الثنويّة في الفضاءات الشعاعيّة

1. ثنوي فضاء شعاعي

1-1. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، نفترضه مختلفاً عن $\{0\}$. نسمّي كلَّ تطبيق خطي من E إلى $\mathbb{K}$ **شكلاً خطياً** على E. ونرمز بالرمز E^* إلى الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$؛ أي فضاء الأشكال الخطية على E. ونسمّي E^* **الفضاء الشعاعي الثنويّ** للفضاء E. وأخيراً أيّاً كان f من E^*، و x من E نرمز بالرمز $\langle f,x\rangle$ إلى المقدار $f(x)$.

2-1. تعريف.

① أيّاً كان x من E نعرّف

$$x^{\perp}=\left\{y\in E^*:\left\langle y,x\right\rangle=0\right\}$$

إنّ $x^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من E^* نسمّيه **الفضاء العمودي** على x في E^*.

② وبوجه عام أيّاً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية A من E، نعرّف:

$$A^{\perp}=\left\{y\in E^*:\forall a\in A,\quad \left\langle y,a\right\rangle=0\right\}=\bigcap_{a\in A}a^{\perp}$$

إنّ $A^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من E^* نسمّيه الفضاء العمودي على A في E^*.

③ بأسلوب مماثل، أيّاً كان y من E^*، نعرّف

$$y^{\circ}=\left\{x\in E:\left\langle y,x\right\rangle=0\right\}=\ker y$$

نسمّي y° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على y في E.

④ وكذلك، أيّاً كانت المجموعة الجزئيّة غير الخالية B من E^*، نعرّف

$$B^{\circ}=\left\{x\in E:\forall y\in B,\quad \left\langle y,x\right\rangle=0\right\}=\bigcap_{y\in B}\ker y$$

ونسمّي B° الفضاء الشعاعيّ الجزئي العمودي على B في E.

⑤ وأخيراً إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من E، و B مجموعة جزئية غير خالية من E^* فإننا نقول إنّ A و B متعامدتان إذا وفقط إذا كان $B \subset A^\perp$. وهذا يكافئ كوْن $A \subset B^\circ$ أو $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad \langle b, a \rangle = 0$.

3-1. ملاحظات

- من الواضح أنّ $E^\perp = \{0\}$.
- وكذلك يكون $(E^*)^\circ = \{0\}$، إلا أنّ إثبات هذه الخاصّة في الحالة التي يكون فيها $\dim E = +\infty$ يتطلب موضوعة الاختيار، وسنرى لاحقاً إثباتاً لهذه الخاصة في حالة $\dim E < +\infty$.

4-1. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ

1. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E، كان $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
2. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E، كان $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$ و $A \subset (A^\perp)^\circ$.
3. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين A و B من E^*، كان $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.
4. أيّاً كان الجزء غير الخالي A من E^*، كان $A^\circ = (\mathrm{vect}(A))^\circ$ و $A \subset (A^\circ)^\perp$.

الإثبات

إثبات هذه الخواص بسيط ومتروك تمريناً للقارئ. ❐

5-1. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E. هناك تكافؤ بين الخواص الآتية :

① تمام بُعد H يساوي 1؛ أي $\mathrm{codim}_E H = 1$.

② الفضاء الجزئي H هو نواة شكل خطي غير معدوم.

③ يوجد مستقيم شعاعي D (أي فضاء جزئي بعده 1) يُحقّق $H \oplus D = E$.

الإثبات

① ⇐ ② لمّا كان $\dim E/H = \dim \mathbb{K} = 1$ ، يوجد تشاكل خطي تقابلي :

$$\theta : E/H \to \mathbb{K}$$

ليكن $Q : E \to E/H$ الغمر القانوني. عندئذ يكون التطبيق $f = \theta \circ Q$ شكلاً خطياً يحقّق $H = \ker f$ ، وبالطبع $f \neq 0$ لأنّ $E \neq H$.

② ⇐ ③ لنفترض أنّ $H = \ker f$ ، و f شكل خطّي من $E^* \backslash \{0\}$. إنّ f غامرٌ لأنّه غير صفري، إذن يوجد عنصرٌ b في E يُحقّق $\langle f, b \rangle = 1$. لنضع $D = \mathbb{K}b$.

