entre la vitesse de l'écoulement et celle du son.

L'**aérodynamique incompressible** concerne les écoulements pour lesquels le nombre de Mach est inférieur à 0,2 environ, ce qui autorise certaines hypothèses simplificatrices.

L'**aérodynamique compressible** quant à elle se subdivise en **aérodynamique :**  
**subsonique** à Mach  $< 1$ , ce qui correspond à une vitesse d'écoulement localement supérieure à la vitesse du son ;

**supersonique** à Mach entre 1 et 5 et **hypersonique** au-delà.

## Modèle mathématique

L'aérodynamique est une science qui fait partie de la mécanique des fluides, appliquée au cas particulier de l'air. À ce titre, les modèles mathématiques qui s'appliquent sont :

les équations de Navier-Stokes lorsque les effets visqueux ne sont pas négligeables. Le paramètre principal quantifiant ces effets est le nombre de Reynolds ;

les équations d'Euler ou de fluide parfait, lorsque les effets visqueux sont négligeables ;  
l'équation d'état du gaz (modèle du gaz parfait pour l'air).

# Efforts aérodynamiques

## Forces

Le champ de pression s'exerçant sur un obstacle induit globalement un torseur d'efforts où l'on considère généralement :

### une force de traînée

$F_x$ , parallèle à la direction moyenne de l'écoulement ;

### une force de dérive

$F_y$ , perpendiculaire à la direction moyenne de l'écoulement, dans le plan horizontal ;

### une force de portance

$F_z$ , perpendiculaire à la direction moyenne de l'écoulement, dans le plan vertical.

L'expression de la force est de la forme générale :

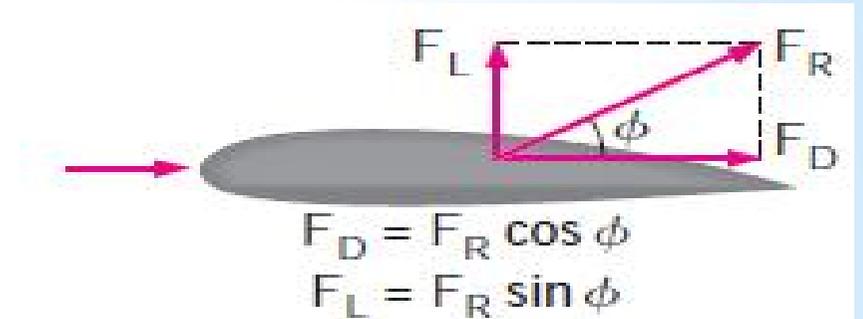
$$F = q \times S \times C$$

$q$  étant la pression dynamique,  $q = \frac{1}{2} \times \rho V^2$

d'où :  $F = \frac{1}{2} \times \rho \times V^2 \times S \times C$

$\rho$  (rhô) = masse volumique de l'air ( $\rho$  varie avec la température et la pression) ;

- $S$  = surface de référence ;
- $C$  = coefficient aérodynamique ;
- $V$  = Vitesse de déplacement.



Forme		Coefficient de traînée
Sphère	→ 	0.47
Demi-sphère	→ 	0.42
Cube	→ 	1.05
Corps profilé	→ 	0.04
Semi-corps profilé	→ 	0.09

Mesures des coefficients de traînée

# L'AILE DANS UN FLUX D'AIR

## Introduction

Lorsque l'on étudie le comportement d'une aile, on considère qu'une aile se déplaçant dans une masse d'air (avion en vol) est équivalent à une masse d'air se déplaçant autour de l'aile fixe (soufflerie). Ce qui importe est donc le mouvement relatif du corps par rapport à l'air.

## Plaques planes inclinées

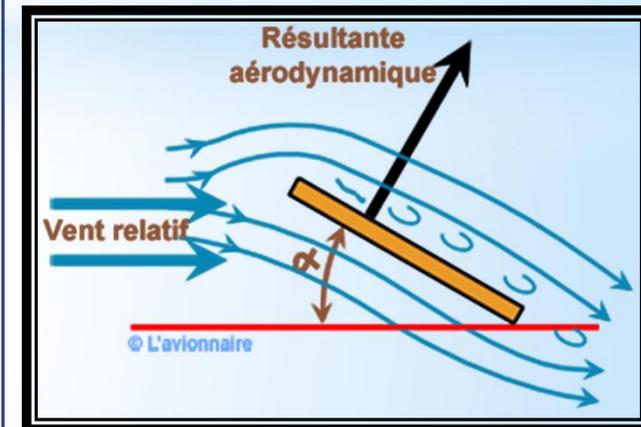
Nous avons vu à la page Ecoulement de l'air qu'une plaque plate disposée parallèlement aux filets d'air est le siège d'une résistance minimale due simplement au frottement de l'air sur les deux parois de la plaque. Mais qu'en plaçant cette plaque perpendiculaire à l'écoulement de l'air nous constatons une forte pression à l'avant de cette plaque et dépression à l'arrière avec effet tourbillonnaire.

Inclinons maintenant cette plaque dans une position intermédiaire, c'est à dire faisant un angle  $\alpha$  avec la direction de l'écoulement d'air, appelé vent relatif. Cet angle est appelé angle d'attaque ou incidence.

Cette fois la force qui s'exerce sur la plaque n'est plus horizontale, mais est inclinée vers l'arrière : on l'appelle alors : résultante aérodynamique. Et cette résultante aérodynamique dépendra du nombre de Mach (vitesse), de la forme de profil d'aile, de l'angle d'attaque et de l'effet de la couche limite.

La résistance de l'air sur la plaque est une force unique, mais elle peut se décomposer en deux force:

- une composante horizontale parallèle au sens de l'écoulement qui constitue la traînée
- une composante perpendiculaire à cette dernière, dirigée vers le haut, que l'on appelle la portance



## Écoulement autour d'une aile

La résultante aérodynamique Lettre Ra est donc générée par l'ensemble des surpressions à l'intrados et dépressions à l'extrados, elle augmente avec la finesse et se déplace suivant l'angle d'incidence, le point d'application de la résultante aérodynamique s'appelle le centre de poussée .

Cette résultante aérodynamique Lettre Ra peut se décomposer en:

- une force perpendiculaire à la vitesse, appelée portance Lettre Rz
- une force parallèle à la vitesse appelée traînée Lettre Rx

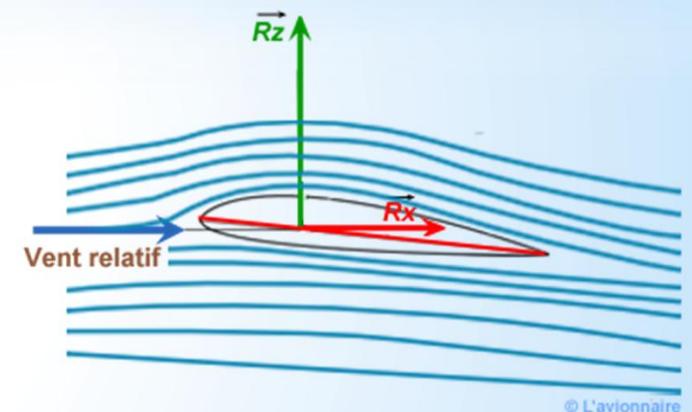
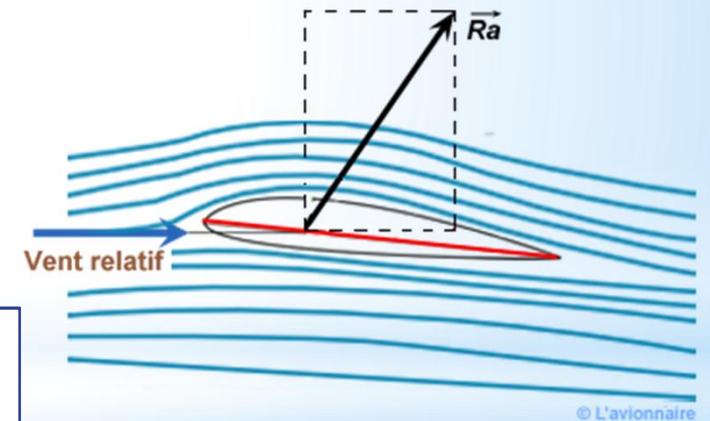
Ces deux composantes dépendent de:

- $\rho$  la masse volumique de l'air (en  $\text{kg/m}^3$ )
- S la surface alaire de l'aile en  $\text{m}^2$
- V la vitesse de l'écoulement de l'air sur l'aile
- Cz pour la portance et Cx pour la traînée

En vol rectiligne horizontal stabilisé :

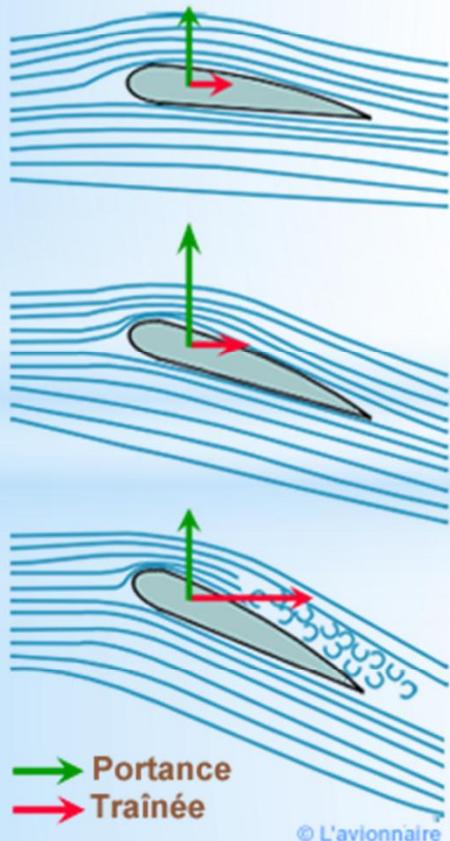
L'intensité de la portance est donnée par la formule:  $Rz = \frac{1}{2} \rho S V^2 Cz$

