المصفوفات

1. مفهوم المصفوفة

نذكِّر بالرمز $\mathbb{N}_n$ الذي يرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً وأصغر أو تساوي العدد n من $\mathbb{N}$. وسنرمز في بقيّة هذه الفقرة بالرمز $\mathbb{A}$ إلى حلقة تبديليّة ما.

1-1. تعريف. نسمّي **مصفوفةً** من عناصر الحلقة $\mathbb{A}$ ذات n سطراً و p عموداً، كلَّ تطبيق منطلقه المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ ويأخذ قيمه في الحلقة $\mathbb{A}$. ونرمز بالرمز $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ إلى مجموعة المصفوفات ذات n سطراً و p عموداً من عناصر الحلقة $\mathcal{E}'$.

لقد جرت العادة أن نمثِّل مصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ بالشكل :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

2-1. تعريف.

- نسمّي **مصفوفة جزئية** من مصفوفة $M = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ كلّ مصفوفة $(a_{\lambda(i)\mu(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_r\times\mathbb{N}_s}$ حيث $\lambda : \mathbb{N}_r \to \mathbb{N}_n$ و $\mu : \mathbb{N}_s \to \mathbb{N}_p$ هما تابعان متزايدان تماماً. وفي هذه الحالة نرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $M_{I,J}$ حيث $I = \operatorname{Im}\lambda$ و $J = \operatorname{Im}\mu$.
- نسمّي **مصفوفةَ سطرٍ** كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{A})$، و**مصفوفةَ عمود** كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{A})$.
- نسمّي **مصفوفة مربّعة** من المرتبة n كلَّ مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{A})$، ونرمز إلى مجموعة المصفوفات المربّعة من المرتبة n بالرمز $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$.
- نسمّي **مصفوفة مثلثيّة عليا** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- نسمّي **مصفوفة مثلثيّة سفلى** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- وأخيراً نسمّي **مصفوفة قطريّة** كل مصفوفة مربّعة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$، تحقّق

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- ونسمي المصفوفة $I_n = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ المعرّفة بالصيغة $a_{ij} = \delta_{ij}$، حيث δ_{ij} هو رمز كرونيكر، **المصفوفة الواحديّة** في $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$.

2. العمليّات على المصفوفات

سنفترض في هذه الفقرة أيضاً أنّ $\mathbb{A}$ حلقة تبديليّة. ليكن (n, p) من $\mathbb{N}^{*2}$ يمكننا تزويد $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ بقانوني تشكيل، أولهما داخليّ $(+)$ معرّف كما يأتي:

❶ أيّاً كانت $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ كان

$$M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

وثانيهما خارجي $(\cdot)$، مجموعة مؤثراته $\mathbb{A}$، ومعرّف كما يأتي:

❷ أيّاً كانت $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و λ من $\mathbb{A}$ كان

$$\lambda \cdot M = (\lambda a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A}), +)$ زمرة تبديليّة وأنّه في حالة عناصر λ و μ من $\mathbb{A}$، ومصفوفات M و N من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ تتحقق الخواص الآتية.

$$1_A \cdot M = M \quad ①$$
$$\lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N \quad ②$$
$$(\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M \quad ③$$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda\mu) \cdot M \quad ④$$

فإذا كانت الحلقةُ $\mathbb{A}$ حقلاً $\mathbb{K}$ كانت البنية $(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A}), +, \cdot)$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$.

❸ ومن جهة أخرى، أيّاً كانت (n,p,q) من $\mathbb{N}^{*3}$ ، نعرّف قانون ضرب المصفوفات كما يأتي:

$$\times : \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})\times \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A}) \to \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{A}),\ (M,N)\mapsto L = M\times N$$

فإذا كانت $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و $N=(b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A})$ عرّفنا المصفوفة $L=(c_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{A})$ بالعلاقات :

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n\times \mathbb{N}_q,\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

هذا وننصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل الآتي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:

$$\begin{array}{cccc}
 & & N & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p}\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & b_{2j} & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix} & \\
M & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np}\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \boxed{c_{ij}} & & \vdots\\ & & \vdots & & \\ & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix} & L
\end{array}$$

تبيّن المبرهنة الآتية خاصّة مهمّة من خواص ضرب المصفوفات.

2-1. مبرهنة. لتكن الأعداد (n,p,q,r) من $\mathbb{N}^{*4}$، ولتكن M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{A})$ و N من $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{A})$ و L من $\mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{A})$. عندئذ يكون

$$(M\times N)\times L = M\times (N\times L)$$

الإثبات

لنفترض أنّ $M=(a_{ij})$ و $N=(b_{ij})$ و $L=(c_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n\times \mathbb{N}_q,\ \ [M\times N]_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

وكذلك يكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}[M\times N]_{im}c_{mj}$$

ومن ثَم

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km})c_{mj}$$

وأخيراً

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [(M\times N)\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km}c_{mj}$$

ومن جهة أخرى،

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_r,\ [N\times L]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}b_{im}c_{mj}$$

إذن

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}[N\times L]_{kj}$$

ومن ثَم

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(\sum_{m=1}^{q}b_{km}c_{mj})$$

وأخيراً

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_r,\ [M\times(N\times L)]_{ij}=\sum_{m=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{km}c_{mj}$$

ومنه نستنتج أنّ $(M\times N)\times L=M\times(N\times L)$. ❐

2-2. ملاحظات

- إنّ قانون ضرب المصفوفات قانون تشكيل داخلي على مجموعة المصفوفات المربّعة من المرتبة n أي $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$. وتصبح بذلك البنية $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$ حلقةً، حياديُّ الضرب فيها هو المصفوفة الواحديّة I_n .

  وتكون الحلقة $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ غير تبديليّة أيّاً كانت $n \geq 2$، كما يبيّن المثال الآتي :

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$$

  وتُصبح البنية $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),\cdot,+,\times\right)$ جبراً غير تبديلي على الحلقة $\mathbb{A}$.
- نقول إنّ مصفوفة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ قَلوبةٌ إذا وفقط إذا كانت عنصراً قلوباً في الحلقة $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$، ونرمز بالرمز $\mathcal{GL}_n(\mathbb{A})$ إلى زمرة العناصر القَلوبة في الحلقة $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{A}),+,\times\right)$.
- عند ضرب مصفوفتين M و N نكتب الجداء عادة MN عوضاً عن $M \times N$.

سنفترض في بقيّة هذا البحث أنّ الحلقة $\mathbb{A}$ حقل تبديليّ نرمز إليه بالرمز $\mathbb{K}$.

2-3. مبرهنة: إنّ $\left(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}),+,\cdot\right)$ فضاء شعاعي منتهي البعد على $\mathbb{K}$، بُعده يساوي np .

الإثبات

إنّ إثبات كون الفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$ سهلٌ ومتروك للقارئ. نعرّف، أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$، المصفوفة $E_{ij}=\left(\lambda_{kq}^{(i,j)}\right)_{(k,q)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ بالعلاقة $\lambda_{kq}^{(i,j)}=\delta_{ik}\delta_{jq}$، حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر الذي يُحقّق $\delta_{\alpha\alpha}=1$ و $\delta_{\alpha\beta}=0$ إذا كان $\alpha\neq\beta$.

$$E_{ij} : \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نُلاحظ بسهولة أنّ الجملة $\mathcal{E} = \left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ أساس للفضاء $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، نسمّيه الأساس القانوني، ومن ثَمّ نرى أنّ $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) = np$ لأنّ np هو عدد عناصر المجموعة $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$. ❐

2-4. مبرهنة. تكوّن مجموعة المصفوفات المثلّثيّة العليا $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، وكذلك مجموعة المصفوفات المثلّثيّة السفلى $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$، جبرَين جزئيّين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. أي إنّ كلّاً منهما مغلق بالنسبة إلى العمليات الثلاث ويحتوي على المصفوفة الواحديّة I_n.

الإثبات

يكفي أن نتحقق أنّ جداء ضرب مصفوفتين من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ينتمي إلى $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$، لأن التوثُّق من كون $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ سهل جدّاً ومتروك للقارئ.

لتكن M و N من $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$. ولنفترض أنّ $M = (a_{ij})$ و $N = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,$$
$$i > j \Rightarrow [M\times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0\hookleftarrow} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0\hookleftarrow} = 0$$

ونترك القارئ يثبتُ بأسلوب مماثل حالة $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$. ❐

2-5. مبرهنة. تكوّن مجموعة المصفوفات القطريّة $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$، جبراً جزئيّاً تبديليّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

الإثبات

الإثبات تحقُّق مباشر متروك للقارئ. ❐

3. مصفوفة تطبيق خطّي

3-1.**تعريف** : ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F. يُكتب الشّعاع $u(e_j)$ بطريقة وحيدة عبارةً خطيّةً بعناصر الأساس $\mathcal{F}$ كما يأتي:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

وذلك أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$. نسمّي المصفوفة $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ **مصفوفة التطبيق الخطيّ** u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$، ونرمز إليها $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$، كما يبيّن الشكل التوضيحيّ التالي :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) \end{array}$$

وأخيراً نلاحظ أنّه إذا كان $\mathcal{F}^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{F}$، كان

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p,\ a_{ij} = \left\langle f_i^*, u(e_j) \right\rangle$$

تنتج المبرهنة التالية مباشرة من التعريف والملاحظة السابقة.

3-2. **مبرهنة** : ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}), u \mapsto \mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

تقابلاً خطيّاً.

3-3. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$، وليكن $\dim E = p$ و $\dim F = n$. ثُمّ ليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F، رتبته r.
عندئذ يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ للفضاء E، ويوجد أيضاً أساس $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ للفضاء F، يُحقّقان:

$$\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&0&\cdots&0\\ 0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&1&0\\ 0&\cdots&0&1\end{matrix} & 0_{r\times p-r} \\ \hline 0_{n-r\times r} & 0_{n-r\times p-r}\end{array}\right] = J_{n,p,r}$$

الإثبات

لمّا كان $\mathrm{rg}\, u = r$ كان بُعد $\ker u$ مساوياً $p - r$. ليكن إذن $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء الجزئي $\ker u$، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ للفضاء E. ثُمّ لنعرّف الفضاء الجزئي $G = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_r)$، فيكون $E = G \oplus \ker u$.
إنّ مقصور u على G، أي $u_{|G}$، تطبيق خطّي متباين لأنّ

$$\ker u_{|G} = \ker u \cap G = \{0\}$$

ومن ثَمّ إذا عرّفنا $f_i = u(e_i)$ في حالة i من $\mathbb{N}_r$، كانت الجملة $(f_1, \ldots, f_r)$ جملة حرّة في F، لنتمّمها إذن إلى أساس $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ للفضاء F. عندئذ نتحقق بسهولة أنّ لمصفوفة u في الأساسين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ الشكل الموصوف في نص المبرهنة أي

$$\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = J_{n,p,r} \qquad \square$$

4-3. مبرهنة. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$.
وليكن التطبيق u من $\mathcal{L}(E,F)$، و v من $\mathcal{L}(F,G)$. عندئذ، أيّاً كان الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ للفضاء E، والأساس $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ للفضاء F، وأخيراً الأساس $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_m)$ للفضاء G، كان :

$$\mathrm{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathrm{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

الإثبات

لنضع $\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\mathrm{mat}(v,\mathcal{F},\mathcal{G}) = (b_{ij})$. فيكون

$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad u(e_j) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \\ \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad v(f_i) &= \sum_{k=1}^{m} b_{ki} g_k\end{aligned}$$

ينتج من ذلك أنّه، أيّاً كان j من $\mathbb{N}_p$، كان

$$v \circ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v(f_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{m} b_{ki} g_k) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}) g_k = \sum_{k=1}^{m} c_{kj} g_k$$

حيث $c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}$. إذن

$$\mathrm{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = (c_{ij})$$

وهذا يكافئ المساواة المطلوبة:

$$\mathrm{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathrm{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \qquad \square$$

5-3. **ملاحظة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء E، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء F . نتأمّل تطبيقاً خطّياً u من $\mathcal{L}(E,F)$، ونضع أخيراً $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$. لمّا كان $\mathcal{E}$ أساساً للفضاء E كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to E, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{E}}(X) = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

تقابلاً خطيّاً. وكذلك ، لأنّ $\mathcal{F}$ أساس للفضاء F، كان التطبيق الآتي تقابلاً خطياً.