- إذا كان x عنصراً من $D \cap H$ كان $x = \lambda b$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ ، وكان $\langle f, x \rangle = 0$ ، ومن ثَمّ $0 = \lambda \langle f, b \rangle = \lambda$. ينتج من ذلك أنّ $x = 0$ ومنه $D \cap H = \{0\}$.
- من جهة أخرى، أيّاً كان x من E كان

$$x = \underbrace{\langle f, x \rangle \cdot b}_{\in D} + \underbrace{x - \langle f, x \rangle \cdot b}_{\in H}$$

إذن $E = H \oplus D$.

③ ⇐ ① ليكن P الإسقاط على D توازياً مع H . إنّ $H = \ker P$ و $D = \operatorname{Im} P$ ، ومن ثَمّ هناك تقابلٌ خطيّ بين $E/H = E/\ker P$ و $\operatorname{Im} P$. إذن

$$\operatorname{codim}_E H = \dim E/H = \dim D = 1$$

وبذا يكتمل الإثبات. ❐

1-6. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نسمّي **مستقيماً** في E كل فضاء شعاعي جزئي D بعده 1 في E . ونسمّي **مستوياً** في E كل فضاء شعاعي جزئي P بعده 2 في E . وأخيراً نُسميّ **مستوياً فوقياً** في E كل فضاءٍ شعاعيٍّ جزئيٍّ H تمام بعده في E يساوي 1.

1-7. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن H مستوياً فوقياً في E . عندئذ يكون $H^\perp$ مستقيماً شعاعياً في E^* .

الإثبات

لنفترض أنّ $H = \ker y$ حيث y عنصرٌ من $E^*\backslash\{0\}$. لأنّ الشكل الخطيّ y غامر، يوجد a في E يُحقّق $\langle y, a\rangle = 1$.

- من جهة أولى، من الواضح أنّ $y \in H^\perp$ ومن ثمّ $\mathbb{K}y \subset H^\perp$.
- ومن جهة ثانية، ليكن z عنصراً من $H^\perp$ ، عندئذ لمّا كان

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\langle y, x\rangle a}_{\in \mathbb{K}\cdot a} + \underbrace{x - \langle y, x\rangle a}_{\in H}$$

كان

$$\forall x \in E, \langle z, x\rangle = \langle y, x\rangle z(a)$$

أو $y \cdot \langle z, a\rangle = z$. إذن $z \in \mathbb{K}y$ ، وهذا ما يثبتُ صحّةَ المساواة $H^\perp = \mathbb{K} \cdot y$. ❐

1-8. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً، مختلفاً عن $\{0\}$، على حقل $\mathbb{K}$. وليكن y شكلاً خطيّاً من $E^*\backslash\{0\}$ وليكن $H = \ker y$. عندئذ نسمّي المعادلة $\langle y, x\rangle = 0$ معادلة المستوي الفوقيّ H . ذلك لأنّ $x \in H \Leftrightarrow \langle y, x\rangle = 0$.

2. منقول تطبيق خطّي

2-1. **تعريف**. ليكن E و F فضاءَيْن شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$ ، وليكن u تطبيقاً خطيّاً من E إلى F ؛ أي $u \in \mathcal{L}(E, F)$. نعرّف التطبيق الخطيّ ${}^t u$ من $\mathcal{L}(F^*, E^*)$ كما يلي:

$${}^t u : F^* \to E^*, y \mapsto {}^t u(y) = y \circ u$$

ونسمّي ${}^t u$ **منقول** التطبيق u . لاحظ أنّ :

$$\forall x \in E, \forall y \in F^*, \quad \langle {}^t u(y), x\rangle_{E^*,E} = \langle y, u(x)\rangle_{F^*,F}$$

2-2. **مبرهنة**. لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$.