L'intensité de la traînée est donnée par la formule:  $Rx = \frac{1}{2} \rho S V^2 Cx$



## Influence de l'angle d'incidence

L'angle d'incidence est l'angle formé entre la corde du profil et le vent relatif. Il est noté  $\alpha$

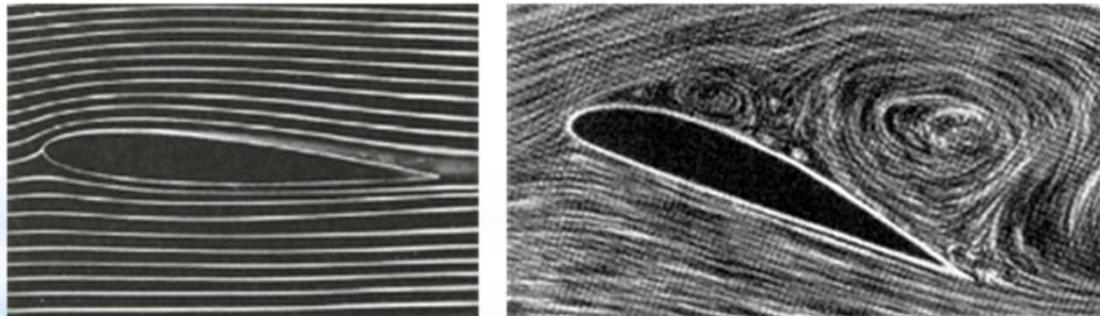


Lorsqu'un corps se trouve dans un flux d'air, celui-ci "s'ouvre" devant pour le contourner de tous les côtés, et se "referme" derrière. L'endroit où le flux d'air "s'ouvre", et celui où le flux d'air se "referme" s'appellent les lignes de séparation qui se trouvent juste devant les points d'arrêt. Au point d'arrêt lui-même, appelé également point de stagnation la vitesse du flux est égale à zéro.

Lorsqu'un profil aérodynamique tel une aile se trouve dans une flux d'air avec un angle d'incidence approprié, il se crée une différence entre les sommes de vitesse des particules d'air s'écoulant le long de l'extrados et de l'intrados. Cette différence appelée circulation est à l'origine de la portance aérodynamique. La somme des vitesses d'écoulement est plus grande sur l'extrados que sur l'intrados.

Une augmentation de l'incidence accroît la circulation donc la portance, jusqu'à la position où la dépression sur l'extrados diminue brutalement suite au décollement des filets d'air et l'aile "décroche".

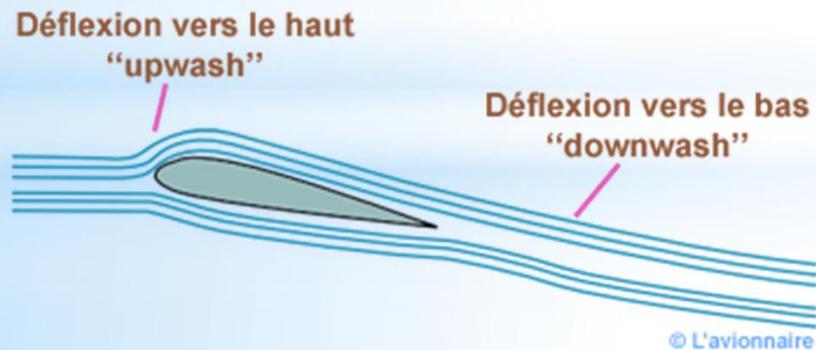
A gauche une aile à faible incidence. A droite une aile à forte incidence à la limite du décrochage.



Source: english Wikipedia....@Jaganath

## Comment la portance est-elle créée

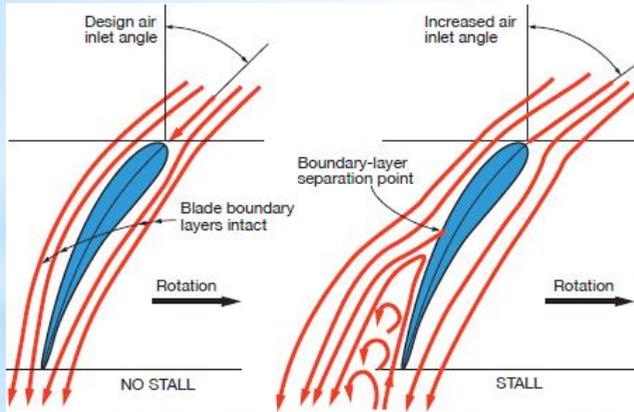
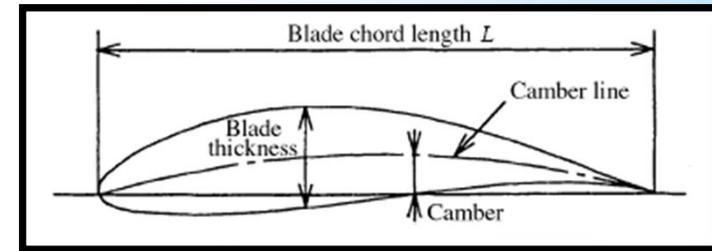
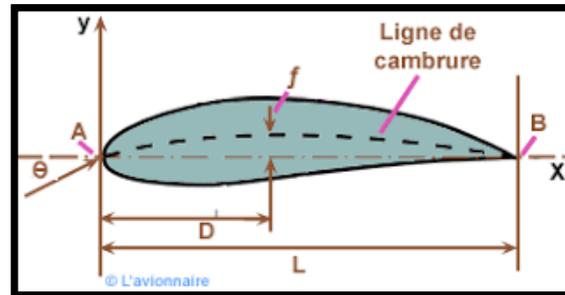
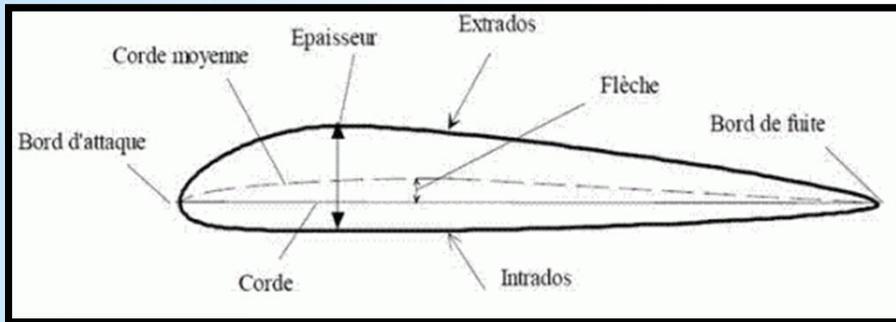
La façon dont un objet génère de la portance est très complexe et ne se prête pas à la simplification. L'aile produit une circulation d'air en fonction de son angle d'attaque (et sa Vitesse). Cette circulation de l'air au-dessus de l'aile se déplace plus vite que l'air ambiant. Ce qui provoque une faible pression (dépression) au-dessus de l'aile en conformité avec le principe de Bernoulli. Cette faible pression "tire" vers le haut sur l'aile et "tire" vers le bas le flux d'air, conformément à toutes les lois de Newton. Il y a donc une déflexion vers le haut à l'avant de l'aile et une déflexion vers le bas en arrière de l'aile.



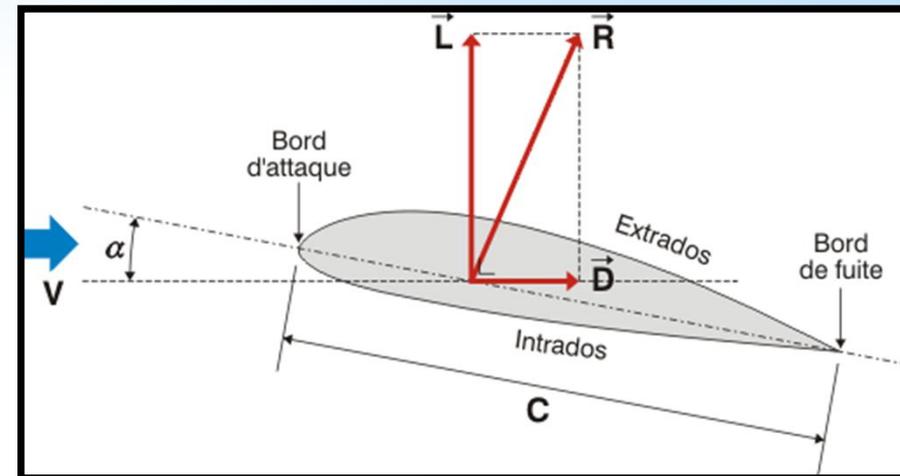
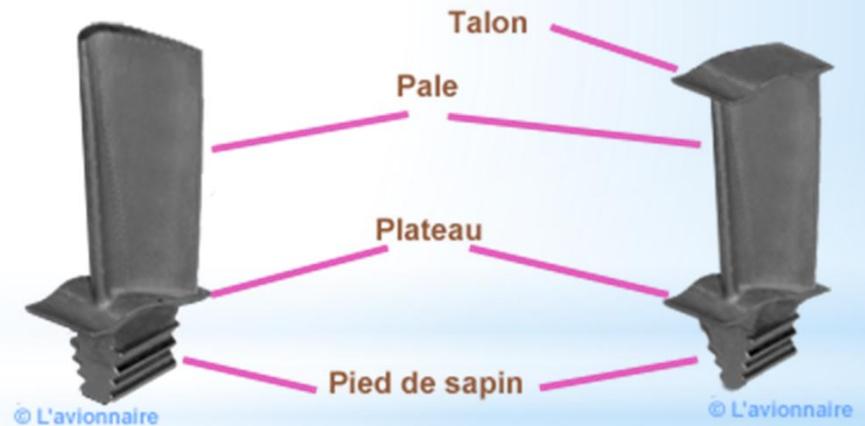
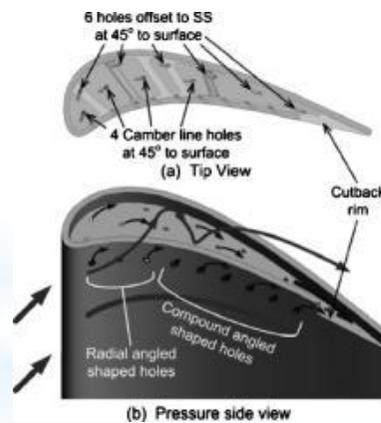
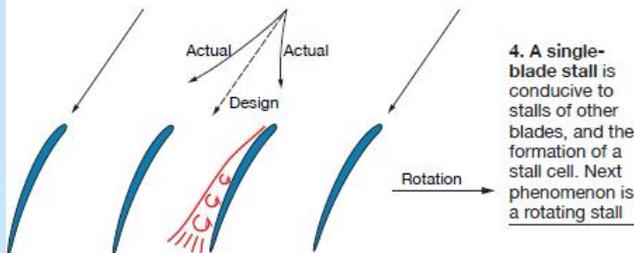
<http://airtoair.net/gallery-vortices.htm>