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to F, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

ليكن x عنصراً من E، وليكن $y = u(x)$. يُعطى شعاعُ مركّبات x على الأساس $\mathcal{E}$ بالعلاقة $X = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$، وكذلك يعطى شعاع مركّبات y على الأساس $\mathcal{F}$ بالعلاقة $Y = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$. ويتحقّق القارئ بسهولة أنّ الشعاعين X و Y يرتبطان بالعلاقة $Y = M \times X$. فإذا عرّفنا التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto U_M(X) = M \times X$$

صار لدينا $U_M = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ u \circ \Phi_{\mathcal{E}}$. ويمكن تلخيص ذلك بالقول إنّ المخطّط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \arrow[r, "U_M"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{E}}"'] & \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{F}}"] \\
E \arrow[r, "u"'] & F
\end{tikzcd}$$

3-6. تعريف. لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمي **منقول** المصفوفة M المصفوفة ${}^tM = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يأتي

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n, \quad b_{ij} = a_{ji}$$

نقول إنّ المصفوفة المربّعة M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **متناظرة** إذا وفقط إذا كان $M = {}^tM$.
ونقول إنها **تخالفية** إذا وفقط إذا كانت تحقّق $M = -{}^tM$. لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتناظرة من المرتبة n، وبالرمز $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة التخالفية من المرتبة n. تلخّص المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة.

3-7. مبرهنة

① إنّ التطبيق $\Theta : \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}), M \mapsto {}^tM$ تقابلٌ خطّي.

② أيّاً كان A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و B من $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ كان ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

③ أيّاً كانت المصفوفة القَلوبة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كانت ${}^tA$ قَلوبة و ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

④ إنّ كلّاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، وإذا كان العدد المميّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، كان $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ وكان

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{و} \quad \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

الإثبات

① إنّ إثبات الخاصة ① مباشر وبسيط نتركه للقارئ.

② لنفترض أنّ $A = (a_{ij})$ وأنّ $B = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$[{}^t(A \times B)]_{ij} = [A \times B]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [{}^t B]_{ik} [{}^t A]_{kj} = [{}^t B \times {}^t A]_{ij}$$

وذلك أيّاً كان (i, j) من $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. وهذا ما يثبت الخاصّة ② .

③ لتكن A مصفوفة قَلوبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، عندئذ نجد $B = A^{-1}$ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق

$$A \times B = B \times A = I_n$$

وبالاستفادة من ② نجد

$${}^t B \times {}^t A = {}^t A \times {}^t B = {}^t I_n = I_n$$

ومن ثَمّ تكون ${}^t A$ قَلوبة، ويكون ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$.

④ واضح من التعريف أنّ كلّاً من $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ و $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. وإذا كان $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كوّنت الجملة $(S_{ij})_{(i,j)\in T_n}$ حيث $T_n = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 : i \le j\right\}$ و

$$\forall (i, j) \in T_n, \quad S_{ij} = \begin{cases} E_{ii} & : \quad i = j \\ E_{ij} + E_{ji} & : \quad i \ne j \end{cases}$$

أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. إذن

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card}\left(T_n\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

لنلاحظ، انطلاقاً من التعريف، أنه إذا كان العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 2 تحقَّقت المساواة $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

لذلك سنفترض فيما يأتي أنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2. وعندها تكوّن الجملة $(E_{ij}-E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$، ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{card}\Big(\big\{(i,j)\in \mathbb{N}_n^2 \,:\, i<j\big\}\Big) = \frac{n(n-1)}{2}$$

وأخيراً، أيّاً كانت المصفوفة M من $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ كان $-M = {}^tM = M$، ومن ثَمّ $M=0$ لأنّ العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2. إذن، من جهة أولى، لدينا

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M+{}^tM)}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M-{}^tM)}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

وهذا ما يثبتُ أنّ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. ❐

8-3. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. ليكن $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E أساسه الثنوي هو $\mathcal{E}^*=(e_1^*,\ldots,e_p^*)$، وليكن $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F أساسه الثنوي $\mathcal{F}^*=(f_1^*,\ldots,f_n^*)$. نتأمّل تطبيقاً خطيّاً u من $\mathcal{L}(E,F)$، عندئذ يكون

$${}^t\big(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F})\big) = \operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*)$$

الإثبات

لنضع $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = (a_{ij})$ و $\operatorname{mat}({}^tu,\mathcal{F}^*,\mathcal{E}^*) = (b_{ij})$. عندئذ يكون

$$b_{ij} = \big\langle {}^tu(f_j^*), e_i\big\rangle_{E^*,E} = \big\langle f_j^*, u(e_i)\big\rangle_{F^*,F} = a_{ji}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

4. رتبة مصفوفة

1-4. تعريف. لتكن المصفوفة $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي أعمدة M الجملة $(C_1(M),\ldots,C_p(M))$ من عناصر الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad C_j(M) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

وكذلك نسمّي أسطر M جملة العناصر $(R_1(M),\ldots,R_n(M))$ من عناصر الفضاء $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$ المعرّفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad R_i(M) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

2-4. تعريف. لتكن المصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. نسمّي **رتبة المصفوفة** M رتبة أعمدتها في الفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز $\operatorname{rg} M$. أي

$$\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{vect}\big((C_1(M),\ldots,C_p(M)\big)$$

3-4. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البُعد على حقل تبديليّ $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, e_2,\ldots,e_p)$ أساساً للفضاء E، و $\mathcal{F} = (f_1, f_2,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء F. عندئذ أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$، كان

$$\operatorname{rg}\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = \operatorname{rg} u$$

الإثبات

من جهة أولى، لدينا

$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg}\big(u(e_1),\ldots,u(e_1)\big)$$

ومن جهة ثانية، لمّا كان $\mathcal{F}$ أساساً للفضاء F، كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to F, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

تقابلاً خطيّاً يُحقِّق

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad \Phi_{\mathcal{F}}(C_j(M)) = u(e_j)$$

إذن

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} u &= \operatorname{rg}\big(\Phi_{\mathcal{F}}(C_1(M)),\ldots,\Phi_{\mathcal{F}}(C_p(M))\big) \\ &= \operatorname{rg}\big(C_1(M),\ldots,C_p(M)\big) = \operatorname{rg} M \end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب. ❐

4-4. **ملاحظة** : لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. وليكن التطبيق الخطيّ

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} U_M$، لأن أعمدة المصفوفة M هي صورة الأساس القانوني في الفضاء $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ وفق التّطبيق الخطّي U_M.

تفيدنا هذه الملاحظة في استنتاج المبرهنة الآتية من المبرهنة الموافقة في حالة التطبيقات الخطيّة.

5-4. **مبرهنة**. لتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. إنّ الخواص الآتية متكافئة.

① المصفوفة M قَلوبة.

② $\operatorname{rg} M = n$.

③ توجد R في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $M \times R = I_n$.

④ توجد L في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $L \times M = I_n$.

6-4. **مبرهنة**. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. عندئذ يكون

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^t M$$

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}_\ell$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{\ell\times 1}(\mathbb{K})$. ولنرمز بالرمز $\mathcal{E}_\ell^*$ إلى أساسه الثنوي. ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$U_M : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة 3-8.

$$M = \mathrm{mat}(U_M, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n) \text{ و } {}^tM = \mathrm{mat}({}^tU_M, \mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_p^*)$$

ولكن، نعلم بالاستفادة مما درسناه في بحث الثنويّة، أنّ $\mathrm{rg}\, U_M = \mathrm{rg}\, {}^tU_M$ ، ومن ثَمّ نستنتج أنّ

$$\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, {}^tM$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

نتيجة. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. إنّ رتبة M هي رتبة أسطرها في الفضاء E $\mathcal{M}_{1\times p}(\mathbb{K})$. ومن ثَمّ يكون $\mathrm{rg}\, M \le \min(n, p)$.

وإذا استفدنا من خواص رتبة تطبيق خطّي حصلنا على النتيجة الآتية.

4-8.نتيجة : لتكن A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، و B من $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. عندئذ

$$\mathrm{rg}(A \times B) \le \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$$

- فإذا كانت A قَلوبة كان $\mathrm{rg}(A \times B) = \mathrm{rg}\, B$.
- وإذا كانت B قَلوبة كان $\mathrm{rg}(A \times B) = \mathrm{rg}\, A$.

5. تغيير الأساس

1-5.مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E . وأخيراً لتكن $P = (p_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. حتى تكون جملة الأشعّة $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ ، حيث $a_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ ، أساساً للفضاء E يلزم ويكفي أن تكون المصفوفةُ P قَلوبةً.

الإثبات

ليكن u التطبيق الخطّي من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالشرط $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ u(e_j) = a_j$. عندئذ يكون $P = \operatorname{mat}\left(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right)$. ومن ثَمّ تكون لدينا التكافؤات الآتية.

$$(\text{قَلوبة } P) \Leftrightarrow (n = \operatorname{rg} P) \Leftrightarrow (n = \operatorname{rg} u) \Leftrightarrow (E \text{ تولِّد } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (E \text{ أساس في } \mathcal{A})$$

وهذا يثبت المطلوب. ❒

5-2.**تعريف**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E ، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . نسمّي **مصفوفة الانتقال** من $\mathcal{E}$ إلى $\mathcal{E}'$ ، مصفوفة التطبيق المطابق I_E ، من الفضاء E مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}'$ إلى الفضاء نفسه مزوّداً بالأساس $\mathcal{E}$ ، أي $(E, \mathcal{E}') \xrightarrow{I_E} (E, \mathcal{E})$. ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ ، فيكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \operatorname{mat}(I_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$.

5-3. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E ، وليكن $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ أساساً آخر للفضاء E . عندئذ أيّاً كان x من E كان

$$X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$$

وقد كتبنا $X = {}^t[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ دلالة على شعاع مركِّبات x في الأساس $\mathcal{E}$ ، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ، و $X' = {}^t[\xi'_1, \ldots, \xi'_n] \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ دلالة على شعاع مركِّبات العنصر x أيضاً في الأساس $\mathcal{E}'$ ، أي $x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i e'_i$.

الإثبات

لتكن $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = (p_{ij})$ ، عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

ومن ثَمّ

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \xi'_j) e_i$$

ولأنّه لدينا أيضاً $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ، ينتج أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \xi'_j$$

وهذا يُكافئ المساواة $X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times X'$ المطلوبة. ❒

5-4. **ملاحظة**. لمّا كان $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E كان التطبيقان الخطيان الآتيان تقابلين.

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E, \quad {}^t[\xi_1,\ldots,\xi_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

$$\Phi_{\mathcal{E}'} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to E, \quad {}^t[\xi'_1,\ldots,\xi'_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi'_i e'_i$$

ويمكننا التعبير عن المبرهنة السابقة بكتابة :

$$\forall x \in E, \quad \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times \Phi_{\mathcal{E}'}^{-1}(x)$$

5-5. **مبرهنة**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ ثلاثة أساسات للفضاء E . عندئذ يكون $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \times P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$.

الإثبات

إذا تأمّلنا المخطّط التبديلي الآتي

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{E}) \arrow[r, "I_E"] & (E,\mathcal{F}) \\
(E,\mathcal{G}) \arrow[u, "I_E"] \arrow[ur, "I_E"'] &
\end{tikzcd}$$

أمكننا أن نكتب $\mathrm{mat}(I_E,\mathcal{G},\mathcal{E}) = \mathrm{mat}(I_E,\mathcal{F},\mathcal{E}) \times \mathrm{mat}(I_E,\mathcal{G},\mathcal{F})$. وهذه هي المساواة المطلوبة. ❒

5-6. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E}$ و $\mathcal{E}'$ أساسين للفضاء E، و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ أساسين للفضاء F. وأخيراً ليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \times \operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{F}') \times (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

الإثبات

كما في المبرهنة السابقة، يكفي أن ننظر في المخطّط التبديلي الآتي

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{E}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "I_E^{-1}"'] & (F,\mathcal{F}) \\
(E,\mathcal{E}') \arrow[r, "u"] & (F,\mathcal{F}') \arrow[u, "I_F"']
\end{tikzcd}$$

فنجد المطلوب. ❐

5-7. **مبرهنة وتعريف**. نقول عن مصفوفتين A و B من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ إنّهما **متكافئتان** إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفتان قَلوبتان P من $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ و Q من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّقان $B = QAP$، ونكتب في هذه الحالة $A \approx B$. وتكون العلاقة الثنائيّة الآتية

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = QAP$$

المعرّفة على عناصر $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، علاقة تكافؤ على هذه المجموعة.