1. إن التطبيق $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*), u \mapsto {}^t u$، تطبيق خطّيٌّ ومتباين.
2. أيّاً كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ و v من $\mathcal{L}(F,G)$، كان ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
3. ليكن I_E (على التوالي I_{E^*}) التطبيق المطابق على E (على E^*)، عندئذ ${}^t I_E = I_{E^*}$.
4. إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ تقابلاً كان ${}^t u$ تقابلاً أيضاً وكان $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.
5. إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ كان $\ker({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$. ومن ثَمّ إذا كان u غامراً كان ${}^t u$ متبايناً.

الإثبات

1. ليكن u و v من $\mathcal{L}(E,F)$ و λ من $\mathbb{K}$. عندئذ، أيّاً كان (x,y) من $E \times F^*$، كان

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi(u+\lambda v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} &= \left\langle {}^t(u+\lambda v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle y, (u+\lambda v)(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle y, u(x)+\lambda v(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle y, u(x) \right\rangle_{F^*,F} + \lambda \left\langle y, v(x) \right\rangle_{F^*,F} \\
&= \left\langle {}^t u(y), x \right\rangle_{E^*,E} + \lambda \left\langle {}^t v(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle {}^t u(y) + \lambda\, {}^t v(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle ({}^t u + \lambda\, {}^t v)(y), x \right\rangle_{E^*,E} \\
&= \left\langle (\Phi(u) + \lambda \Phi(v))(y), x \right\rangle_{E^*,E}
\end{aligned}$$

فالتطبيق Φ خطيّ.

ومن جهة أخرى، التطبيق Φ متباين لأنّه لدينا سلسلة الاقتضاءات الآتية:

$$\begin{aligned}
u \in \ker \Phi \quad &\Rightarrow \quad \forall (x,y) \in E \times F^*,\ \left\langle y, u(x) \right\rangle_{F^*,F} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \ u(x) \in (F^*)^{\circ} = \left\{ 0 \right\} \\
&\Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \ u(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad u = 0
\end{aligned}$$

وهذا ما يثبت الخاصّة 1.

2. ليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ و v من $\mathcal{L}(F,G)$. عندئذ، أيّاً كان (x,y) من $E\times G^*$ ، كان لدينا سلسلة المساويات الآتية:

$$\begin{aligned}\left\langle {}^t(v\circ u)(y),x\right\rangle_{E^*,E} &= \left\langle y, v\circ u(x)\right\rangle_{G^*,G}\\ &= \left\langle y, v(u(x))\right\rangle_{G^*,G}\\ &= \left\langle {}^tv(y), u(x)\right\rangle_{F^*,F}\\ &= \left\langle {}^tu({}^tv(y)), x\right\rangle_{E^*,E}\\ &= \left\langle {}^tu\circ {}^tv(y), x\right\rangle_{E^*,E}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ ${}^t(v\circ u) = {}^tu\circ {}^tv$.

3. واضح من التعريف.

4. تنتج هذه الخاصة من أخذ المنقول في طرفي المساواتين :

$$u^{-1}\circ u = I_E \quad \text{و} \quad u\circ u^{-1} = I_F$$

فنجد اعتماداً على ما سبق أنّ

$${}^t(u^{-1})\circ {}^tu = {}^tI_F = I_{F^*}$$

و

$${}^tu\circ {}^t(u^{-1}) = {}^tI_E = I_{E^*}$$

فالتطبيق ${}^tu$ تقابلٌ و $({}^tu)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

5. تنجم هذه الخاصّة من التكافؤات الآتية:

$$\begin{aligned} f\in\ker({}^tu) &\Leftrightarrow f\circ u = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in E, \left\langle f, u(x)\right\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \forall y\in \operatorname{Im} u, \left\langle f, y\right\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow f\in(\operatorname{Im} u)^\perp\end{aligned}$$

ومن ثَمّ إذا كان u غامراً كان ${}^tu$ متبايناً. ❐

3. الثّنوية في الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. عندئذ يكون الفضاء الثنوي E^* منتهي البعد ويكون $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \dim E$.