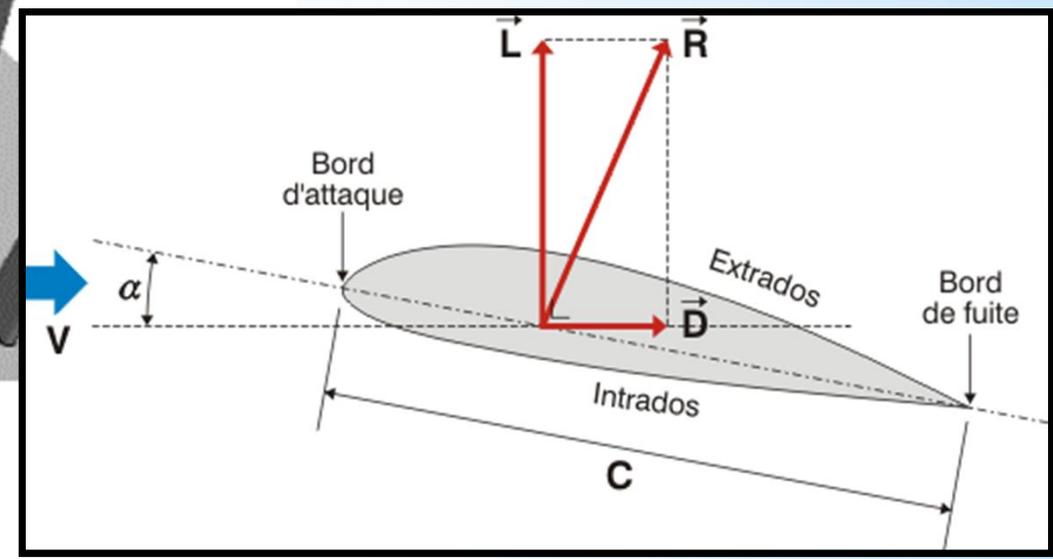
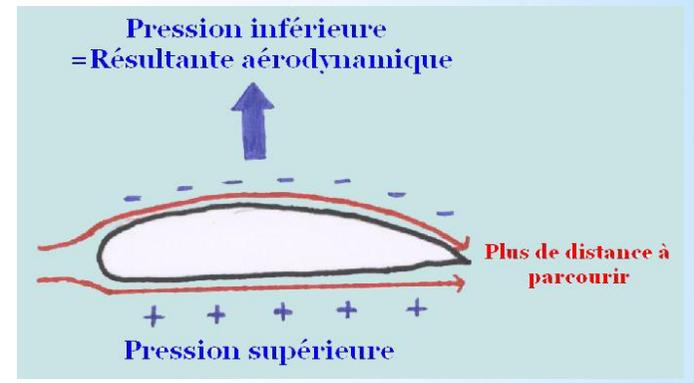
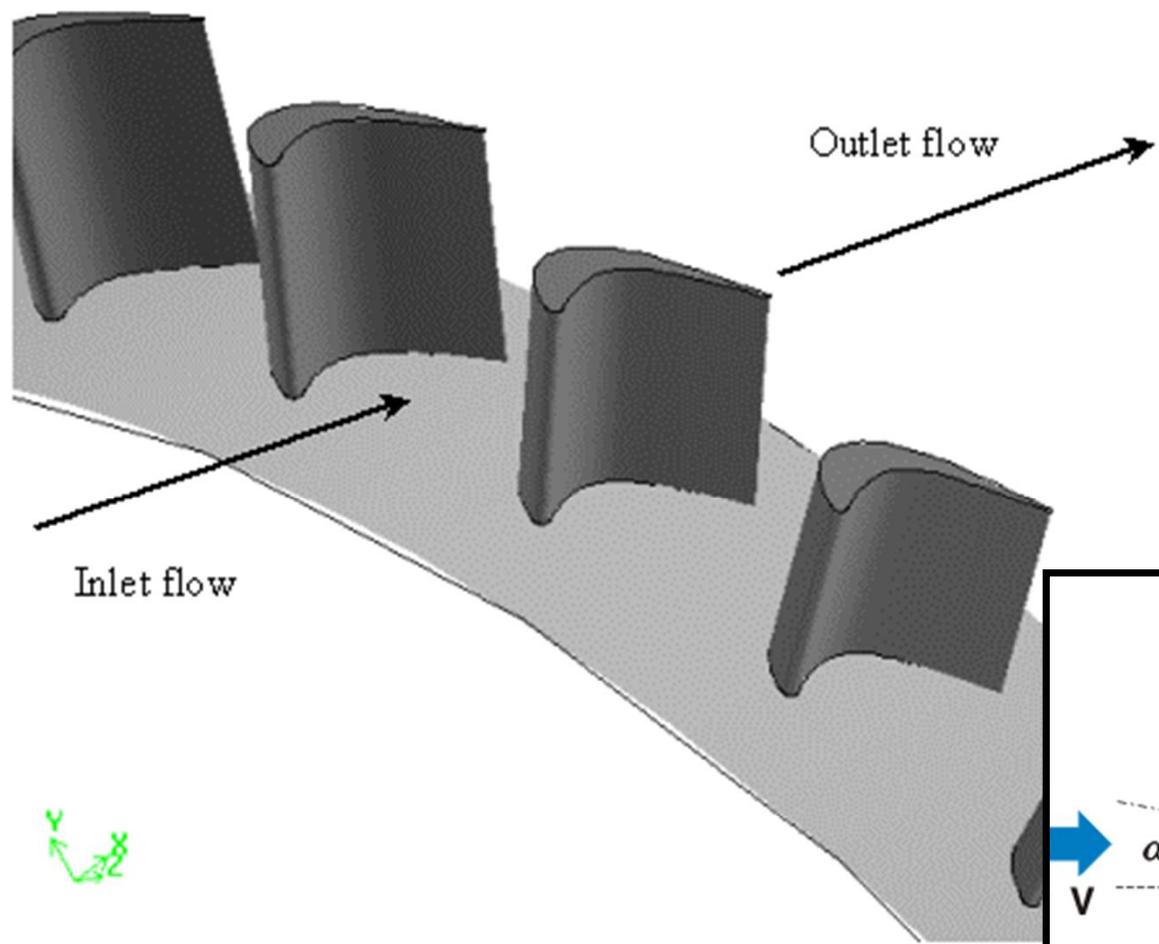
Photo: Paul Bowen

Sur la photo ci-dessous on voit nettement la vallée creusée dans les nuages par la déflexion vers la bas du flux d'air.

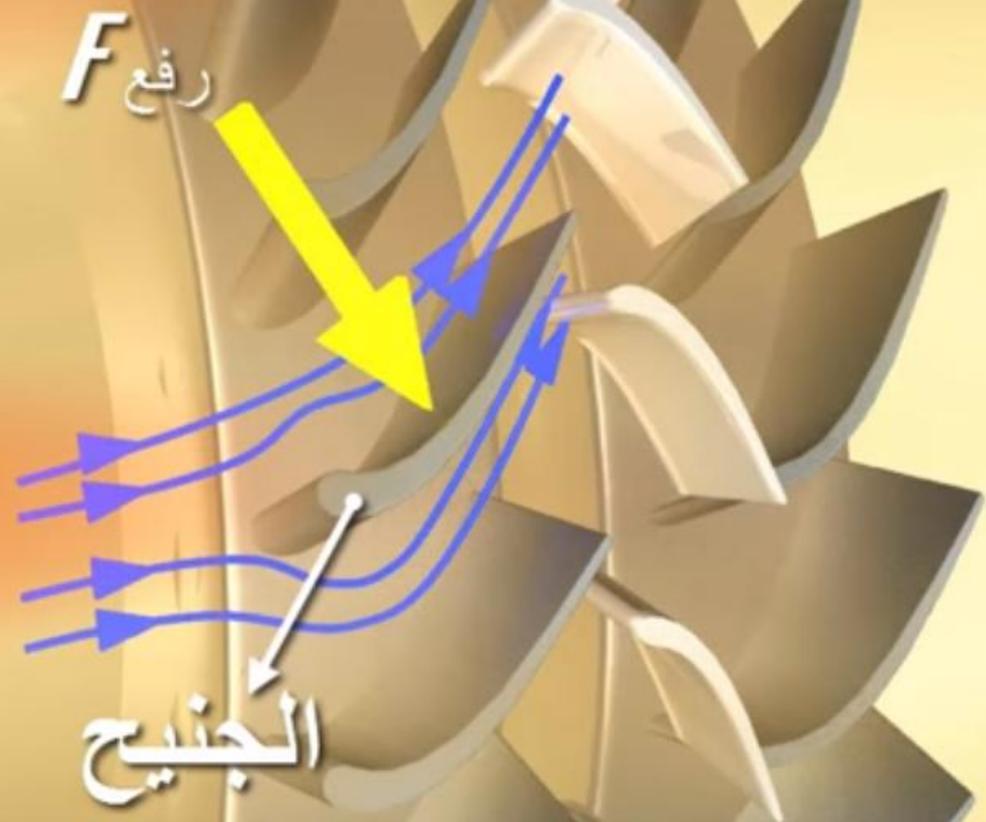


3. Flow over a blade at design conditions is at left, with an increase in the air inlet angle at the right—the latter causing a stall. Boundary-layer separation could be caused by a reduction in air velocity or an increase in engine rpm