5-8. **مبرهنة**. لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، عندئذ

$$A \approx B \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

الإثبات

إن الاقتضاء $(\Rightarrow)$ واضح استناداً إلى النتيجة 4-8.

وبالعكس، لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ تُحقّق $\operatorname{rg} A = r$. وليكن U_A التطبيق الخطيّ القانوني الموافق للمصفوفة A أي

$$U_A : \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto A \times X$$

فإذا كان $\mathcal{E}_p$ و $\mathcal{E}_n$ الأساسين القانونيين في $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، كان

$$A = \mathrm{mat}(U_A, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن بمقتضى المبرهنة 3-3. يوجد أساسان $\mathcal{E}'_p$ و $\mathcal{E}'_n$ في $\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K})$ و $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ على التوالي، يُحقّقان

$$J_{n,p,r} = \mathrm{mat}(U_A, \mathcal{E}'_p, \mathcal{E}'_n)$$

ومن ثَمّ، بالاستفادة من المبرهنة 5-6.، يكون

$$A = P_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}'_n} J_{n,p,r} (P_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}'_p})^{-1}$$

وهذا يُثبت أنّ $A \approx J_{n,p,r}$.

فإذا كان $\mathrm{rg}\, A = r = \mathrm{rg}\, B$ كان $A \approx J_{n,p,r} \approx B$. وهذا يُبرهن صحةَ الاقتضاء الثاني أي $(\Leftarrow)$. ❐

5-9. مبرهنة وتعريف. نقول عن مصفوفتين مربّعتين A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ إنهما **متشابهتان** إذا وفقط إذا وُجِدَتْ مصفوفة قَلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $B = PAP^{-1}$، ونكتب في هذه الحالة $A \cong B$. وتكون العلاقة الثنائيّة المعرّفة بالعلاقة :

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = PAP^{-1}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5-10. مبرهنة. لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية.

① إنّ المصفوفتين ${}^tA$ و ${}^tB$ متشابهتان.

② إنّ المصفوفتين A^m و B^m متشابهتان، وذلك أيّاً كانت m من $\mathbb{N}^*$.

③ وإذا كانت A قَلوبة كانت B قَلوبة وكانت المصفوفتان A^{-1} و B^{-1} متشابهتين.

الإثبات

إنّ إثبات هذه المبرهنة بسيط انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. ❐

6. أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطّي

1-6. تعريف. لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربّعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نسمّي العنصر $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ من $\mathbb{K}$ **أثر المصفوفة** A، ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{tr} A$.

تلخّص المبرهنة الآتية خواص أثر مصفوفة.

2-6. مبرهنة

① إنّ التطبيق $\operatorname{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \operatorname{tr} A$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② أيّاً كانت A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، كان $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}({}^tA)$.

③ إنّ أثر المصفوفة الواحديّة يساوي n، أي $\operatorname{tr} I_n = n$.

④ أيّاً كانت A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و B من $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$، كان

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$$

الإثبات

إنّ الخواصّ الثلاث الأولى واضحة من التعريف. لنثبت فقط الخاصة الرابعة.

لنضع $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ فيكون

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad [AB]_{ii} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji}$$

و

$$\forall j \in \mathbb{N}_p, \quad [BA]_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} AB &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\Big) = \sum_{j=1}^{p} [BA]_{jj} = \operatorname{tr} BA\end{aligned}$$

وهذا يُثبت المطلوب. ❐

تبيّن الخاصة التالية أنّ أثر المصفوفة هو الشكل الخطيّ الوحيد من $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ الذي يُحقّق الشرطين ③ و ④ من المبرهنة السابقة.

3-6. **مبرهنة**. لنفترض أن العدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 0. وليكن

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

شكلاً خطيّاً على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ يحقِّق الشرطين

$$\Phi(I_n) = n,$$

و

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(BA)$$

عندئذ يكون $\Phi = \mathrm{tr}$.

الإثبات

ليكن $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نترك القارئ يتحقق صحةَ الخاصّة الآتية :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \mathbb{N}_n^4, \quad E_{ij}E_{\ell k} = \delta_{\ell j}E_{ik}$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر. ومن ثَمَّ، أيّاً كان الدليلان **المختلفان** i و j من $\mathbb{N}_n$، كان

$$E_{ij} = E_{i1}E_{1j} - E_{1j}E_{i1}$$

لذا يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i \neq j \Rightarrow \Phi(E_{ij}) = 0$$

ومن جهة أخرى، أيّاً كان الدليل j من $\mathbb{N}_n$، **المختلف** عن 1، كان

$$E_{jj} = E_{j1}E_{1j} - E_{1j}E_{1j}$$

إذن يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \ \Phi(E_{jj}) = \Phi(E_{11})$$

فإذا عرّفنا $\lambda = \Phi(E_{11})$ ووضعنا $\Psi = \Phi - \lambda \cdot \mathrm{tr}$، كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \Psi(E_{ij}) = 0$$

نستنتج من ذلك أنّ $\Psi = 0$ أو أنّ $\Phi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

ولمّا كان $\Phi(I_n) = n$ أمكننا حساب λ لنجد $\lambda = 1$. وهنا نستفيد من كوْن العدد المميّز للحقل $\mathbb{K}$ يساوي 0. في الحقيقة يكفي ألاّ يقسمَ العددُ المميِّزُ للحقلِ $\mathbb{K}$ العددَ n. وبذلك يكتمل الإثبات. ❐

6-4. **مبرهنة**. لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولنفترض أنهما متشابهتان. عندئذ يكون $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

الإثبات

توجد بمقتضى الفرْض مصفوفة قَلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ تُحقّق $A = P\,B\,P^{-1}$. لذا

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P\,B\,P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}\,P\,B) = \operatorname{tr}(I_n B) = \operatorname{tr} B$$ ❐

6-5. **مبرهنة وتعريف**. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن التطبيق الخطيّ u من $\mathcal{L}(E)$. عندئذ لا يتعلّق المقدار $\operatorname{tr}(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}))$ بالأساس المُختار $\mathcal{E}$ للفضاء E . لذلك نسمّيه **أثر التطبيق الخطي** u ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{tr} u$.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E}'$ أساساً آخر للفضاء E، ولنضع $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. فيكون، بمقتضى المبرهنة 6-5،

$$\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) = P\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')\,P^{-1}$$

ينتج من ذلك أنّ $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E}) \cong \operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$، ومن ثَمّ يكون

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})\right) \cong \operatorname{tr}\left(\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')\right)$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

نستنتج من التعريف السابق ومن خواص أثر المصفوفة النتيجة الآتية.

6-6. **مبرهنة** : ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$.

① إنّ التطبيق $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K},\quad u \mapsto \operatorname{tr} u$ شكلٌ خطيّ على $\mathcal{L}(E)$.

② أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} {}^t u$.

③ إنّ أثر التطبيق المطابق يساوي $\dim E$، أي $\operatorname{tr} I_E = \dim E$.

④ أيّاً كان u و v من $\mathcal{L}(E)$، لدينا $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

⑤ إذا كان p إسقاطاً [1] للفضاء E، كان $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$.

---

[1] أي $p \in \mathcal{L}(E)$ ويحقّق $p \circ p = p$.

تمرينات

التمرين 1. لتكن $M=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ مصفوفة ثوابتها في حلقة تبديلية A . أثبت أن

$$M^2-(a+d)M+(ad-bc)I_2=0$$

الحل

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\big(M-(a+d)I_2\big)M &= \begin{bmatrix} -d & b\\ c & -a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} bc-ad & 0\\ 0 & bc-ad\end{bmatrix} = -(ad-bc)I_2\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. وبوجه خاص

$$\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ M^2\in\mathrm{vect}(I,M)$$

التمرين 2. لنتأمّل المجموعة $\mathcal{D}$ المكوّنة من المصفوفات $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق الشرطين

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2, a_{ij}\geq 0 \quad \text{و} \quad \forall i\in\mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$$

① أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{D}$ مغلقة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

② عيِّن المصفوفات A من $\mathcal{D}\cap\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $A^{-1}\in\mathcal{D}$.

الحل

لنرمز بالرمز $\mathbb{1}$ إلى الشعاع من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ الذي تساوي جميع مركّباته الواحد. عندئذ تنتمي المصفوفة $A=(a_{ij})$ إلى $\mathcal{D}$ إذا وفقط إذا كان $\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2, a_{ij}\geq 0$ و $A\mathbb{1}=\mathbb{1}$.

① فإذا كانت A و B مصفوفتين من $\mathcal{D}$ كان من الواضح أنّ أمثال AB موجبة، وكان

$$(AB)\mathbb{1}=A(B\mathbb{1})=A\mathbb{1}=\mathbb{1}$$

إذن $AB\in\mathcal{D}$.

② لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة قلوبة من $\mathcal{D}$ ولنفترض أنّ مقلوبها $B=A^{-1}=(b_{ij})$ ينتمي إلى $\mathcal{D}$. نستنتج من المساواة $AB=I_n$ أنّه في حالة $t\neq s$ يكون $\sum_{k=1}^{n}a_{sk}b_{kt}=0$ ولكنّ جميع حدود هذا المجموع موجبة، إذن لقد أثبتنا أنّ

$$(*)\quad \forall(s,t)\in\mathbb{N}_n^2,\quad (s\neq t)\Rightarrow(a_{s1}b_{1t}=a_{s2}b_{2t}=\cdots=a_{sn}b_{nt}=0)$$

ليكن j عنصراً من $\mathbb{N}_n$. بالطبع لا يمكن أن تكون الجملة $(a_{ij})_{i\in\mathbb{N}_n}$ معدومة، وإلاّ ما كانت A قلوبة. إذن المجموعة $C_j=\{i\in\mathbb{N}_n : a_{ij}\neq 0\}$ غير خالية. لنفترض أنّ s و t عنصران من C_j . عندئذ بالاستفادة من الخاصّة $(*)$ نرى أنّ

$$\begin{aligned} a_{tj}\neq 0 &\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_n\backslash\{t\},\quad b_{jk}=0\\ a_{sj}\neq 0 &\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_n\backslash\{s\},\quad b_{jk}=0\end{aligned}$$

فإذا كان $s\neq t$ كان $b_{jk}=0$ أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n=(\mathbb{N}_n\backslash\{t\})\cup(\mathbb{N}_n\backslash\{s\})$ وهذا يناقض كون المصفوفة B قَلوبَة. إذن يجب أن يكون $t=s$، وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\mathrm{card}(C_j)=1$. لنرمز إذن $\sigma(j)$ إلى العنصر الوحيد في C_j، ولنضع $a_{\sigma(j)j}=\lambda_j$ فيكون

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad a_{ij}=\lambda_j\delta_{i\sigma(j)}$$

وقد استعملنا الرمز $\delta_{\alpha\beta}$ دلالةً على رمز كرونكر المعروف.

إذا كان $j_1\neq j_2$ وافترضنا أنّ $\sigma(j_1)=\sigma(j_2)$ كان العمودان $C_{j_1}(A)$ و $C_{j_2}(A)$ مرتبطين خطيّاً، وهذا يناقض كون المصفوفة A قَلوبةً. إذن يجب أن يكون التطبيق $\sigma:\mathbb{N}_n\to\mathbb{N}_n$ متبايناً، فهو إذن تبديل على المجموعة $\mathbb{N}_n$.

لقد أثبتنا أنّه إذا كانت A مصفوفة قلوبة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وكانت أمثال كلٍّ من A و A^{-1} موجبة، وُجدت أعداد $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ من $(\mathbb{R}_+^*)^n$ ووُجِد تبديل σ في $\mathcal{S}_n$ تُحقّق $A=(\lambda_j\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$. والعكس صحيح وضوحاً إذ إنّ مقلوب المصفوفة $A=(\lambda_j\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ هو $\left(\lambda_i^{-1}\delta_{i\sigma^{-1}(j)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.

فإذا اشترطنا أن تكون A مصفوفة قلوبة من $\mathcal{D}$ وأن تنتمي A^{-1} أيضاً إلى $\mathcal{D}$، استنتجنا أنّ للمصفوفة A الصيغة $A = (\lambda_j \delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$، واستنتجنا من كون $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$ أنّ $\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \lambda_j = 1$. إذن يوجد تبديل σ في $\mathcal{S}_n$ يحقّق $A = (\delta_{i\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$.