3-1. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن $\{0\}$، منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. لنعرّف الجملة $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ من E^* بالعلاقات :

$$e_j^*(e_i) = \left\langle e_j^*, e_i \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases}$$

عندئذ تكوِّن الجملة $\mathcal{E}^*$ أساساً للفضاء E^* نسمّيه **الأساس الثنوي** للأساس $\mathcal{E}$. وتتحقّق العلاقات التالية:

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^{n} \left\langle f, e_i \right\rangle e_i^*$$

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i^*, x \right\rangle e_i$$

التي تُبرّر تسمية الأساس $\mathcal{E}^*$ بالأساس الثنويّ.

3-2. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. وليكن x من $E\backslash\{0\}$. عندئذ يوجد شكل خطيّ f في E^* يُحقِّق $f(x) = 1$.

الإثبات

لنضع $x = e_1$، ولنتمّم (e_1) إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E. ثُمّ لنتأمّل الأساس الثنوي $\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_n^*)$ لهذا الأساس. عندئذ يحقّق الشكل الخطي $f = e_1^*$ المطلوب. ينتج من هذه المبرهنة أنّ $(E^*)^\circ = \{0\}$. □

3-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$. وليكن $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ أساساً للفضاء E^*. عندئذ يوجد أساسٌ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء E يكون $\mathcal{F}$ أساسَه الثّنوي.

الإثبات

لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$$

من الواضح أنّ $x \in \ker\Phi$ إذا وفقط إذا كان $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$ ولكن

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k = \big(\mathrm{vect}(\mathcal{F})\big)^\circ = (E^*)^\circ = \{0\}$$

إذن $\ker\Phi = \{0\}$ والتطبيق الخطّي Φ متباينٌ. ولكن $\dim E = \dim\mathbb{K}^n$ إذن Φ تقابلٌ خطّي. إذا كان $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ الأساس القانوني في $\mathbb{K}^n$ وعرّفنا $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ بالعلاقة $e_k = \Phi^{-1}(\varepsilon_k)$ تيقّنّا مباشرة أنّ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$ هو الأساس $\mathcal{F}$. وبذا يكتمل الإثبات. ❐

3-4. مبرهنة : ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، ومختلفاً عن $\{0\}$.

1. أيّاً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ F من E فلدينا :

$$F = (F^\perp)^\circ \quad \text{و} \quad \dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

2. أيّاً كان الفضاء الشعاعيّ الجزئيّ G من E^* فلدينا :

$$G = (G^\circ)^\perp \quad \text{و} \quad \dim G + \dim G^\circ = \dim E$$

الإثبات

1. ليكن $(e_1, \ldots, e_p)$ أساساً للفضاء الجزئي F، ولنتمّمه إلى أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ لكامل الفضاء E، وليكن $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ، أيّاً كان f من E^*، كان

$$\begin{aligned} f \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}_p,\ \big\langle f, e_i \big\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f = \sum_{i=p+1}^{n} \big\langle f, e_i \big\rangle \cdot e_i^* \\ &\Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{vect}(e_{p+1}^*, .., e_n^*) \end{aligned}$$

إذن

$$F^\perp = \text{vect}(e^*_{p+1},..,e^*_n) \quad \text{و} \quad \dim F^\perp = n - \dim F .$$

2. ليكن $\mathcal{F} = (f_1,..,f_n)$ أساساً للفضاء E^* حُصِل عليه بإتمام الأساس $(f_1,\ldots,f_p)$ للفضاء الجزئي G إلى أساس لكامل الفضاء E^*. وليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ الأساس في E الذي أساسه الثنوي هو $\mathcal{F}$. عندئذ أيّاً كان x من E فلدينا

$$\begin{aligned} x \in G^\circ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \ \langle f_i, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sum_{i=p+1}^{n} \langle f_i, x \rangle \cdot e_i \\ &\Leftrightarrow x \in \text{vect}(e_{p+1},..,e_n) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون

$$G^\circ = \text{vect}(e_{p+1},..,e_n) \quad \text{و} \quad \dim G^\circ = n - \dim G .$$

من ناحية أخرى، من الواضح أن $F \subset (F^\perp)^\circ$، ولكن

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp)^\circ &= n - \dim F^\perp \\ &= n - (n - \dim F) = \dim F \end{aligned}$$

ومنه المساواة $F = (F^\perp)^\circ$.