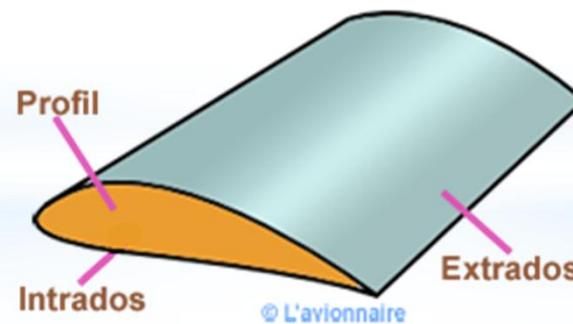
المحرك النفاث، كيف يعمل؟



## LES DIFFÉRENTS PROFILS DES AILES

### Définition

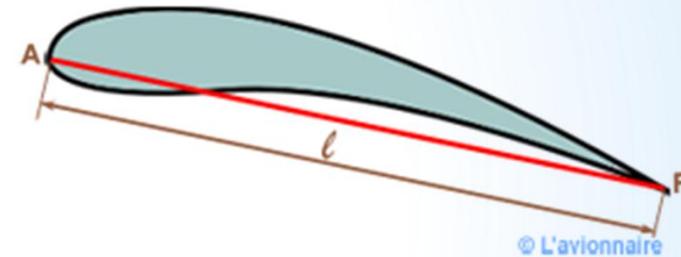
Le profil est la section de l'aile par un plan parallèle au plan de symétrie de l'avion. Le profil d'un avion de tourisme sera différent de celui d'un avion de transport ou d'un avion de chasse.



## Terminologie utile

### Corde

La corde d'un profil est la droite A - F joignant le bord d'attaque au bord de fuite. Sa longueur est notée Profil lettre L



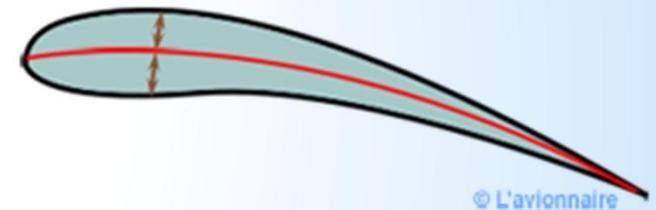
### Épaisseur

L'épaisseur maximale de l'aile est la distance maximale existante entre d'une part l'extrados, d'autre part l'intrados. L'épaisseur est notée h .



### Épaisseur relative

L'épaisseur relative d'un profil est le rapport de l'épaisseur maximale (t en anglais) sur la longueur de la corde.  $e = h / \text{Profil lettre L}$  ou  $t / \text{Profil lettre L}$



### Ligne moyenne

La ligne moyenne est le lieu des points équidistants de l'extrados et de l'intrados. Cette ligne est généralement courbée ou "cambrée".

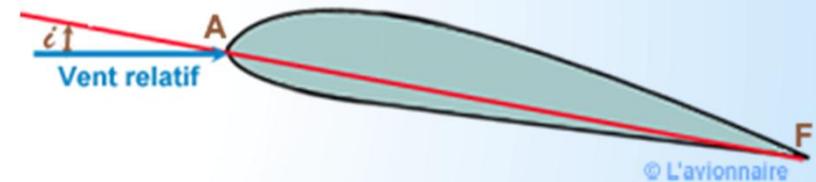
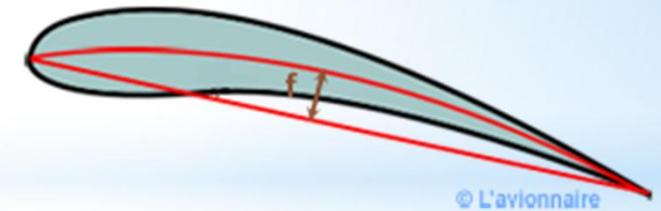
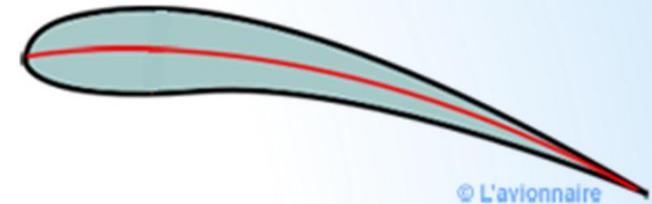
### Flèche

La flèche notée  $f$  est la distance maximale entre la corde et la ligne moyenne du profil. Elle définit donc sa courbure. Courbure =  $f / \text{Profil lettre L}$

### Angle d'incidence

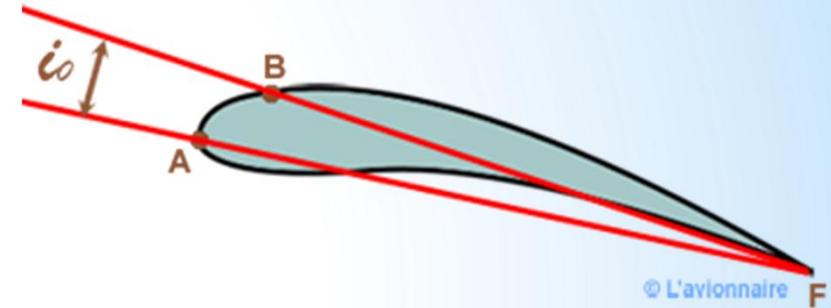
C'est l'angle formé par la corde du profil et le vecteur vitesse du vent relatif. Cet angle est appelé angle of attack en anglais.

Pour l'avion c'est l'angle formé par l'axe longitudinal de l'avion et le vecteur vitesse.



### Angle d'incidence nulle

C'est l'angle d'incidence pour lequel la portance est nulle. Ci-dessous la portance est nulle pour une certaine incidence négative. Mais pour un profil symétrique la portance sera nulle pour une incidence nulle.



### Angle de calage

C'est l'angle  $\alpha$  entre la corde du profil de l'aile et l'axe longitudinal de l'aéronef. Ceci permet de diminuer la traînée en vol de croisière.



## Différents types de profils

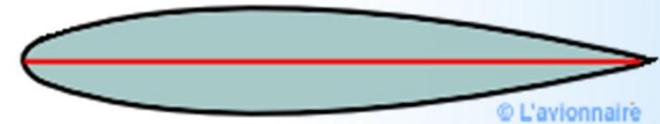
Il existe de très nombreux profils qui sont classés suivants leurs formes par familles.

### Biconvexe symétrique

L'intrados et l'extrados convexes sont symétriques par rapport à la corde.

La ligne moyenne est rectiligne et est confondue avec la corde.

Ces profils sont utilisés pour les empennages verticaux et horizontaux.

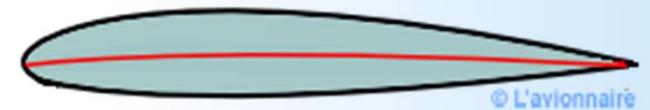


### Biconvexe dissymétrique

La courbure de l'extrados est plus accentuée que celle de l'intrados.

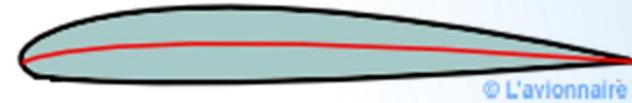
La ligne moyenne est à simple courbure ( intrados et extrados convexes )

Ces profils sont les plus employés pour les ailes d'avion de loisir.



### Plan convexe

Il s'agit d'un profil ayant un intrados relativement plat et un extrados cambé (convexe). La ligne moyenne est à simple courbure.



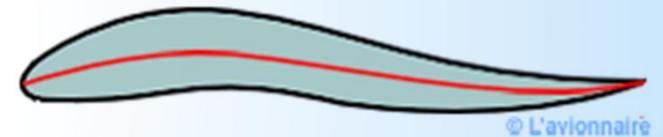
### Plan creux

L'extrados est convexe et l'intrados concave. Ces profils sont très porteurs mais génèrent une traînée importante. Ce type de profil était très utilisé autrefois pour les planeurs. La ligne moyenne est à simple courbure.



### Double courbure

La ligne moyenne est à double courbure  
La seconde courbure de la ligne moyenne confère des qualités de stabilité d'où le qualificatif d'AUTOSTABLE.  
Ce profil peu répandu est surtout utilisé pour les ailes volantes.

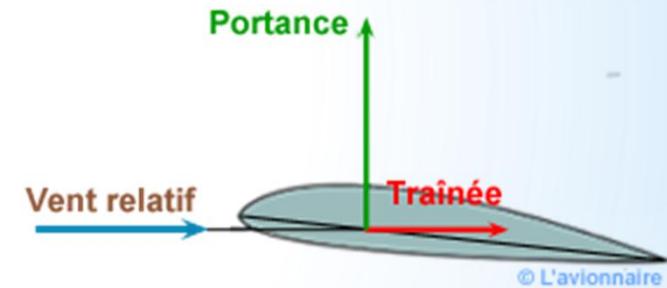


# LA PORTANCE

## Introduction

La portance aérodynamique est la composante de la force subie par un corps en mouvement dans un fluide qui s'exerce perpendiculairement à la direction du mouvement

La portance est l'une des composantes de la force aérodynamique . Cette force est perpendiculaire au secteur du vent relatif.