وبالعكس، تكون كلُّ مصفوفة من هذا الشكل قلوبة وتنتمي هي ومقلوبها إلى $\mathcal{D}$. ■

التمرين 3. نقول إنّ المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **متناظرة مركزيّاً** إذا وفقط إذا حقّقت الشرط: $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

① لتكن $P = \left(\delta_{i,n+1-j}\right)$ المصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، التي جميع ثوابتها أصفار ما عدا تلك التي تقع على القطر الثانوي فتساوي الواحد. أثبت أنّ A متناظرة مركزيّاً إذا وفقط إذا كان $PA = AP$.

② أثبت أنّ جداء ضرب مصفوفتين متناظرتين مركزيّاً هو مصفوفة متناظرة مركزيّاً.

③ أثبت أنّ مقلوب مصفوفة قَلوبة متناظرة مركزيّاً هو مصفوفة متناظرة مركزيّاً.

الحل

① لتكن المصفوفة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ نجد بحساب مباشر أنّ

$$\begin{aligned}
[AP]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{n+1-k,j} = a_{i,n+1-j}\\
[AP]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{n+1-i,k}a_{kj} = a_{n+1-i,j}
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
AP = PA &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad [PA]_{n+1-i,j} = [AP]_{n+1-i,j}\\
&\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}
\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ التكافؤ المطلوب.

② لتكن A و B مصفوفتين متناظرتين مركزيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$(AB)P = A(BP) = A(PB) = (AP)B = (PA)B = P(AB)$$

وهذا يثبتُ أنّ AB مصفوفة متناظرة مركزيّاً أيضاً.

③ لتكن A مصفوفةً قلوبةً متناظرة مركزيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ بضرب طرفي المساواة $AP = PA$ بالمقدار A^{-1} من الطرفين نجد $A^{-1}(AP)A^{-1} = A^{-1}(PA)A^{-1}$ أو $A^{-1}P = PA^{-1}$. فالمصفوفة A^{-1} متناظرة مركزيّاً أيضاً. ■

ملاحظة. يمكن أن نثبت أنّ مجموعة المصفوفات المتناظرة مركزيّاً في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، تكوّن فضاءً جزئيّاً من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ بُعده $\left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$.

التمرين 4. ليكن α و β عددين حقيقيين مختلفين، ولتكن M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة تحقّق

$$M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_n = 0, \quad M \neq \alpha I_n, \quad M \neq \beta I_n$$

1. أثبت أن بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي $V(M) = \mathrm{vect}(M, I_n)$ يساوي 2 .

2. أثبت أنه لا توجد في $V(M)$ إلاّ مصفوفتان مختلفتان A و B تحققان الشروط $A^2 = A$ ، $A \notin \{0, I_n\}$ و $B^2 = B$ ، $B \notin \{0, I_n\}$.
ثم أثبت أن $AB = BA = 0$ وأن (A, B) أساس للفضاء $V(M)$.

3. أثبت أنّ $V(M)$ جبر جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، وأنّه إذا كانت C من $V(M)$ مصفوفة قلوبة كان C^{-1} عنصراً من $V(M)$.

الحل

1. لنثبت أنّ الجملة (M, I_n) جملة حرّة. في الحقيقة، لنفترض أنّ $\lambda M + \mu I_n = 0$.

- إذا كانت $\lambda \neq 0$ ، عرّفنا $\kappa = -\frac{\mu}{\lambda}$. وعندئذ يكون $M = \kappa I_n$ وبالتعويض في العلاقة
$$M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_n = 0$$
نستنتج أنّ κ جذرٌ لكثير الحدود $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = (X-\alpha)(X-\beta)$ ، أي إنّ $M = \alpha I_n$ أو $M = \beta I_n$ وهذا يُخالف الفرْض.
- إذن يجب أن يكون $\lambda = 0$ ، وعندئذ نستنتج من المساواة $\lambda M + \mu I_n = 0$ أنّ $\mu = 0$ أيضاً.

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ الجملة (M, I_n) أساسٌ للفضاء $V(M)$ وأنّ $\dim V(M) = 2$.

2. لتكن C مصفوفة من $V(M)$ عندئذ يوجد عددان λ و μ يُحقّقان $C = \lambda M + \mu I_n$.
وعندئذ يكون

$$\begin{aligned}
C^2 - C &= (C - I_n)C = \big(\lambda M + (\mu - 1)I_n\big)\big(\lambda M + \mu I_n\big)\\
&= \lambda^2 M^2 + \big(\mu\lambda + (\mu - 1)\lambda\big)M + \mu(\mu - 1)I_n\\
&= \lambda^2\big((\alpha + \beta)M - \alpha\beta I_n\big) + \lambda(2\mu - 1)M + \mu(\mu - 1)I_n\\
&= \lambda\big(\lambda(\alpha + \beta) + 2\mu - 1\big)M + \big(\mu(\mu - 1) - \lambda^2\alpha\beta\big)I_n
\end{aligned}$$

وعليه، لأنّ الجملة (M, I_n) جملة حرّة، نستنتج أنّ

$$C^2 = C \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\lambda(\alpha + \beta) + 2\mu - 1) = 0\\ \mu(\mu - 1) - \lambda^2\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

فإذا كان $\lambda = 0$ استنتجنا من المعادلة الثانية أنّ $\mu \in \{0,1\}$، ومن ثَمّ أنّ $C \in \{0, I_n\}$.
وعليه

$$\begin{aligned}
(C^2 = C) \wedge (C \notin \{0, I_n\}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu - 1 = -\lambda(\alpha + \beta)\\ (2\mu - 1)^2 = 4\lambda^2\alpha\beta + 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{1 - \lambda(\alpha + \beta)}{2}\\ \lambda^2(\alpha - \beta)^2 = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \left\{\left(\frac{1}{\alpha - \beta}, \frac{-\beta}{\alpha - \beta}\right), \left(\frac{1}{\beta - \alpha}, \frac{-\alpha}{\beta - \alpha}\right)\right\}\\
&\Leftrightarrow C \in \left\{\frac{1}{\alpha - \beta}(M - \beta I_n), \frac{1}{\beta - \alpha}(M - \alpha I_n)\right\}
\end{aligned}$$

نعرّف إذن $A = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(M - \alpha I_n)$ و $B = \dfrac{1}{\alpha - \beta}(M - \beta I_n)$ فيكون

$$\big\{C \in V(M) : C^2 = C\big\} = \big\{0, I_n, A, B\big\}$$

ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
AB = BA &= -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(M - \alpha I_n)(M - \beta I_n)\\
&= -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\Big(M^2 - (\alpha + \beta)M + \alpha\beta I_n\Big) = 0
\end{aligned}$$

وكذلك فإنّ الجملة (A,B) جملة حرّة، لأنّه إذا كان $aA+bB=0$ استنتجنا، بضرب طرفي هذه المساواة بالمصفوفة A أنّ $aA=0$، ومن ثمّ $a=0$ لأنّ $A\neq 0$. وهذا بدوره يقتضي أنّ $b=0$. ولمّا كان بُعد الفضاء $V(M)$ يساوي 2 استنتجنا أنّ (A,B) أساس للفضاء $V(M)$.

3. يكفي لإثبات أنّ $V(M)$ جبرٌ جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أن نلاحظ أنّ $I_n\in M$ وأنّ جداء ضرب عنصرين من $V(M)$ ينتمي إلى $V(M)$، وهذا في الحقيقة أمرٌ بسيط إذا لاحظنا مثلاً أنّ

$$\big(aA+bB\big)\big(a'A+b'B\big)=aa'A+bb'B$$

وأخيراً لتكن $C=aA+bB$ مصفوفة ما من $V(M)$. ولنفترض أنّ C مصفوفة قلوبة. عندئذ يجب أن يكون $a\neq 0$ و $b\neq 0$، لأنّ كلاً من A و B غير قَلوبة. فإذا عرّفنا $C'=\frac{1}{a}A+\frac{1}{b}B$ كان لدينا وضوحاً

$$CC'=C'C=A+B=I_n$$

إذن $C^{-1}=C'\in V(M)$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

التمرين 5. لتكن A و B المصفوفتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المعرّفتين كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

ولتكن المجموعة

$$\mathcal{H}=\left\{xA+yB\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. احسب $(A+B)^n$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.

2. أثبت أن عناصر $\mathcal{H}$ ليست قلوبة في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. أثبت أن البنية $(\mathcal{H},+,\times)$، إذ يمثّل $+$ و $\times$ جمع وضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$، حقلٌ. عيّن حيادي الضرب وأثبت أن هذا الحقل يشاكل تقابلياً حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

الحل

1. لنضع $K = A + B$ ولنلاحظ أنّ

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

نجد بحساب بسيط أنّ $K^2 = -3K$ ، وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K^n = (-3)^{n-1} K$$

2. لنعرّف الشعاع $e = {}^t[1, 1, 1]$. عندئذ نلاحظ أنّ $Ae = 0$ و $Be = 0$. إذن

$$\forall M \in \mathcal{H}, \quad Me = 0$$

وهذا بالطبع يُثبتُ أنّ $\mathcal{H} \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^3) = \varnothing$.

3. نجري في هذا السؤال بعض الحسابات على المصفوفات، ومن المناسب أن نعرّف المصفوفة P الآتية:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

فيكون $A = P - I$ و $B = P^2 - I$. وأخيراً نعرّف

$$\mathbb{1} = -\frac{1}{3}(A + B) = \frac{1}{3}(2I - P - P^2)$$
$$\mathbb{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}(P - P^2)$$

من الواضح أنّ $\mathcal{H} = \mathrm{vect}(\mathbb{1}, \mathbb{J})$. كذلك نلاحظ مباشرة استناداً إلى الطلب الأوّل أنّ $\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}$ ، وأنّ

$$\mathbb{1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{1} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(2I - P - P^2)(P - P^2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(P - P^2) = \mathbb{J}$$

و

$$\mathbb{J}^2 = \frac{1}{3}(P - P^2)^2 = \frac{1}{3}(P^2 + P - 2I) = -\mathbb{1}$$

لنتأمّل إذن التقابل الخطّي Φ بين الفضاءَين الشعاعيين $\mathbb{C}$ و $\mathcal{H}$ على الحقل $\mathbb{R}$ المعطى كما يأتي :

$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{H}, \quad \Phi(x + y\,\mathrm{i}) = x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{J}$$

كما نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\Phi(x+y\,\mathrm{i})\Phi(x'+y'\,\mathrm{i}) &= (x\mathbb{1}+y\mathbb{J})\times(x'\mathbb{1}+y'\mathbb{J})\\ &= (xx'-yy')\mathbb{1}+(xy'-yx')\mathbb{J}\\ &= \Phi\big((x+y\,\mathrm{i})(x'+y'\,\mathrm{i})\big)\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{H}$ مغلق بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، وأنّ التطبيق Φ هو، في آن معاً، تقابلٌ وتشاكلٌ بين الحقل $(\mathbb{C},+,\times)$ والبنية $(\mathcal{H},+,\times)$ فهي إذن حقلٌ يشاكل تقابليّاً حقل الأعداد العقديّة. وحيادي الضرب في $(\mathcal{H},+,\times)$ هو $\mathbb{1}$. ■

التمرين 6. ليكن الفضاء الشعاعي $E=\mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})$ حيث $p\geq 2$. وليكن u من $\mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطّي الذي يقرن بكلِّ شعاعٍ $X={}^t[x_1,\ldots,x_p]$ من الفضاء E، الشعاع $u(X)=Y={}^t[y_1,\ldots,y_p]$ من E، المعرّف كما يلي :

$$\forall i\in\mathbb{N}_p,\qquad y_i=\frac{1}{p-1}\sum_{j\in\mathbb{N}_p\setminus\{i\}}x_j$$

1. عيّن $A=\mathrm{mat}(u,\mathcal{E},\mathcal{E})$، و $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_p)$ هو الأساس القانوني في E.
2. لتكن I المصفوفة الواحديّة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$، ولتكن J المصفوفة في $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ التي جميع ثوابتها تساوي 1.
   ① احسب J^n في حالة n من $\mathbb{N}$.
   ② أثبت أنه أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، توجد ثنائية (a_n,b_n) يطلب تعيينها تحقّق
   $$A^n=a_nA+b_nI$$
   ③ أثبت أن A قَلوبة واحسب A^{-1}.
   ④ أثبت أنه يوجد (λ_1,λ_2) في $\mathbb{R}^2$، تُحقّق $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)=0$.
3. لتكن $C=\dfrac{p-1}{p}A+\dfrac{1}{p}I$. أثبت أنّ C مصفوفة لإسقاط q في الأساس $\mathcal{E}$. عيّن كلاً من $E_1=\mathrm{Im}\,q$ و $E_2=\ker q$، ثم عيّن أساساً $\mathcal{F}$ للفضاء E تكون عنده المصفوفة $\tilde{A}=\mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F})$ مصفوفة قطريّة، وعيّن مصفوفة قَلوبة Q تُحقّق $A=Q\,\tilde{A}\,Q^{-1}$.