ونترك للقارئ أن يثبت بأسلوب مماثل أنّ $G = (G^\circ)^\perp$. ❐

5-3. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيين، غير تافهين، ومنتهيي البعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$، عندئذ يكون $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$.

الإثبات

في الحقيقة، لقد وجدنا أنّ $\ker {}^t u = (\text{Im}\, u)^\perp$، إذن:

$$\begin{aligned} \text{rg}({}^t u) &= \dim F^* - \dim \ker {}^t u \\ &= \dim F^* - \dim(\text{Im}\, u)^\perp \\ &= \dim F^* - (\dim F^* - \dim \text{Im}\, u) \\ &= \dim \text{Im}\, u = \text{rg}(u) \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

3-6. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_1,\ldots,f_r)$ جملة من الأشكال الخطيّة على E . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين :

❶ $$\exists(\lambda_1,..,\lambda_r)\in\mathbb{K}^r,\ f=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k f_k$$

❷ $$\forall x\in\bigcap_{k=1}^{r}\ker f_k,\ \ f(x)=0$$

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i=1}^{r}\ker f_i\right)^{\perp} &= \left(\left\{f_1,..,f_r\right\}^{\circ}\right)^{\perp}\\ &= \left((\operatorname{vect}(f_1,..,f_r))^{\circ}\right)^{\perp} = \operatorname{vect}(f_1,..,f_r)\end{aligned}$$

وهذا يُعبِّر عن التكافؤ المطلوب. ❐

تمرينات

التمرين 1. نتأمّل في $(\mathbb{R}^3)^*$ الأشكال الخطيّة f_1 و f_2 و f_3 التالية :

$$f_1(x,y,z) = x+y-z$$
$$f_2(x,y,z) = x-y+z$$
$$f_3(x,y,z) = x+y+z$$

أثبت أنّ الجملة $(f_1, f_2, f_3) = \mathcal{F}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$، وجِدْ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يكون $\mathcal{F}$ أساسه الثنوي.

الحل

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$ ، ولنبحث إذا كان هناك $X=(x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$\big(f_1(X), f_2(X), f_3(X)\big) = (a,b,c)$$

في الحقيقة، يكافئ الشرطُ السابقُ قولَنا

$$x+y-z = a$$
$$x-y+z = b$$
$$x+y+z = c$$

ومن ثَمّ

$$x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{c-b}{2},\ z = \frac{c-a}{2}$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big)$$

تقابلٌ. ليكن إذن (e_1,e_2,e_3) الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ ولنعرّف $\varepsilon_k = \Phi^{-1}(e_k)$. فنجد

$$\varepsilon_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right),\quad \varepsilon_2 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right),\quad \varepsilon_3 = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

ونتيقَّن مباشرة أنّ $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_3$. وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$ وأنّها الأساس الثنوي للأساس $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathcal{E}$. ■

التمرين 2. نتأمّل في $(\mathbb{R}^3)^*$ الأشكال الخطيّة f_1 و f_2 و f_3 التالية :

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= \ \ x+2y+3z \\ f_2(x,y,z) &= 2x+3y+4z \\ f_3(x,y,z) &= 3x+4y+6z \end{aligned}$$

أثبت أنّ الجملة $\mathcal{F}=(f_1,f_2,f_3)$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$، وجِدْ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يكون $\mathcal{F}$ أساسه الثنوي.

الحل

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$، ولنبحث إذا كان هناك $X=(x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$\big(f_1(X),f_2(X),f_3(X)\big)=(a,b,c)$$

في الحقيقة، يكافئ الشرطُ السابقُ قولَنا

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= a \\ 2x+3y+4z &= b \\ 3x+4y+6z &= c \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$x=c-2a,\ y=3b-2c,\ z=c+a-2b$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ التطبيق الخطّي

$$\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto\big(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)\big)$$

تقابلٌ. ليكن إذن (e_1,e_2,e_3) الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ ولنعرّف $\varepsilon_k=\Phi^{-1}(e_k)$. فنجد

$$\varepsilon_1=\big(-2,0,1\big),\quad \varepsilon_2=\big(0,3,-2\big),\quad \varepsilon_3=\big(1,-2,1\big)$$

ونتيقّن مباشرة أنّ $f_i(\varepsilon_j)=\delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_3$، وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^3)^*$ وأنّها الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. ■

التمرين 3. ليكن E و F فضاءَين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطياً غامراً. أثبت أنّ التطبيق الخطي ${}^tu$ متباين.