## Facteurs influents

Les forces aérodynamiques de portance et de traînée dépendent de plusieurs facteurs dont les plus importants sont les suivants:

- La vitesse du vent relatif ( $V$ )
- La masse volumique de l'air ( $\rho$ )
- La forme du profil
- L'incidence ( $\alpha$ )
- La surface alaire ( $S$ )
- Les conditions de surface (rugosité)
- La compressibilité

La portance sera donnée par l'équation:  $R_z = 1/2 \rho V^2 \times S \times C_z$

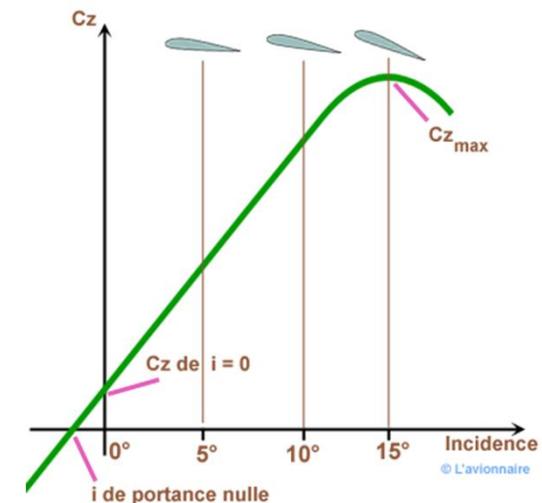
Comme toutes les forces aérodynamiques, la portance dépendra:

- de la pression dynamique  $1/2 \rho V^2$
- de la surface alaire  $S$
- et d'un coefficient de traînée induite  $C_z$

Ci-dessous la courbe du coefficient de portance  $C_z$  en fonction de l'incidence  $\alpha$

A noter que cette courbe est celle d'un profil dissymétrique car à incidence nulle, la portance est encore positive. La portance deviendra nulle pour une incidence négative.

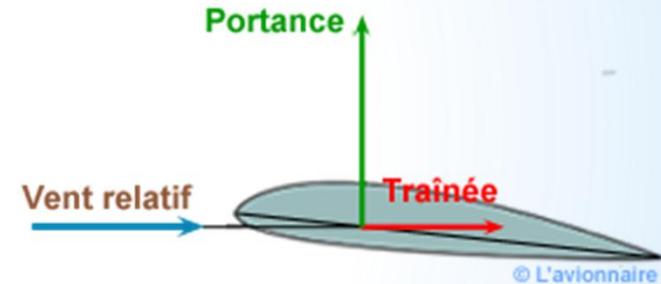
On constate sur le dessin ci-dessus que le coefficient de portance  $C_z$  augmente avec l'incidence  $\alpha$  et que sa valeur maximum sera le  $C_{z_{max}}$ .



# LA TRAINÉE

## Introduction

En mécanique des fluides, la traînée est la force qui s'oppose au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz. Mathématiquement c'est la composante des efforts exercés sur le corps, dans le sens opposé à la vitesse relative du corps par rapport au fluide



La traînée est l'une des composantes de la force aérodynamique Lettre Ra. Cette force est parallèle au secteur du vent relatif.

## Les différentes traînées

En réalité il y a plusieurs traînées:

- La traînée induite est une force de résistance à l'avancement induite par la portance.
- La traînée parasite composée de :
  - La traînée de frottement liée aux différences de vitesses entre les filets fluides (viscosité).
  - La traînée de forme apparait dès qu'un objet a une certaine épaisseur.
- La traînée d'interférence est due à la jonction entre les différents composants.

# Similitude des Turbomachines

Les performances d'une turbomachine dépendent d'un nombre important de paramètres tels que la géométrie de la machine, la nature du fluide, le régime de rotation, le débit et les conditions d'entrées.

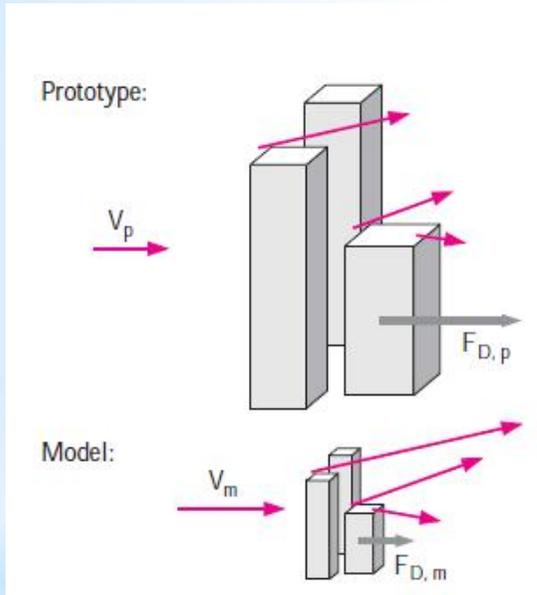
La prédiction de ces performances dans le cas d'un prototype passe très souvent par des essais expérimentaux, bien que les codes de calcul par la simulation numérique ont atteint des niveaux de précision assez fiable.

Le nombre de paramètres à faire varier rend onéreuses les campagnes d'essais pour la caractérisation du fonctionnement de nouveaux prototypes de machines.

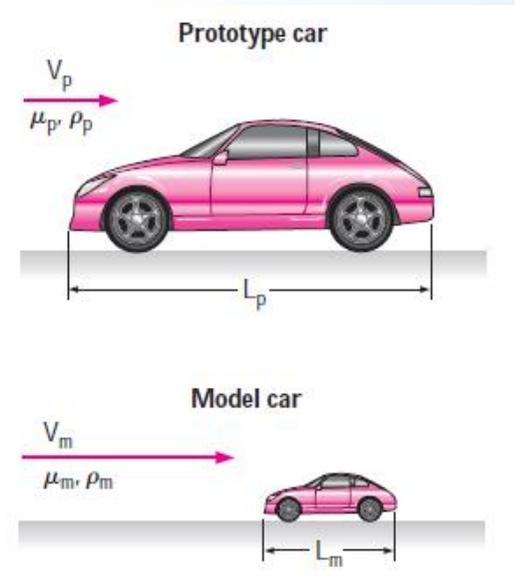
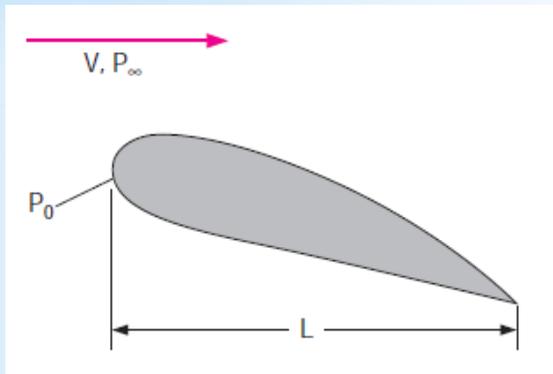
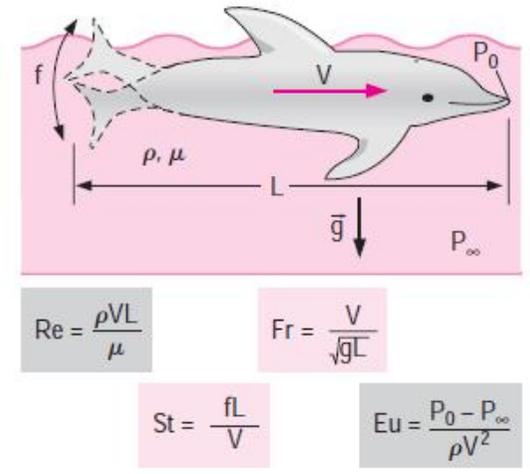
L'analyse dimensionnelle permet, par l'application du théorème de Vashy-Buckingham, **de réduire le nombre de variables** en regroupant les grandeurs physiques initiales en groupements sans dimensions et diminuer ainsi le nombre **de paramètres à faire varier lors des essais**.

Les objectifs visés par la similitude sont :

1. Prédiction des performances d'un prototype à partir des essais en laboratoire sur une maquette.
2. Représentation des performances par une courbe unique pour une famille de machines.
3. Classification des machines et possibilité de choix de la meilleure machine.



**FIGURE 7-21**  
 Similarity can be achieved even when the model fluid is different than the prototype fluid. Here a submarine model is tested in a wind tunnel.  
 Courtesy NASA Langley Research Center.





## 7-1 ■ DIMENSIONS AND UNITS

A **dimension** is a measure of a physical quantity (without numerical values), while a **unit** is a way to assign a number to that dimension. For example, length is a dimension that is measured in units such as microns ( $\mu\text{m}$ ), feet (ft), centimeters (cm), meters (m), kilometers (km), etc. (Fig. 7-1). There are seven **primary dimensions** (also called **fundamental** or **basic dimensions**)—mass, length, time, temperature, electric current, amount of light, and amount of matter.

All nonprimary dimensions can be formed by some combination of the seven primary dimensions.

For example, force has the same dimensions as mass times acceleration (by Newton's second law). Thus, in terms of primary dimensions,

$$\text{Dimensions of force: } \{\text{Force}\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Length}}{\text{Time}^2} \right\} = \{mL/t^2\} \quad (7-1)$$

**TABLE 7-1**

Primary dimensions and their associated primary SI and English units

Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time <sup>†</sup>	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

\* We italicize symbols for variables, but not symbols for dimensions.

<sup>†</sup> Note that some authors use the symbol T for the time dimension and the symbol  $\theta$  for the temperature dimension. We do not follow this convention to avoid confusion between time and temperature.

### The Method of Repeating Variables

**Step 1:** List the parameters in the problem and count their total number  $n$ .

**Step 2:** List the primary dimensions of each of the  $n$  parameters.

**Step 3:** Set the reduction  $j$  as the number of primary dimensions. Calculate  $k$ , the expected number of  $\Pi$ 's,  
$$k = n - j$$

**Step 4:** Choose  $j$  repeating parameters.

**Step 5:** Construct the  $k$   $\Pi$ 's, and manipulate as necessary.

**Step 6:** Write the final functional relationship and check your algebra.

### FIGURE 7-22

A concise summary of the six steps that comprise the method of repeating variables.