الحل

1. في الحقيقة نجد مباشرة أنّ

$$A=\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

①.2 نلاحظ أولاً أنّ $J^2=pJ$ وينتج من ذلك أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J^n=p^{n-1}J$.

②.2 نلاحظ أنّ $(p-1)A=J-I$، ولأنّ المصفوفتين I و J تتبادلان استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}(p-1)^nA^n&=(J-I)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}J^k\\&=(-1)^nI+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}p^k\right)J\\&=(-1)^nI+\frac{(p-1)^n-(-1)^n}{p}J\end{aligned}$$

وأخيراً

$$(p-1)^nA^n=(-1)^nI+\frac{(p-1)^n-(-1)^n}{p}\big(I+(p-1)A\big)$$

ومنه

$$A^n=\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}\right)}_{a_n}I+\underbrace{\left(\frac{p-1}{p}-\frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}\right)}_{b_n}A$$

③.2 وبوجه خاص، نجد في حالة $n=2$ أنّ

$$\begin{aligned}A^2&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p-1)}\right)I+\left(\frac{p-1}{p}-\frac{1}{p(p-1)}\right)A\\&=\frac{1}{p-1}I+\frac{p-2}{p-1}A\end{aligned}$$

ومنه $\big((p-1)A-(p-2)I\big)A=I$. إذن المصفوفة A قَلوبة، ولدينا

$$A^{-1}=(p-1)A-(p-(p-2))I$$

2.④ لقد رأينا أنّ $(p-1)A^2-(p-2)A-I=0$ وهذا يُكافئ

$$\big((p-1)A+I\big)\big(A-I\big)=0$$

ومنه

$$\left(A+\frac{1}{p-1}I\right)\big(A-I\big)=0$$

إذن يكفي أن نعرّف $\lambda_1=-\dfrac{1}{p-1}$ و $\lambda_2=1$ لنجد المطلوب.

3. لتكن $C=\dfrac{p-1}{p}A+\dfrac{1}{p}I=\dfrac{1}{p}J$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $C^2=C$ وهذا يُثبتُ أنّ التطبيق الخطّي q الذي مصفوفته C، بالنسبة إلى الأساس القانوني، هو إسقاطٌ خطّي.

وإذا عرّفنا الشعاع $\mathbb{1}={}^t[1,1,\ldots,1]$ لاحظنا أنّ $C=\dfrac{1}{p}\mathbb{1}\times{}^t\mathbb{1}$، وعليه

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}),\quad CX=\frac{1}{p}({}^t\mathbb{1}X)\mathbb{1}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$E_1=\operatorname{Im}q=\mathbb{R}\mathbb{1} \text{ و } E_2=\ker q=\left\{X\in\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}):{}^t\mathbb{1}X=0\right\}$$

ليكن إذن الأساس $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_p)$ للفضاء E المعرّف بدلالة الأساس القانوني $\mathcal{E}$ كما يأتي :

$$f_p=\sum_{j=1}^{p}e_j=\mathbb{1},\quad \forall k\in\mathbb{N}_{p-1},\quad f_k=e_k-e_{k+1}$$

فيكون $E_1=\operatorname{vect}(f_p)$ و $E_2=\operatorname{vect}(f_1,\ldots,f_{p-1})$.

وبالاستفادة من كون $q=\dfrac{p-1}{p}u+\dfrac{1}{p}I$ نجد

$$\forall k\in\mathbb{N}_p,\quad u(f_k)=\frac{p}{p-1}q(f_k)-\frac{1}{p-1}f_k$$

ومنه

$$u(f_p)=f_p,\quad \forall k\in\mathbb{N}_{p-1},\quad u(f_k)=-\frac{1}{p-1}f_k$$

فيكون

$$\widetilde{A}=\mathrm{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F})=\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & p-1\end{bmatrix}$$

وإذا تأمّلنا المخطَّط التبديلي المجاور استنتجنا أنّ

$$\begin{array}{ccc}(E,\mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (E,\mathcal{E})\\ {\scriptstyle I^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle I}\\ (E,\mathcal{F}) & \xrightarrow{u} & (E,\mathcal{F})\end{array}$$

$$A=Q\widetilde{A}Q^{-1}$$

حيث $Q=\mathrm{mat}(I,\mathcal{F},\mathcal{E})$. أي

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1\\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 7. ليكن u التطبيق الخطّي من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ الذي تعطى مصفوفته بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ كما يلي :

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

اكتب المصفوفة $M'=\mathrm{mat}(u,\mathcal{E}',\mathcal{E}')$ في حالة $\mathcal{E}'=(e_1',e_2',e_3')$ هو الأساس المعرّف كما يلي :

$$e_1'=e_1+e_2+e_3,\quad e_2'=e_2+e_3,\quad e_3'=e_3$$

الحل

1. لدينا

$$\begin{aligned} u(e_1) &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ u(e_2) &= 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ u(e_3) &= 3e_1 + e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

ونجد بحساب بسيط أنّ

$$\begin{aligned} u(e_1') &= 6e_1' \\ u(e_2') &= 5e_1' - e_2' - e_3' \\ u(e_3') &= 3e_1' - 2e_2' + e_3' \end{aligned}$$

إذن

$$\operatorname{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

التمرين 8. ليكن الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$، حيث $n \geq 2$. وليكن σ من $\mathcal{S}_n$ تبديلاً على المجموعة $\mathbb{N}_n$. ولننظر في التطبيق الخطّي p_σ من $\mathcal{L}(E)$ الذي يقرن بكلّ شعاع $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ الشعاع ${}^t[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$ $= p_\sigma(X)$.

1. عبّر باستعمال رمز كرونيكر عن المصفوفة $P_\sigma = \operatorname{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij}^\sigma)_{ij}$. في حالة $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ هو الأساس القانوني في E.

2. لتكن $M = (m_{ij})_{ij}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، احسب $P_\sigma M$ و $M P_\sigma$ و $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$.

3. استنتج أن المصفوفتين التاليتين متشابهتان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

الحل

1. لمّا كان الشعاع e_j من الأساس القانوني في E هو $e_j = {}^t[\delta_{1j},\dots,\delta_{nj}]$ استنتجنا أنّ $p_\sigma(e_j)$ هو الشعاع $e_{\sigma^{-1}(j)}$، وعليه فإنّ مصفوفة p_σ بالنسبة إلى الأساس القانوني هي $P_\sigma = (a_{ij}^\sigma)$ حيث

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij}^\sigma = \delta_{\sigma(i)j}$$

2. لتكن $M = (m_{ij})_{ij}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$[P_\sigma M]_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma(i)k} m_{kj} = m_{\sigma(i)j}$$
$$[MP_\sigma]_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}\delta_{\sigma(k)j} = m_{i\sigma^{-1}(j)}$$

وبوجه خاص، إذا كان σ و σ' تبديلين من $\mathcal{S}_n$ كان $P_{\sigma'} = (\delta_{\sigma'(i)j})$ ومن ثَمّ

$$[P_\sigma P_{\sigma'}]_{ij} = \delta_{\sigma'\circ\sigma(i)j} = [P_{\sigma'\circ\sigma}]_{ij}$$

إذن نستنتج بوجه خاص أنّ $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$. ومنه، نجد مباشرة أنّ

$$[P_\sigma M P_\sigma^{-1}]_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

3. فإذا عرّفنا التبديل $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$، والمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ كان لدينا

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإنّ المصفوفتين A و B متشابهتان. ■

التمرين 9. ليكن الشعاعان $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ و $Y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$ من $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$، نفترض أنّ

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \text{ و } \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1 \text{ و } \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \theta$$

ونعرّف المصفوفة $M = aX \cdot {}^tX + bY \cdot {}^tY$ حيث (a, b) من $\mathbb{R}^2$. أثبت أنه يوجد عددان λ و μ يُحقّقّان $M^3 + \lambda M^2 + \mu M = 0$.

ادرس حالة المصفوفة $M = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يلي :

$$m_{ij} = \begin{cases} \alpha & : \quad i + j = 0 \bmod 2 \\ \beta & : \quad i + j = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

الحل

1. لنعرّف $A = X \cdot {}^tX$ و $B = Y \cdot {}^tY$. ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} A^2 &= X \cdot \underbrace{{}^tX \cdot X}_{1} \cdot {}^tX &&= X \cdot {}^tX = A, \\ B^2 &= Y \cdot \underbrace{{}^tY \cdot Y}_{1} \cdot {}^tY &&= Y \cdot {}^tY = B \\ AB &= X \cdot \underbrace{{}^tX \cdot Y}_{\theta} \cdot {}^tY &&= \theta X \cdot {}^tY, \\ BA &= Y \cdot \underbrace{{}^tY \cdot X}_{\theta} \cdot {}^tX &&= \theta Y \cdot {}^tX. \end{aligned}$$

وأخيراً نستنتج مما سبق أنّ

$$ABA = \theta^2 A \text{ و } BAB = \theta^2 B .$$

ولمّا كان $M = aA + bB$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} M^2 &= (aA + bB)(aA + bB) = a^2A + b^2B + ab(AB + BA) \\ M^3 &= (a^2A + b^2B + ab(AB + BA))(aA + bB) \\ &= a^3A + b^3B + (a^2b + ab^2)(AB + BA) + a^2bABA + ab^2BAB \\ &= (a^3 + a^2b\theta^2)A + (b^3 + ab^2\theta^2)B + ab(a + b)(AB + BA) \end{aligned}$$

وعليه نرى أنّ

$$M^3 - (a + b)M^2 = ab(\theta^2 - 1)(aA + bB) = ab(\theta^2 - 1)M$$

وأخيراً

$$M^3-(a+b)M^2+ab(1-\theta^2)M=0$$

2. لندرس حالة المصفوفة $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ المعرّفة كما يأتي :

$$m_{ij}=\begin{cases}\alpha & : \quad i+j=0 \bmod 2\\ \beta & : \quad i+j=1 \bmod 2\end{cases}$$

نلاحظ مباشرة أنّ

$$m_{ij}=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}(-1)^{i+j}$$

فإذا عرّفنا الشعاعين X و Y كما يلي :

$$Y=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}-1\\1\\\vdots\\(-1)^n\end{bmatrix} \text{ و } X=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

ووضعنا $a=n\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ و $b=n\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ كان

$$M=aX\cdot {}^tX+bY\cdot {}^tY$$

ونلاحظ مباشرة أنّ

$${}^tX\cdot X=1,\quad {}^tY\cdot Y=1,\quad {}^tY\cdot X=\frac{(-1)^n-1}{2n}$$

إذن في هذه الحالة لدينا

$$M^3-n\alpha M^2+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\left(n^2-\frac{1-(-1)^n}{2}\right)M=0$$

وبصيغة مُكافئة

$$M^3-n\alpha M^2+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor M=0$$

وهي الصيغة المرجوّة. ∎

التمرين 10. أيّاً كان a من $\mathbb{R}$، نعرّف المصفوفة $M_a = (m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ كما يلي :

$$m_{ij} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} \cdot a^{j-i} & : \quad j \geq i \\ 0 & : \quad j < i \end{cases}$$

1. أثبت أن المجموعة $G = \left\{ M_a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}$ زمرة جزئية من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُشاكِل تقابلياً $(\mathbb{R},+)$.
2. لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنفترض أنّ $a_{ij} = 0$ عندما $i \geq j$، وأنّ $b_{ij} = 0$ حين يكون $i \geq j - s$ حيث $s \in \{0,\ldots,n-1\}$. وأخيراً لتكن المصفوفة $C = AB = (c_{ij})$. أثبت أن $c_{ij} = 0$، عندما يتحقَّق الشرط $i \geq j - s - 1$. واستنتج أن $(M_a - I_n)^n = 0$.
3. أثبت أنه مهما يكن كثير الحدود P من $\mathbb{R}[X]$، يكن

$$\deg P < n \Rightarrow P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4. لتكن (p,n) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $n \geq p > 0$. نرمز بالرمز S_n^p إلى عدد التطبيقات الغامرة من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. أثبت أن $p^n = \sum_{k=1}^{n} C_p^k S_n^k$. **مساعدة** : يمكن حساب عدد التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$ بطريقتين.
5. استنتج قيمة S_n^p. واحسب بوجه خاص S_n^1 و S_n^2.

الحل

1. بملاحظة أنّ

$$\left(X + a\right)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^{i} a^{j-1-i} X^i = \sum_{i=1}^{j} C_{j-1}^{i-1} a^{j-i} X^{i-1}$$

نستنتج أنّ M_a هي مصفوفة التطبيق الخطّي

$$\tau_a : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X], P \mapsto P(X + a)$$

بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E} = (X^{k-1})_{k\in\mathbb{N}_n}$ للفضاء $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. أي

$$M_a = \operatorname{mat}\left(\tau_a, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right)$$

وهذا يفيدنا في إثبات أنّ $M_0 = I$ و $M_a^{-1} = M_{-a}$ و $M_{a+b} = M_a M_b$، وعليه تكون المجموعة G زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$، تُشاكل تقابليّاً $(\mathbb{R},+)$ وفق التشاكل الزمري $a \mapsto M_a$.

2. لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنفترض أنّ $a_{ij} = 0$ عندما $i \geq j$، وأنّ $b_{ij} = 0$ حين يكون $i \geq j - s$ حيث $s \in \{0,\ldots,n-1\}$. وأخيراً لتكن المصفوفة $C = AB = (c_{ij})$، وليكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ يُحقّق $i \geq j - s - 1$. عندئذ

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \underbrace{\sum_{(i \geq k) \vee (k \geq j-s)} a_{ik} b_{kj}}_{0} + \sum_{k \in]i, j-s[} a_{ik} b_{kj}$$

فإذا كان $i \geq j - s - 1$ كان $]i, j-s[= \varnothing$ ومن ثَمّ $c_{ij} = 0$.

3. نستنتج مما سبق، وبناءً على كون $i \geq j$ يقتضي $[M_a - I]_{ij} = 0$، أنّ

$$i \geq j - s \Rightarrow [(M_a - I)^{s+1}]_{ij} = 0$$

وذلك بالتدريج على العدد s من $\{0,\ldots,n-1\}$. وفي حالة $s = n - 1$ نجد

$$i > j - n \Rightarrow [(M_a - I)^n]_{ij} = 0$$

أي $(M_a - I)^n = 0$ لأنّ الشرط $i > j - n$ محقَّق أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$. نستنتج إذن أنّ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} (M_a)^k = 0$$

وهذا يُكافئ
$$I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k M_{ka} = 0$$

وهذه المساواة المصفوفيّة تُكافئ المساواة الآتية

$$I_E = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} \tau_{ka}$$

بين تطبيقات خطيّة على $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. وهذه المساواة تُكافئ

$$\deg P < n \Rightarrow P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4. لتكن (p,n) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $n \geq p > 0$. نرمز بالرمز S_n^p إلى عدد التطبيقات الغامرة من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. لتكن $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p)$ مجموعة التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$. وفي حالة مجموعة جزئيّة غير خالية B من $\mathbb{N}_p$ ، نرمز بالرمز $\mathbb{S}_n^B$ إلى مجموعة التطبيقات من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_p$ التي صورتها B . عندئذ من الواضح أنّ $(\mathbb{S}_n^B)_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p}$ تجزئة للمجموعة $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p)$. إذن

$$\operatorname{card} \mathcal{F}(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p) = \sum_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p} \operatorname{card} \mathbb{S}_n^B$$

ومن الواضح أيضاً أنّ $\operatorname{card} \mathbb{S}_n^B = S_n^{\operatorname{card} B}$. إذن

$$\operatorname{card} \mathcal{F}(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_p) = \sum_{\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}_p} S_n^{\operatorname{card} B} = \sum_{1 \leq k \leq p} C_p^k S_n^k$$

أو

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \, S_n^k$$

5. يمكننا كتابة النتيجة السابقة عندما تتحول قيمة p بالشكل

$$\begin{aligned}
0^n &= C_0^0 S_n^0 \\
1^n &= C_1^0 S_n^0 + C_1^1 S_n^1 \\
2^n &= C_2^0 S_n^0 + C_2^1 S_n^1 + C_2^2 S_n^2 \\
&\vdots \\
j^n &= C_j^0 S_n^0 + C_j^1 S_n^1 + C_j^2 S_n^2 + C_j^3 S_n^3 + \cdots + C_j^j S_n^j \\
&\vdots \\
p^n &= C_0^0 S_n^0 + C_p^1 S_n^1 + C_p^2 S_n^2 + C_p^3 S_n^3 + \cdots + C_p^j S_n^j + \cdots + C_p^p S_n^p
\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا الشعاعين S و V من $\mathcal{M}_{1\times(p+1)}(\mathbb{R})$ كما يأتي

$$V = \left[0^n, 1^n, 2^n, \ldots, p^n\right] \text{ و } S = \left[0, S_n^1, S_n^2, \ldots, S_n^p\right]$$

أمكن كتابة الجملة السابقة بالصيغة المصفوفاتية $V = SM_1$ حيث M_1 هي المصفوفة التي درسناها سابقاً والتي توافق حالة $a = 1$.

$$M_1 = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_p^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_p^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & & C_p^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_p^p \end{bmatrix}$$

ولمّا كان $M_1^{-1} = M_{-1}$ أي

$$(M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} C_0^0 & (-1)C_1^0 & (-1)^2 C_2^0 & \cdots & (-1)^p C_p^0 \\ 0 & C_1^1 & (-1)C_2^1 & \cdots & (-1)^{p-1} C_p^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & & (-1)^{p-2} C_p^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_p^p \end{bmatrix}$$

استنتجنا من $S = V(M_1)^{-1}$ أنّ

$$\begin{aligned} S_n^p &= 1^n(-1)^{p-1} C_p^1 + 2^n (-1)^{p-2} C_p^2 + \cdots + p^n (-1)^{p-p} C_p^p \\ &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n \end{aligned}$$

وبوجه خاص

$$\begin{aligned} S_n^1 &= 1 \\ S_n^2 &= 2^n - 2 \\ S_n^3 &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \end{aligned}$$

ويمكننا أن نثبت أيضاً بالتدريج أنّ

$$S_{n+1}^p = p(S_n^p + S_n^{p-1})$$

مما يتيح لنا أن نبرهن أنّ :

$$S_{n+1}^n = n! \cdot C_{n+1}^2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 11. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها على n.

وليكن d و δ التطبيقين الخطيّين من $\mathcal{L}(E)$ المعرّفين كما يلي:

$$d : E \to E : P(X) \mapsto P'(X)$$

$$\delta : E \to E : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

1. ليكن $\mathcal{B}=(e_k)_{0\le k\le n}$ أساس E المعرّف كما يلي:

$$e_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}_n, \quad e_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

① اكتب $\Delta = \operatorname{mat}(\delta, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ مصفوفة التطبيق δ بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{B}$.

② احسب المصفوفات $(\Delta^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

③ اكتب $D = \operatorname{mat}(d, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ مصفوفة التطبيق d بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{B}$.

④ استنتج عبارة d بدلالة $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

2. بالاستفادة من منشور تايلور. استنتج أيضاً عبارة δ بدلالة $(d^k)_{k\in\mathbb{N}_n}$.

الحل

①.1 نلاحظ أنّ $\delta(e_0)=0$ و $\delta(e_1)=e_0$ وأنّه في حالة $k\ge 1$ لدينا

$$\begin{aligned}\delta(e_{k+1}) &= \frac{(X+1)X(X-1)\cdots(X-k+1)}{(k+1)!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-k)}{(k+1)!}\\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{(k+1)!}\big((X+1)-(X-k)\big) = e_k\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = (\delta_{i+1,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

حيث $\delta_{\alpha\beta}$ هو رمز كرونيكر.

②.1 لنثبت بالتدريج على العدد k من $\mathbb{N}_n$ أنّ $\Delta^k = (\delta_{i+k,j})$ ، فإذا كان هذا صحيحاً في حالة k من $\mathbb{N}_{n-1}$ كان

$$[\Delta^{k+1}]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n+1}[\Delta^k]_{i\ell}[\Delta]_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n+1}\delta_{i+k,\ell}\delta_{\ell+1,j} = \delta_{i+k+1,j}$$

أي

$$\Delta^k = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad\quad k \quad\quad} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

③.1 نلاحظ أنّ $d(e_0) = 0$ و $d(e_1) = e_0$ ونتيقّن بحساب مباشر أنّ

$$\begin{aligned} d(e_2) &= e_2' = e_1 - \frac{1}{2}e_0 \\ d(e_3) &= e_3' = e_2 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{3}e_0 \end{aligned}$$

لنثبت إذن بوجه عام أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad d(e_k) = e_k' = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}e_{k-j}$$

لنفترض صحّة هذه النتيجة في حالة k ، فإذا استفدنا من المساواة $e_{k+1} = \frac{1}{k+1}(X-k)e_k$ وجدنا

$$d(e_{k+1}) = \frac{1}{k+1}e_k + \frac{X-k}{k+1}d(e_k)$$

وإذا استفدنا من فرْض التدريج كتبنا

$$d(e_{k+1}) = \frac{1}{k+1}e_k + \frac{X-k}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}e_{k-j}$$

ولكن

$$\begin{aligned}(X-k)e_{k-j} &= (X-k+j)e_{k-j} - je_{k-j}\\ &= (k+1-j)e_{k+1-j} - je_{k-j}\\ &= (k+1)e_{k+1-j} - j(e_{k+1-j}+e_{k-j})\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}d(e_{k+1}) &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(e_{k+1-j} - \frac{j}{k+1}\left(e_{k+1-j}+e_{k-j}\right)\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(e_{k+1-j}+e_{k-j}\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}\left((-1)^{j-1}e_{k+1-j} - (-1)^{j}e_{k-j}\right)\\ &= \frac{1}{k+1}e_k + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} - \frac{1}{k+1}\left(e_k - (-1)^k e_0\right)\end{aligned}$$

وعليه نجد

$$d(e_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j} + \frac{(-1)^k}{k+1}e_0 = \sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}e_{k+1-j}$$

وهي العلاقة المطلوبة. وعليه تأخذ المصفوفة $D = \mathrm{mat}\left(d,\mathcal{B},\mathcal{B}\right)$ الشكل التالي :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{n}\\ \vdots & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3}\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{-1}{2}\\ \vdots & & & & & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

وهذا يثبتُ أنّ ④.1

$$D = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Delta^k$$

وينتج من ذلك أنّ

$$d = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\delta^k$$

2. بالاستفادة من منشور تايلور. يمكننا أن نكتبَ

$$P(X+1)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}P^{(k)}(X)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}d^k\left(P(X)\right)$$

ومنه

$$\delta\left(P(X)\right)=P(X+1)-P(X)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}d^k\left(P(X)\right)$$

أو

$$\delta=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}d^k$$

ملاحظة. تعبِّر النتيجتان السابقتان عن المساواتين :

$I+\delta=\exp(d)$ و $d=\operatorname{Log}(I+\delta)$!.