**TABLE 7-2**

Detailed description of the six steps that comprise the *method of repeating variables*\*

- Step 1** List the parameters (dimensional variables, nondimensional variables, and dimensional constants) and count them. Let  $n$  be the total number of parameters in the problem, including the dependent variable. Make sure that any listed independent parameter is indeed independent of the others, i.e., it cannot be expressed in terms of them. (E.g., don't include radius  $r$  and area  $A = \pi r^2$ , since  $r$  and  $A$  are *not* independent.)
- Step 2** List the primary dimensions for each of the  $n$  parameters.
- Step 3** Guess the **reduction**  $j$ . As a first guess, set  $j$  equal to the number of primary dimensions represented in the problem. The expected number of  $\Pi$ 's ( $k$ ) is equal to  $n$  minus  $j$ , according to the **Buckingham Pi theorem**,
- The Buckingham Pi theorem:*  $k = n - j$  (7-14)
- If at this step or during any subsequent step, the analysis does not work out, verify that you have included enough parameters in step 1. Otherwise, go back and *reduce  $j$  by one* and try again.
- Step 4** Choose  $j$  **repeating parameters** that will be used to construct each  $\Pi$ . Since the repeating parameters have the potential to appear in each  $\Pi$ , be sure to choose them *wisely* (Table 7-3).
- Step 5** Generate the  $\Pi$ 's one at a time by grouping the  $j$  repeating parameters with one of the remaining parameters, forcing the product to be dimensionless. In this way, construct all  $k$   $\Pi$ 's. By convention the first  $\Pi$ , designated as  $\Pi_1$ , is the *dependent*  $\Pi$  (the one on the left side of the list). Manipulate the  $\Pi$ 's as necessary to achieve established dimensionless groups (Table 7-5).
- Step 6** Check that all the  $\Pi$ 's are indeed dimensionless. Write the final functional relationship in the form of Eq. 7-11.

## 5.2 Variables indépendantes

L'étude dimensionnelle du problème général du fonctionnement d'une turbomachine exige le dénombrement correct de toutes les variables intervenant dans le phénomène.

On peut les classer en cinq catégories :

1. La nature du fluide : les chaleurs massique  $C_p$ ,  $C_v$  (ou bien  $\gamma$  et  $r$ ), la viscosité  $\nu$ .
2. La géométrie de la machine : compte tenu de sa complexité on se contente d'une dimension caractéristique  $D$  (en général on prend le diamètre de la roue).
3. Un état de référence du fluide : ce sont les conditions à l'entrée de la machine  $p_1, \rho_1$ .
4. La cinématique de la machine : on prend la vitesse de rotation  $N$ .
5. Les variables intensives et extensives traduisant l'échange d'énergie : le débit  $Q_m$ , la pression de sortie  $p_2$  ou la variation d'enthalpie  $\Delta h$ .

Les paramètres qui seront retenus dans l'analyse dimensionnelle du problème sont :

$$C_p, C_v, \nu, p_1, \rho_1, N, D, Q_m, p_2.$$

Il existe donc une relation fonctionnelle entre ces neuf (9) grandeurs, que l'on peut mettre sous la forme implicite :

$$f(C_p, C_v, \nu, p_1, \rho_1, N, D, Q_m, p_2) = 0 \quad \text{---(5.1)}$$

### 5.3 Théorème de Vashy-Buckingham

Toute grandeur physique  $G$ , fonction de  $n$  paramètres indépendants  $x_i$ , mesurés avec  $p$  unités fondamentales et traduisant  $n$  causes indépendantes s'exprime à partir de la relation

$$\frac{G}{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_p^{e_p}} = F(\pi_{p+1}, \pi_{p+2}, \dots, \pi_n) \quad (5.2)$$

ou  $x_1$  à  $x_p$  sont choisis de manière à ce qu'elles soient dimensionnellement indépendantes et les variables  $\pi_{p+1}$  à  $\pi_n$  sont des groupements sans dimensions construits à partir des grandeurs  $x_i$

$$\pi_k = \frac{G_k}{x_1^{e_1} \dots x_p^{e_p}} \text{ avec } \{k = p + 1 \text{ à } n\} \quad (5.3)$$

D'une manière implicite on peut écrire :

$$F(\pi, \pi_{p+1}, \pi_{p+2}, \dots, \pi_n) = 0 \quad (5.4)$$

Dans notre cas,  $n = 9$  et  $p = 4$ , on peut former cinq (05) groupements sans dimensions et écrire :

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0 \quad (5.5)$$

#### **5.4 Etablissement de la matrice dimensionnelle**

Elle est basée sur la formulation d'un phénomène physique doit être dimensionnellement homogène (indépendante du système d'unités).

Ceci implique que la grandeur représentant le phénomène est nécessairement la somme de monômes des variables indépendantes.

	$C_p$	$C_v$	$\nu$	$P_1$	$\rho_1$	$N$	$D$	$P_2$	$Q_m$
<b>M</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>L</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>-3</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>
<b>T</b>	<b>-2</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>-2</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>
<b><math>\theta</math></b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Les neuf (09) grandeurs intervenant dans le phénomène sont décrites par quatre (04) unités fondamentales.

### 5.5 Choix des grandeurs fondamentales $x_1$ à $x_p$

Une certaine latitude est laissée par l'analyse dimensionnelle quant au choix des grandeurs fondamentales, mais il est commode de faire apparaître clairement les variables externes ( $p_2$ ,  $Q_m$ ), de séparer les effets de compressibilité et de viscosité.

Dans le cas de la turbomachine on peut prendre :  $p_1$ ,  $N$ ,  $D$ ,  $C_p$ . Ces grandeurs sont dimensionnellement indépendantes ; En effet, d'après la matrice dimensionnelle le

déterminant formé par les exposants relatifs à ces grandeurs est différent de zéro. On peut choisir les groupements sans dimensions  $\pi_i$  comme suite

$$\pi_1 = \pi_{p_2} = \frac{P_2}{(p_1)^x \cdot (N)^y \cdot (D)^z \cdot (C_p)^t} \quad (5.6)$$

Ce nombre est transformé en unité

$$ML^{-1}T^{-2} = [ML^{-1}T^{-2}]^x \cdot [T^{-1}]^y \cdot [L]^z \cdot [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^t \quad (5.7)$$

les exposants  $x, y, z, t$  doivent vérifier le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x = 1 \\ -x + z + 2t = -1 \\ -2x - y - 2t = -2 \\ -t = 0 \end{cases} ; \text{ soit } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} . \quad \text{D'où : } \pi_{p_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

Le même raisonnement appliqué aux autres variables conduit à

$$\pi_2 = \pi_{Q_m} = \frac{Q_m}{(p_1)^x \cdot (N)^y \cdot (D)^z \cdot (C_p)^t}; \quad (5.8)$$

$$x = 1, y = -1, z = 1, t = 0 \text{ . D'où : } \pi_{Q_m} = \frac{Q_m \cdot N}{p_1 \cdot D}$$

$$\pi_3 = \pi_\mu = \frac{v}{(p_1)^x \cdot (N)^y \cdot (D)^z \cdot (C_p)^t} \quad (5.9)$$

$$x = 0, y = 1, z = 2, t = 0 \text{ . D'où : } \pi_v = \frac{v}{N D^2}$$

$$\pi_4 = \pi_{p_1} = \frac{p_1}{(p_1)^x \cdot (N)^y \cdot (D)^z \cdot (C_p)^t} \quad (5.10)$$

$$x = 1, y = -2, z = -2, t = 0. \text{ D'où : } \pi_{\rho_1} = \frac{\rho_1 N^2 D^2}{P_1}$$

$$\pi_s = \pi_{C_v} = \frac{C_v}{(P_1)^x \cdot (N)^y \cdot (D)^z \cdot (C_p)^t} \quad (5.11)$$

$$x = 0, y = 0, z = 0, t = 1. \text{ D'où : } \pi_{C_v} = \frac{C_v}{C_p}$$

--

Le rapport de compression traduisant l'échange d'énergie entre le fluide et la machine s'exprime par la relation fonctionnelle

$$\frac{p_2}{p_1} = F \left( \frac{Q_m N}{p_1 D}, \frac{v}{N D^2}, \frac{\rho_1 N^2 D^2}{p_1}, \frac{C_v}{C_p} \right) \quad (5.12)$$

si on considère la variation d'enthalpie  $\Delta h$  au lieu de la pression de sortie  $p_2$ , on obtient

$$\pi_{\Delta h} = \frac{\Delta h}{(p_1)^x (N)^y (D)^z (C_p)^t} \quad (5.13)$$

soit :  $\pi_{\Delta h} = \frac{\Delta h}{N^2 D^2}$ .

On remarque aisément dans cette relation l'influence des différents effets sur le rapport de compression :

-  $\pi_v = \frac{v}{N D^2}$  : effets des forces visqueuses.

-  $\pi_{\rho_1} = \frac{\rho_1 N^2 D^2}{P_1}$  : effets de compressibilité.

-  $\pi_{C_v} = \frac{C_v}{C_p} = \frac{1}{\gamma}$  : propriétés thermiques.