التمرين 12. ليكن u من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ، ولتكن M مصفوفة u بالنسبة إلى الأساس القانوني $\mathcal{E}$، نفترض أيضاً أنّ مصفوفة u بالنسبة إلى أساس آخر $\mathcal{F}$ هي M' فإذا كان

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&1&?\\2&-1&?\\1&0&?\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M'=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ما هي مصفوفة الانتقال بين الأساسين ؟

الحل

بملاحظة أنّ

$$M'-I=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نرى أنّ $(M'-I)^3=0$ وينتج من ذلك أنّ $(u-I)^3=0$. وهذا بدوره يقتضي أنّ $(M-I)^3=0$. فإذا افترضنا أنّ

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&1&a\\2&-1&b\\1&0&c\end{bmatrix}$$

وجدنا

$$\begin{aligned}(M-I)^2 &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 1 & a\\ 2 & -3 & b\\ 1 & 0 & c-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & a\\ 2 & -3 & b\\ 1 & 0 & c-2\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}11+a & 0 & a+b+ac\\ b & 11 & 2a-5b+bc\\ c+1 & 1 & a+\left(c-2\right)^2\end{bmatrix}\\ (M-I)^3 &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & 1 & a\\ 2 & -3 & b\\ 1 & 0 & c-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11+a & 0 & a+b+ac\\ b & 11 & 2a-5b+bc\\ c+1 & 1 & a+(c-2)^2\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}33+4a+b+ac & a+11 & *\\ 22+2a-2b+bc & b-33 & *\\ a+c^2-c+9 & c-2 & *\end{bmatrix}\end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ $(M-I)^3 = 0$ يقتضي أن يكون العمود الثاني في هذه المصفوفة على الأقل معدوماً، أي أن يكون

$$a=-11 \quad \text{و} \quad b=33 \quad \text{و} \quad c=2$$

وفي هذه الحالة نجد بالتعويض أنّ $(M-I)^3 = 0$ وأنّ

$$(M-I)^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 33 & 11 & -121\\ 3 & 1 & -11\end{bmatrix}$$

لنختر إذن أيّ شعاع X يُحقّق $(M-I)^2X \neq 0$، مثلاً الشعاع $f_3 = {}^t[0,1,0]$. ولنضع بالتعريف

$$f_2 = (M-I)f_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad f_1 = (M-I)f_2 = (M-I)^2 f_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\ 11\\ 1\end{bmatrix}$$

نستنتج من $(M-I)f_1 = 0$ و $f_1 = (M-I)f_2$ و $f_2 = (M-I)f_3$ أنّ

$$Mf_1 = f_1 \quad \text{و} \quad Mf_2 = f_2 + f_1 \quad \text{و} \quad Mf_3 = f_3 + f_2$$

وهذا يثبت أنّه إذا عرّفنا $\mathcal{F}=(f_1,f_2,f_3)$ كان $\operatorname{mat}(u,\mathcal{F},\mathcal{F})=M'$. أمّا مصفوفة الانتقال فهي

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}=\operatorname{mat}\left(I_{\mathbb{R}^3},\mathcal{F},\mathcal{E}\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 11 & -6 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وهي تحقّق $M=P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}M'(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1}$.

التمرين 13. نتأمّل في هذا التمرين الأساس القانوني $\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ لفضاء المصفوفات المربّعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، حيث $\mathbb{K}$ حقلٌ جزئي من $\mathbb{C}$.

1. لتكن $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ احسب كلّاً من ME_{ij} و $E_{ij}M$.
2. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ ، أو مركز $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. عيّن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
3. أثبت أنّه مهما يكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ ، يكن $F_{ij}\overset{\text{def}}{=}I+E_{ij}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. واستنتج أنّ $\operatorname{vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. عيّن $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ ، أي مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة.
5. ليكن f تطبيقاً خطيّاً على فضاء شعاعي منتهي البُعد على $\mathbb{K}$. نفترض أنّ للتطبيق f المصفوفة نفسها بالنسبة إلى أيِّ أساس. عيّن f .
6. لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة المصفوفات المثلثيّة العليا التي تساوي جميع عناصرها القطرية الواحد أي:

$$\mathcal{U}=\left\{M=\left(a_{ij}\right):\left(i>j\Rightarrow a_{ij}=0\right)\wedge\left(a_{ii}=1\right)\right\}$$

أثبت أنّ $\mathcal{U}$ هي زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$، ثُمّ عيّن $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ ، أي مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع عناصر $\mathcal{U}$، وبيّن أنّ $\mathcal{Z}(\mathcal{U})\cap\mathcal{U}$ زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات تشاكل تقابليّاً الزمرة $(\mathbb{K},+)$.

الحل

1. لتكن $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$[ME_{ij}]_{k\ell}=\sum_{s=1}^{n}m_{ks}[E_{ij}]_{s\ell}=\sum_{s=1}^{n}m_{ks}\delta_{is}\delta_{j\ell}=m_{ki}\delta_{j\ell}$$
$$[E_{ij}M]_{k\ell}=\sum_{s=1}^{n}[E_{ij}]_{ks}m_{s\ell}=\sum_{s=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{js}m_{s\ell}=m_{j\ell}\delta_{ik}$$

ومنه

$$ME_{ij}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array}\\ \begin{bmatrix}0\cdots 0 & m_{1i} & 0\cdots 0\\ \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots\\ 0\cdots 0 & m_{ni} & 0\cdots 0\end{bmatrix}\end{array}\qquad E_{ij}M=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\\ m_{j1} & \cdots & m_{jn}\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

2. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ ، مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ولتكن المصفوفة $M=(m_{ij})$ من $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. عندئذ يكون $\forall i\in\mathbb{N}_n, ME_{i1}=E_{i1}M$ ، وبناءً على نتيجة السؤال السابق، فإنّ هذا يُكافئ

$$\forall i\in\mathbb{N}_n,\forall(k,\ell)\in\mathbb{N}_n^2,\quad m_{ki}\delta_{1\ell}=[ME_{i1}]_{k\ell}=[E_{i1}M]_{k\ell}=m_{1\ell}\delta_{ik}$$

وبوجه خاص، في حالة $\ell=1$ ، يكون

$$\forall i\in\mathbb{N}_n,\forall k\in\mathbb{N}_n,\quad m_{ki}=m_{11}\delta_{ik}$$

ومن ثَمَّ $M=m_{11}I$. وبالطبع كلُّ مصفوفة من هذا النمط تتبادل مع جميع عناصر $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، إذن

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))=\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{K}\}$$

في الحقيقة، لقد أثبتنا أنّ :

$$.\{M:\forall i\in\mathbb{N}_n,E_{i1}M=ME_{i1}\}=\{\lambda I:\lambda\in\mathbb{K}\}$$

3. ليكن (i,j) من $\mathbb{N}_n^2$ ، ولنعرّف $F_{ij}=I+E_{ij}$. عندئذ نتحقَّق مباشرة أنّه في حالة $i\neq j$ لدينا

$$F_{ij}(I-E_{ij})=I$$

وهذا يثبتُ أنّ $F_{ij} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ وأنّ $F_{ij}^{-1} = I - E_{ij}$ في حالة $i \neq j$. ونتحقَّق من جهة أخرى أنّ

$$F_{ii}\left(I - \tfrac{1}{2}E_{ii}\right) = I$$

وهذا يثبتُ أنّ $F_{ii} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ وأنّ $F_{ii}^{-1} = I - \frac{1}{2}E_{ii}$. إذن في جميع الأحوال لدينا

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad F_{ij} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

ولمّا كان $I \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ استنتجنا أنّ

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad E_{ij} = F_{ij} - I \in \operatorname{vect}\big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\big)$$

ولكن $\operatorname{vect}\Big((E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\Big) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، إذن $\operatorname{vect}\big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\big) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. لتكن $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ مجموعة المصفوفات التي تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة. لمّا كانت هذه المجموعة فضاءً شعاعيّاً جزئيّاً استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) &= \mathcal{Z}\big(\operatorname{vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))\big)\\ &= \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \big\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{K}\big\}\end{aligned}$$

5. ليكن f تطبيقاً خطيّاً على فضاء شعاعي منتهي البُعد على $\mathbb{K}$. ولنفترض أنّ للتطبيق f المصفوفة نفسها C بالنسبة إلى أيِّ أساس. لنتأمّل إذن أساساً $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ ، ومصفوفة $P = (p_{ij})$ من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. نعرّف عندئذ الأساس $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ بالعلاقات $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}e_i$. فتكون $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ ويكون $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}) = P^{-1}\operatorname{mat}(u,\mathcal{F})P$ ، ولمّا كان $\operatorname{mat}(u,\mathcal{E}) = \operatorname{mat}(u,\mathcal{F}) = C$ استنتجنا أنّ $PC = CP$.

إذن لقد أثبتنا أنّ المصفوفة C تتبادل مع جميع المصفوفات القَلوبة P ، أي إنّها تنتمي إلى $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ فهي إذن من الشكل λI حيث $\lambda \in \mathbb{K}$. وهذا يُثبتُ أنّ $f \in \mathbb{K}I_E$ ، وبالعكس، لا تتغيّر مصفوفة أيٍّ من التطبيقات الخطيّة في $\mathbb{K}I_E$ بتغيير الأساس.

6. لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة المصفوفات المثلثيّة العليا التي تساوي جميع عناصرها القطرية الواحد أي :

$$\mathcal{U} = \big\{M = (a_{ij}) : (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0) \wedge (a_{ii} = 1)\big\}$$

- من الواضح أنّ $I \in \mathcal{U}$ وأنّ $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

- لتكن M من $\mathcal{U}$ ولنعرّف $N = M - I$. عندئذ تُحقِّق المصفوفة N الخاصّة
$$i \leq j \Rightarrow [N]_{ij} = 0$$
وهذا يُثبتُ أنّ $N^n = 0$ إذ نبرهن بالتدريج على k من $\mathbb{N}_n$ أنّ
$$i \leq j + k - 1 \Rightarrow [N^k]_{ij} = 0$$
وعليه تكون $M = I + N$ قَلوبة ويكون
$$M^{-1} = I - N + N^2 + \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$$
إذن تنتمي المصفوفة M^{-1} أيضاً إلى $\mathcal{U}$. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathcal{U}$ زمرة جزئيّة من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

- في الحقيقة،
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mathcal{U}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall U \in \mathcal{U}, MU = UM\} = \mathcal{Z}(-I + \mathcal{U})\\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, (i < j \Rightarrow ME_{ij} = E_{ij}M)\}\\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, (i < j \Rightarrow MF_{ij} = F_{ij}M)\}\end{aligned}$$

- ليكن $M = (m_{ij})$ عنصراً من $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$. عندئذ نستنتج من المساواة
$$\forall j \in \{2,\ldots,n\}, \quad ME_{1j} = E_{1j}M$$
أنّ
$$\forall j \in \{2,\ldots,n\}, \forall \ell \in \mathbb{N}_n, \quad m_{11}\delta_{j\ell} = [ME_{1j}]_{1\ell} = [E_{1j}M]_{1\ell} = m_{j\ell}$$
ومنه $m_{ij} = 0$ في حالة $(1 < i) \wedge (i \neq j)$ و $m_{ii} = m_{11}$ في حالة $i \in \mathbb{N}_n$.
وكذلك، نستنتج من المساواة $ME_{in} = E_{in}M$ ، في حالة i من $\mathbb{N}_{n-1}$ ، أنّ
$$\forall i \in \{2,\ldots,n-1\}, \quad m_{1i} = [ME_{in}]_{1n} = [E_{in}M]_{1n} = m_{nn}\delta_{i1} = 0$$
ومنه $m_{ij} = 0$ في حالة $((i,j) \neq (1,n)) \wedge (i \neq j)$ و $m_{ii} = m_{11}$ في حالة i من $\mathbb{N}_n$. إذن $M = m_{11}I + m_{1,n}E_{1,n}$. وبالعكس، تتبادل كلُّ مصفوفة من الشكل $\lambda I + \mu E_{1,n}$ مع جميع مصفوفات $\mathcal{U}$.
إذن

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U})=\left\{\lambda I+\mu E_{1,n}:(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\right\}$$

وبوجه خاص نرى أنّ

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U})\cap\mathcal{U}=\left\{I+\mu E_{1,n}:\mu\in\mathbb{K}\right\}$$

والتطبيق $\mu\mapsto I+\mu E_{1,n}$ تشاكل زمريّ تقابلي بين $(\mathbb{K},+)$ و $(\mathcal{Z}(\mathcal{U})\cap\mathcal{U},\times)$. ■

التمرين 14. ليكن a عدداً حقيقيّاً غير صفري، ولتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
ادرس المعادلة $aX+(\operatorname{tr}X)A=B$ بالنسبة إلى المجهول X من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

الحل

في الحقيقة، إذا كان X حلاً للمعادلة المدروسة كان $(\operatorname{tr}X)(a+\operatorname{tr}A)=\operatorname{tr}B$ وهنا نناقش الحالات الآتية.

① حالة $a+\operatorname{tr}A=0$.

❶ فإمّا أن يكون $\operatorname{tr}B\neq 0$، وعندئذ لا توجد حلول للمسألة.

❷ أو أن يكون $\operatorname{tr}B=0$، وفي هذه الحالة تكون جميع مصفوفات المجموعة $\left\{\frac{1}{a}(B-\lambda A):\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ حلولاً للمعادلة المدروسة.