## 5.6 Condition d'application de similitude

### 5.6.1 Cas général

Deux machines (1 et 2) géométriquement semblables sont en fonctionnements semblables si tous les paramètres adimensionnels sont égaux deux à deux. Soit par exemple

$$\left[ \frac{P_2}{P_1} \right]_1 = \left[ \frac{P_2}{P_1} \right]_2 \quad (5.14)$$

$$\left[ \frac{Q_m N}{P_1 D} \right]_1 = \left[ \frac{Q_m N}{P_1 D} \right]_2 \quad (5.15)$$

$$\left[ \frac{v}{ND} \right]_1 = \left[ \frac{v}{ND} \right]_2 \quad (5.16)$$

$$\left[ \frac{\rho_1 N^2 D^2}{P_1} \right]_1 = \left[ \frac{\rho_1 N^2 D^2}{P_1} \right]_2 \quad (5.17)$$

$$\left[ \frac{C_p}{C_v} \right]_1 = \left[ \frac{C_p}{C_v} \right]_2 \quad (5.18)$$

### 5.6.2 Cas d'une même machine

Dans ce cas la dimension  $D$  reste constante entre les systèmes 1 et 2 ; D'où :

$$\frac{\Delta h}{N^2 D^2} = cte \Rightarrow \frac{\Delta h}{N^2} = cte; \text{ soit } \frac{\Delta h_1}{N_1^2} = \frac{\Delta h_2}{N_2^2} \text{ ou } \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (5.19)$$

$$\frac{Q_m N}{P_1 D} = cte \Rightarrow \frac{Q_m N}{P_1} = cte; \text{ soit } \left( \frac{Q_m N}{P_1} \right)_1 = \left( \frac{Q_m N}{P_1} \right)_2 \text{ ou } \left( \frac{Q_{m1}}{Q_{m2}} \right) = \frac{(P_1)_1 \cdot N_2}{(P_1)_2 \cdot N_1} \quad (5.20)$$

$$\frac{v}{ND} = cte \Rightarrow \frac{v}{N} = cte \text{ soit } \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (5.21)$$

$$\frac{\rho_1 N^2 D^2}{P_1} = cte \Rightarrow \frac{\rho_1 N^2}{P_1} = cte \text{ soit } \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{(\rho_1)_2 \cdot (P_1)_1}{(\rho_1)_1 \cdot (P_1)_2} \quad (5.22)$$

## IV – CARACTERISTIQUES SPECIFIQUES DES TURBOMACHINES

### IV-1 ) Vitesse spécifique

En combinant les groupements :  $\frac{\Delta h}{N^2 D^2} = cte$  ,  $\frac{\rho_1 N^2 D^2}{p_1} = cte$  et  $\frac{Q_m N}{p_1 D} = cte$  on peut obtenir d'autres groupements exprimant la condition de similitude ; En particulier considérons l'expression :

$$\left( \frac{Q_m N}{p_1 D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\rho_1 N^2 D^2}{p_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\Delta h}{N^2 D^2} \right)^{-\frac{3}{4}} = cte \quad , \quad \text{on obtient :} \quad \frac{N \cdot \sqrt{Q_{v1}}}{(\Delta h)^{0.75}} = cte .$$

Si on désire obtenir un point de fonctionnement donnant un débit volumique et un travail massique unitaires on obtient comme valeur de la constante une valeur particulière de la vitesse de rotation N :

$$\boxed{\frac{N \cdot \sqrt{Q_{v1}}}{(\Delta h)^{0.75}} = N_s} \quad , \quad \text{appelée **nombre de tours spécifique**.$$

En prenant la vitesse angulaire  $\omega = \frac{\pi \cdot N}{30}$  , on obtient la **vitesse spécifique** :

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega \cdot \sqrt{Q_{v1}}}{(\Delta h)^{0.75}}}$$

**Remarques :**

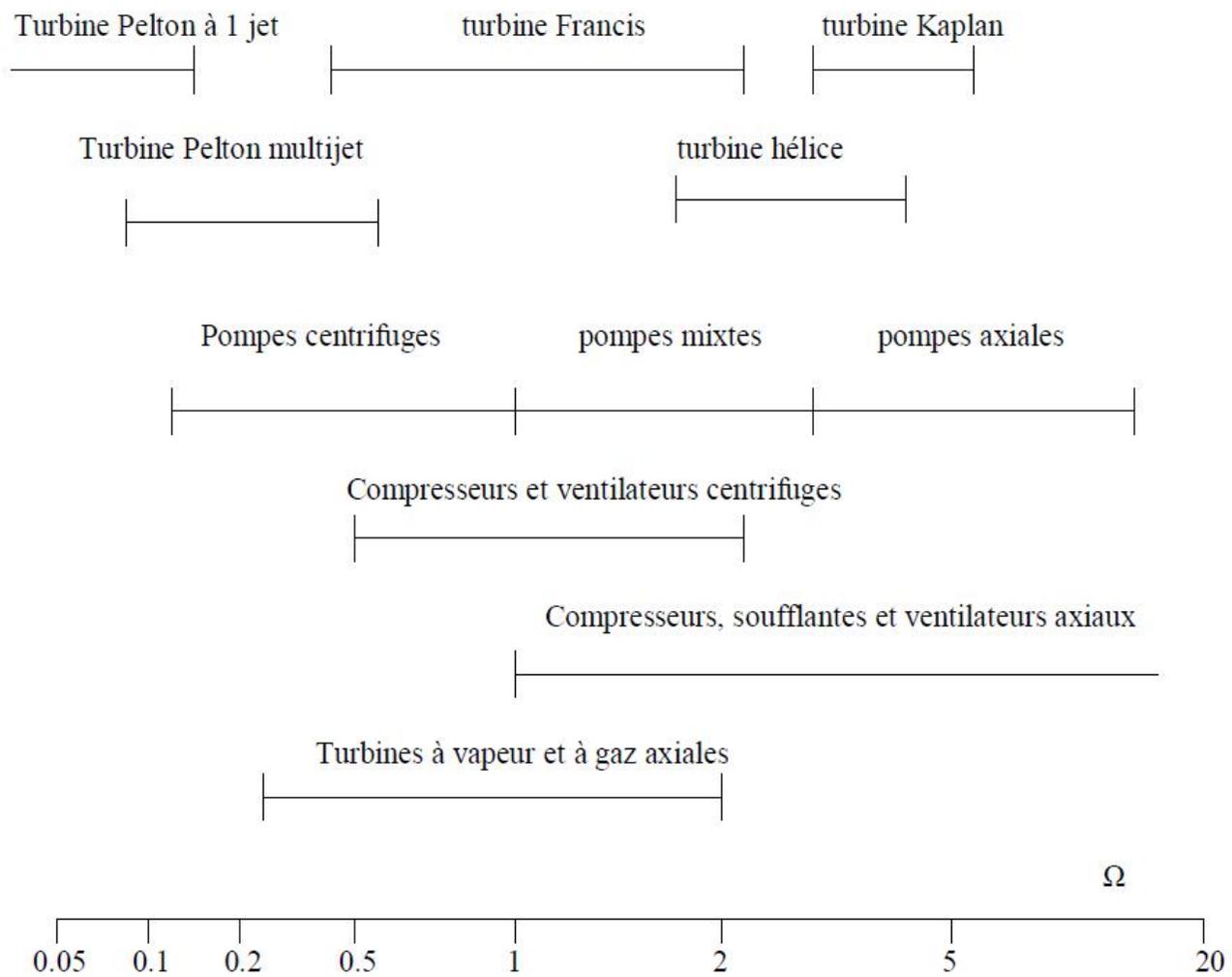
- Le débit volumique  $Q_{v1}$  utilisé dans les relations ci-dessus correspond à l'entrée d'un compresseur. Dans le cas d'une turbine on prend le débit volumique correspondant aux conditions de sortie de la roue.

- Dans le cas d'une pompe la vitesse spécifique s'écrit :

$$\Omega = \frac{\omega \cdot \sqrt{Q_v}}{(gH)^{0.75}}$$

**Interprétation :**

Le rendement d'une turbomachine dépend , pour une vitesse de rotation donné, du point de fonctionnement :  $Q_{v1}$  et  $\Delta h$  ; Donc il est naturel qu'il dépende de la vitesse spécifique  $\Omega$  ( ou bien  $N_s$  ) pour un type de machine donné . On l'utilise alors pour la classification des différentes machines au sens du meilleur rendement.



**Classification des turbomachines en fonction de leur vitesse spécifique en corrélation avec leur meilleur rendement.**

#### IV-2 ) Rayon spécifique

Considérons l'expression :  $\left(\frac{Q_m N}{p_1 D}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\rho_1 N^2 D^2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta h}{N^2 D^2}\right)^{\frac{1}{4}} = cte.$

Après simplification on obtient :

Si on veut obtenir une machine donnant un débit ( $Q_{v1}$ ) et un travail ( $\Delta h$ ) unitaires, la constante donne la valeur particulière du diamètre d'une telle machine. On l'appelle diamètre spécifique :

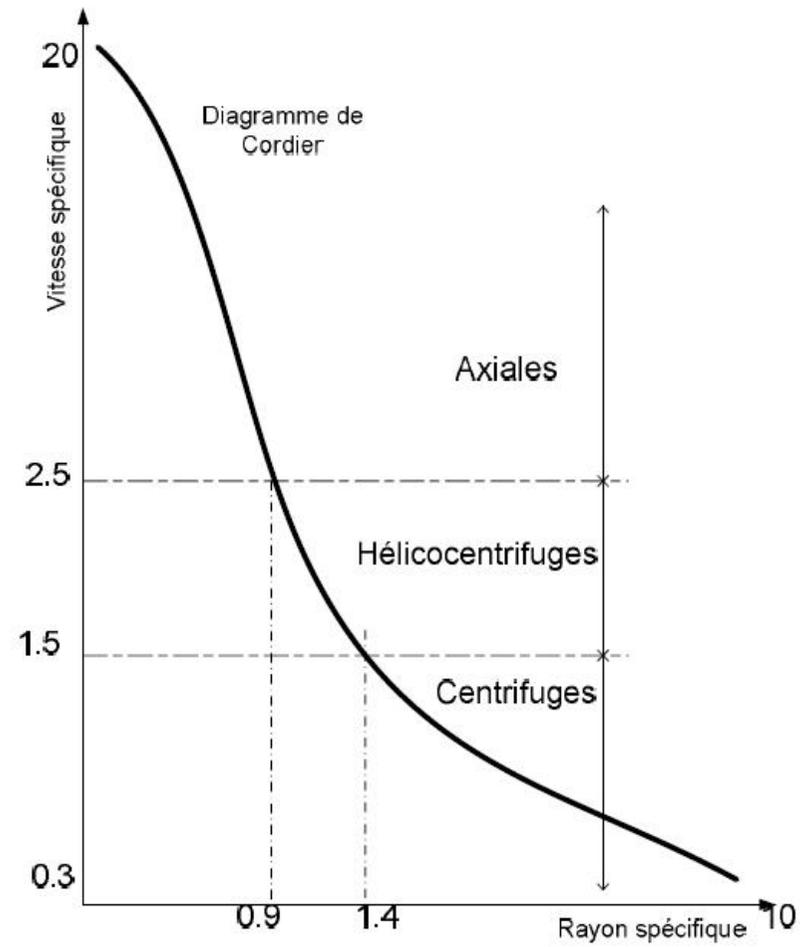
$$D_s = \frac{D \cdot (\Delta h)^{0.25}}{\sqrt{Q_{v1}}}$$

On utilise également le rayon spécifique :  $\Lambda = \frac{R \cdot (\Delta h)^{0.25}}{\sqrt{Q_{v1}}}$ .