② حالة $a+\operatorname{tr}A\neq 0$. وهنا يكون للمسألة المدروسة حلٌّ وحيد هو

$$X=\frac{1}{a}\left(B-\frac{\operatorname{tr}B}{a+\operatorname{tr}A}A\right)$$ ■

التمرين 15. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ولنعرّف

$$\mathcal{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}):AM=MA\}$$

1. أثبت أنّ $\mathcal{C}_A$ جبر جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. نفترض أنّ $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ وأنّ الأعداد $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ مختلفة مثنى مثنى.

① عيِّن $\mathcal{C}_A$.

② أثبت أنّ صورة التطبيق الخطّي

$$\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R}):M\mapsto MA-AM$$

مكوّنة من المصفوفات التي ثوابت أقطارها الرئيسيّة صفرية.

الحل

1. من الواضح أنّ $\mathcal{C}_A$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. وإذا كانت M و N مصفوفتين من $\mathcal{C}_A$ كان

$$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$$

وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{C}_A$ مجموعة مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، ونرى وضوحاً أنّ $I \in \mathcal{C}_A$. وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{C}_A$ جبرٌ جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

①.2 لتكن $M = (m_{ij})$ مصفوفة من $\mathcal{C}_A$. عندئذ

$$[MA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\lambda_j\delta_{kj} = \lambda_j m_{ij}$$
$$[AM]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{ik}m_{kj} = \lambda_i m_{ij}$$

ونستنتج من كون $AM = MA$ أنّ

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad (\lambda_j - \lambda_i)m_{ij} = 0$$

ولأنّ الأعداد $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ مختلفة مثنى مثنى، استنتجنا

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i \ne j \Rightarrow m_{ij} = 0$$

أي إنّ M تنتمي إلى مجموعة المصفوفات القطريّة $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. وبالعكس، نرى من الواضح أنّ كلّ مصفوفة قطريّة من $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ تتبادل مع المصفوفة A . وعليه فإنّ

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{vect}((E_{ii})_{i\in\mathbb{N}_n})$$

إذ رمزنا بالرمز $(E_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ إلى عناصر الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

②.2 في الحقيقة، إنّ $\ker\varphi = \mathcal{C}_A$. ولأنّ $\dim\mathcal{C}_A = n$ استنتجنا أنّ $\operatorname{rg}\varphi = n^2 - n$. ولكن من الواضح بالحساب المباشر أنّ

$$\operatorname{Im}\varphi \subset \left\{M = (m_{ij}) : \forall i \in \mathbb{N}_n, m_{ii} = 0\right\} = \operatorname{vect}((E_{ij})_{1\le i\ne j\le n})$$

ولمّا كان

$$\dim \operatorname{vect}((E_{ij})_{1\le i\ne j\le n}) = n^2 - n$$

استنتجنا أن الاحتواء السابق مساواة، أي إنّ

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{M = (m_{ij}) : \forall i \in \mathbb{N}_n, m_{ii} = 0\right\}$$ ■

التمرين 16. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، تُحقّق $\operatorname{tr}(M)=0$، وغير معدومة.

1. أثبت أنّه توجد مصفوفة عمود X_1 من $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ تجعل الجملة (X_1, MX_1) حرّة.
2. استنتج أنّ M تشابه مصفوفة N من الشكل $N=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & M_1 \\ \times & \end{array}\right]$، و M_1 مصفوفة من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ تُحقّق $\operatorname{tr}(M_1)=0$.
3. استنتج أنّ M تشابه مصفوفة قطرها الرئيسي صفري.
4. استنتج أنّه توجد مصفوفتان A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، تحقّقان $M=AB-BA$.

الحل

1. لنفترض أنّه لا يوجد شعاع عمود X يَجعل الجملة (X, MX) جملة حرّة. فإذا كان X شعاعاً غير معدوم نتج من الارتباط الخطّي للجملة (X, MX) أنّه يوجد عددان α و β يُحقّقان $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ و $\alpha MX+\beta X=0$. ولمّا كان $\alpha=0$ يقتضي $\beta=0$ استنتجنا أنّ $\alpha\neq 0$. إذن

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \exists\lambda_X\in\mathbb{R},\quad MX=\lambda_X X$$

فإذا كان $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ وعرّفنا $\lambda_i=\lambda_{e_i}$ استنتجنا من المساواة السابقة أنّ M مصفوفة قطريّة $M=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. ولمّا كان

$$\forall i\in\mathbb{N}_{n-1},\quad M(e_n+e_i)=Me_n+Me_i$$

استنتجنا أنّ

$$\forall i\in\mathbb{N}_{n-1},\quad \lambda_{e_n+e_i}(e_n+e_i)=\lambda_n e_n+\lambda_i e_i$$

ومن ثَمّ $\forall i\in\mathbb{N}_{n-1}, \lambda_i=\lambda_{e_n+e_1}=\lambda_n$، وعليه $M=\lambda_n I$. وأخيراً، لمّا كان $0=\operatorname{tr} M=n\lambda_n$، استنتجنا أنّ $\lambda_n=0$ ومن ثَمّ $M=0$ وهذا يناقض الفرْض. إذن لا بدّ أن يوجد شعاع X_1 في $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ يجعل الجملة (X_1, MX_1) جملة حرّة.

2. نضع $X_2=MX_1$، ونتمّم الجملة (X_1,X_2) إلى أساس $\mathcal{F}=(X_1,\ldots,X_n)$ للفضاء $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ ثُمّ لنتأمّل التطبيق

$$U_M:\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})\rightarrow\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), Y\mapsto MY$$

المقرون بالمصفوفة M.

عندئذ نعلم أنّ $M = \mathrm{mat}\left(U_M, \mathcal{E}, \mathcal{E}\right)$ وأنّ

$$N = \mathrm{mat}\left(U_M, \mathcal{F}, \mathcal{F}\right) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots \times \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & M_1 \end{array}\right]$$

ولمّا كانت المصفوفتان M و N هما مصفوفتا التطبيق U_M نفسه بالنسبة إلى أساسين مختلفين، استنتجنا من جهة أولى أنّهما متشابهتان، ومن جهة ثانية أنّ $\mathrm{tr}\, M_1 = \mathrm{tr}\, N = \mathrm{tr}\, M = 0$.

3. لنتأمّل الخاصّة $\mathbb{P}_n$ الآتية :

﴿ في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم تشابه مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي صفرية. ﴾

- الخاصّة $\mathbb{P}_1$ صحيحة على وجه التفاهة.
- لنتأمّل حالة $n = 2$، ولتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. فإمّا أن تكون هي نفسها معدومة وهي من ثَمّ تُحقّق الخاصّة المطلوبة، وإمّا أن يكون $M \neq 0$ وعندئذ يمكننا الاستفادة مما أثبتناه في 2. لنرى أنّ M تشابه مصفوفة من الشكل $N = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{bmatrix}$ حيث $d = \mathrm{tr}\, N = 0$، أي إنّ عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة N صفرية. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\mathbb{P}_2$ صحيحة.
- لنفترض إذن أنّ $n \geq 3$ وأنّ الخاصّة $\mathbb{P}_{n-1}$ صحيحة. ولتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. فإمّا أن تكون هي نفسها معدومة وهي من ثَمّ تُحقّق الخاصّة المطلوبة، أو أن يكون $M \neq 0$ وعندئذ يمكننا الاستفادة مما أثبتناه في 2. لنرى أنّه توجد مصفوفة قلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُحقّق $P^{-1}MP = N_1$ حيث

$$N_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots \times \\ \hline \begin{smallmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \end{smallmatrix} & M_1 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \mathrm{tr}\, M_1 = \mathrm{tr}\, N_1 = 0$$

واعتماداً على فرْض التدريج، توجد مصفوفة $\tilde{Q}$ من $\mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ تُحقّق $\tilde{Q}^{-1}M_1\tilde{Q} = M_2$ حيث M_2 مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي صفرية من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

فإذا عرفنا

$$Q=\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\cdots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}\\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{كان} \quad Q^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\cdots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}^{-1}\\ 0 & \end{array}\right]$$

ونتج من ذلك أنّ

$$Q^{-1}P^{-1}MPQ=Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\cdots\times\\ \hline \times & \\ \vdots & M_1\\ \times & \end{array}\right]Q=\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\ \cdots\ \times\\ \hline \times & \\ \vdots & \tilde{Q}^{-1}M_1\tilde{Q}\\ \times & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}0 & \times\cdots\times\\ \hline \times & \\ \vdots & M_2\\ \times & \end{array}\right]$$

ومن ثَمّ، تُشابه المصفوفة M مصفوفةً عناصر قطرها الرئيسية صفرية، وهذا يثبت صحة $\mathbb{P}_n$.

4. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ أثرها معدوم. عندئذ توجد مصفوفة قلوبة P من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ تُحقّق $P^{-1}MP=N$، و N مصفوفة عناصر قطرها معدومة. لتكن $\tilde{A}=\text{diag}(0,1,\ldots,n)$ مصفوفة قطريّة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ عناصر قطرها الرئيسي مختلفة مثنى مثنى. نعلم استناداً إلى نتيجة التمرين السابق أنّ مجموعة المصفوفات التي قطرها الرئيسي صفري هي صورة التطبيق $L\mapsto \tilde{A}L-L\tilde{A}$، إذن توجد مصفوفة $\tilde{B}$ تُحقّق $\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{B}\tilde{A}=N$ وعندئذ يكون

$$M=PNP^{-1}=AB-BA$$

حيث $A=P\tilde{A}P^{-1}$ و $B=P\tilde{B}P^{-1}$. ■

ملاحظة. لقد أثبتنا في هذا التمرين الخاصّتين المهمّتين التاليتين :

- في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تشابه كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم مصفوفةً عناصر قطرها الرئيسي صفرية.
- في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تُكتبُ كلُّ مصفوفة أثرُها معدوم بالشكل $AB-BA$.

التمرين 17. لتكن $J=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. عيّن المصفوفات X من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، التي تُحقّق المعادلة $X^2+X=J$.

الحل

■ لنفترض أنّه يوجد حلٌّ X للمعادلة المدروسة. فإذا استفدنا من نتيجة التمرين 1. وجدنا عددين α و β من $\mathbb{R}$ يُحقّقان $X^2 = \alpha X + \beta I_2$ ، وعليه يكون

$$(\alpha - 1)X - J + \beta I_2 = 0$$

ولمّا كانت الجملة (I_2, J) جملة حرّة استنتجنا أنّ $\alpha - 1 \neq 0$. إذن يوجد عددان λ و β في $\mathbb{R}$ يُحقّقان

$$X = \lambda I_2 + \mu J$$

■ ولكن $J^2 = 2J$ إذن

$$\begin{aligned} X^2 + X = J &\Leftrightarrow (\lambda^2 I_2 + (2\lambda\mu + 2\mu^2)J) + \lambda I_2 + \mu J = J \\ &\Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda)I_2 + \mu(2\lambda + 2\mu + 1)J = J \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda = 0 \\ \mu(2\lambda + 2\mu + 1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

فإذا لا حظنا أنّ

$$\begin{aligned} \mu(2\mu + 2\lambda + 1) = 1 &\Leftrightarrow \mu^2 + \mu(\lambda + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (\mu + \tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{4}(\lambda^2 + \lambda) \\ &\Leftrightarrow (\mu + \tfrac{\lambda}{2} - \tfrac{1}{2})(\mu + \tfrac{\lambda}{2} + 1) = \tfrac{1}{4}(\lambda^2 + \lambda) \end{aligned}$$

استنتجنا أنّ $X = \lambda I_2 + \mu J$ تُحقّق $X^2 + X = J$ إذا وفقط إذا كان

$$\lambda\big(\lambda + 1\big) = 0 \quad \text{و} \quad (\mu + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2})(\mu + \tfrac{1}{2}\lambda + 1) = 0$$

أي إذ وفقط إذا كان

$$(\lambda, \mu) \in \left\{(0, \tfrac{1}{2}), (0, -1), (-1, 1), (-1, -\tfrac{1}{2})\right\}$$

أو إذا وفقط إذا كان

$$X \in \left\{\tfrac{1}{2}J, -J, -I_2 + J, -I_2 - \tfrac{1}{2}J\right\}$$

■ وبالعكس، نتيقّن بالحساب المباشر، أنّ المصفوفات الأربع السابقة هي حلولٌ للمعادلة المدروسة. بذا يتمّ إنجاز الحل. ■