Et pour les pompes :  $\Lambda = \frac{R \cdot (gH)^{0.25}}{\sqrt{Q_v}}$ .

**Diagramme de Cordier :**

Il représente la courbe de corrélation entre la vitesse spécifique et le rayon spécifique correspondant au meilleur rendement de la machine.



## **IV – APPLICATION AU FONCTIONNEMENT D'UNE POMPE**

### **IV-1) Analyse dimensionnelle du problème:**

L'énergie spécifique  $gH$  fournie par une pompe dépend en général de 5 paramètres :

1. Le débit volumique  $Q_V$  ,  $[Q_V] = L^3T^{-1}$  ;
2. La vitesse de rotation  $N$  ,  $[N] = T^{-1}$  ;
3. Le diamètre de la roue  $D$  ,  $[D] = L$  ;
4. La masse volumique du fluide  $\rho$  ,  $[\rho] = ML^{-3}$  ;
5. La viscosité dynamique du fluide  $\mu$  ,  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$

D'où la relation fonctionnelle :  $f(gH, Q_V, D, N, \rho, \mu) = 0$  ; Soit  $n = 6$ .

	gH	Qv	$\rho$	N	D	$\mu$
M	0	0	1	0	0	1
L	2	3	-3	0	1	-1
T	-2	-1	0	-1	0	-1

La matrice dimensionnelle fait ressortir 3 unités fondamentales : masse, longueur, temps ,  $p = 3$  .

Le théorème de Vashy- Buckingham permet donc de former :  $n - p = 6 - 3 = 3$  groupements sans dimensions.

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

Tous les choix sont possibles pour les grandeurs fondamentales pourvu qu'elles soient dimensionnellement indépendantes. La masse volumique  $\rho$  , la vitesse de rotation  $N$  et le diamètre  $D$  peuvent être retenus et d'après la matrice dimensionnelle, le déterminant formé par ces trois grandeurs est non nul.

### Constitution des groupements sans dimensions.

$$1. \pi_1 = \pi_{gH} = \frac{gH}{\rho^x N^y D^z}, \quad [gH] = L^2 T^{-2} = (ML^{-3})^x (T^{-1})^y (L)^z;$$

$$\begin{cases} 0 = X \\ 2 = -3X + Z \\ -2 = -Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = -2 \\ Z = 2 \end{cases} \quad \text{D'où : } \pi_{gH} = \frac{gH}{N^2 D^2}.$$

$$2. \pi_2 = \pi_{Q_v} = \frac{Q_v}{\rho^x N^y D^z}, \quad [Q_v] = L^3 T^{-1} = (ML^{-3})^x (T^{-1})^y (L)^z; \quad \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \\ Z = 0 \end{cases}; \quad \text{D'où : } \pi_{Q_v} = \frac{Q_v}{ND^3}.$$

$$3. \pi_3 = \pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho^x N^y D^z}, \quad [\mu] = ML^{-1} T^{-1} = (ML^{-3})^x (T^{-1})^y (L)^z; \quad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 \\ Z = 2 \end{cases}; \quad \text{D'où : } \pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho ND^2}.$$

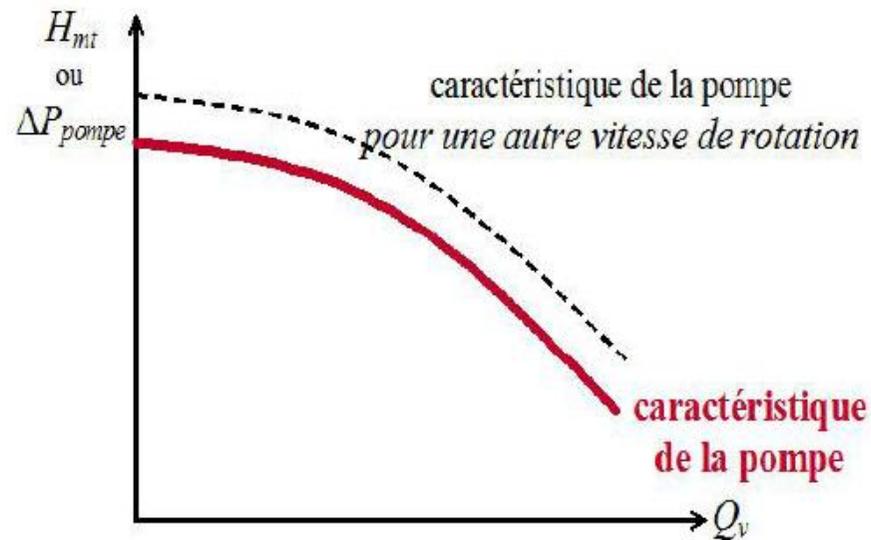
$$\text{Donc : } F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0, \quad \text{soit : } F\left(\frac{gH}{N^2 D^2}, \frac{Q_v}{ND^3}, \frac{\mu}{\rho ND^2}\right) = 0.$$

$$\text{En explicitant on peut écrire : } \frac{gH}{N^2 D^2} = F\left(\frac{Q_v}{ND^3}, \frac{\mu}{\rho ND^2}\right).$$

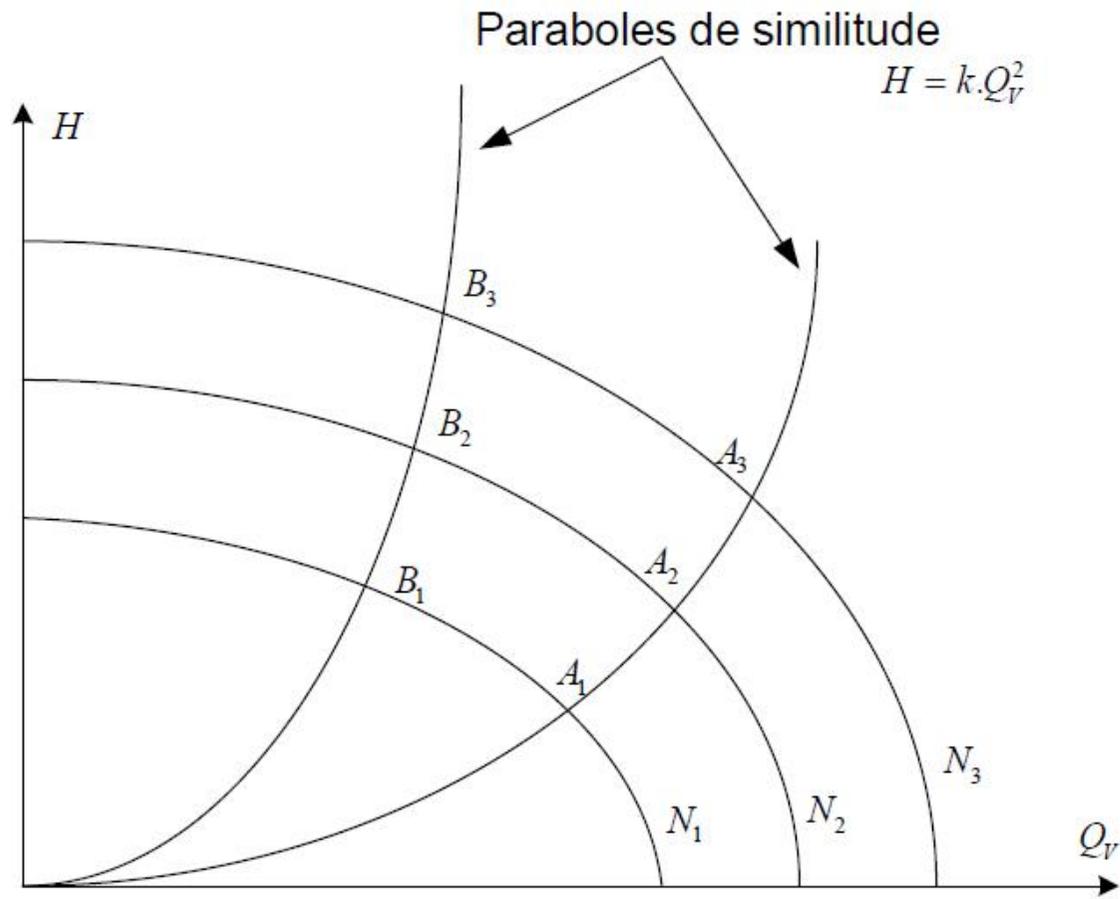
Selon l'équation de Bernoulli généralisée (utilisée ici un peu abusivement car l'écoulement dans une pompe centrifuge n'a rien d'irrotationnel, mais ceci permet de comprendre le principe), si les conduites d'aspiration et de refoulement d'une pompe ont le même diamètre, on peut écrire :

$$P_{ref} - P_{asp} = \rho \cdot g \cdot H_{mt}^{theorique} - \Delta P_f^{pompe} = \rho \cdot g \cdot H_{mt}$$

On en déduit que la hauteur manométrique totale (vraie) décroît avec le débit, du fait des pertes par frottement dans la pompe. La courbe donnant cette hauteur manométrique totale en fonction du débit est appelée caractéristique de la pompe et a l'allure représentée sur la figure ci-dessous.



courbe caractéristique d'une pompe centrifuge .



Paraboles de similitude