الحل

في الحقيقة، لدينا التكافؤ

$$\begin{aligned} f \in \ker {}^t u &\Leftrightarrow {}^t u(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \left\langle {}^t u(f), x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \left\langle f, u(x) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} u)^\perp \end{aligned}$$

إذن لدينا بوجه عام $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$. فإذا كان u غامراً كان

$$\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp = F^\perp = \{0\}$$

ومن ثَمّ كان ${}^t u$ متبايناً.

التمرين 4. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منتهيي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن التطبيق u من $\mathcal{L}(E, F)$ أثبت أنّ :

$$\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$$

الحل

- لقد أثبتنا صحة المساواة $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$ دون شرط البُعد المنتهي في التمرين السابق.
- ومن جهة أخرى لدينا التكافؤ التالي

$$\begin{aligned} x \in (\operatorname{Im} {}^t u)^\circ &\Leftrightarrow \forall f \in \operatorname{Im} {}^t u, \left\langle f, x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in F^*, \left\langle {}^t u(g), x \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in F^*, \left\langle g, u(x) \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \end{aligned}$$

إذن $\ker u = (\operatorname{Im} {}^t u)^\circ$، فإذا استفدنا من كوْن بُعدا الفضاءَيْن E و F منتهيين، استنتجنا أنّ

$$(\ker u)^\perp = \left((\operatorname{Im} {}^t u)^\circ \right)^\perp = \operatorname{Im} {}^t u$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 5. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن V_1 و V_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E، وليكن W_1 و W_2 فضاءين شعاعيّين جزئيّين من E^*. قارن بين الفضاءين المعطيين في كل من الحالات الآتية:

① $(V_1 + V_2)^\perp$ و $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

② $(V_1 \cap V_2)^\perp$ و $V_1^\perp + V_2^\perp$.

③ $(W_1 + W_2)^\circ$ و $W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

④ $(W_1 \cap W_2)^\circ$ و $W_1^\circ + W_2^\circ$.

الحل

① لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$V_1^\perp \bigcap V_2^\perp = \big(\mathrm{vect}(V_1 \cup V_2)\big)^\perp = (V_1 + V_2)^\perp$$

وهذه النتيجة لا تشترط أن يكون بُعدُ الفضاء E منتهياً.

② ونجد بأسلوب مماثل لما سبق أنّ

$$W_1^\circ \cap W_2^\circ = \big(\mathrm{vect}(W_1 \cup W_2)\big)^\circ = \big(W_1 + W_2\big)^\circ$$

وهذه النتيجة لا تشترط أن يكون بُعدُ الفضاء E منتهياً.

③ من الواضح أنّ كلَّ شكل خطّي من $V_1^\perp + V_2^\perp$ ينعدم على $V_1 \cap V_2$ فهو إذن عنصر من الفضاء $(V_1 \cap V_2)^\perp$. ومن ثَمّ $V_1^\perp + V_2^\perp \subset (V_1 \cap V_2)^\perp$. ولكن لمّا كان E منتهي البُعد كان

$$\begin{aligned}
\dim(V_1^\perp + V_2^\perp) &= \dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim(V_1^\perp \cap V_2^\perp)\\
&= 2\dim E - \dim V_1 - \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)^\perp\\
&= \dim E + \dim(V_1 + V_2) - \dim V_1 - \dim V_2\\
&= \dim E - \dim(V_1 \cap V_2)\\
&= \dim(V_1 \cap V_2)^\perp
\end{aligned}$$

إذن $V_1^\perp + V_2^\perp = (V_1 \cap V_2)^\perp$.

④ وأخيراً من الواضح أنّ الأشكال الخطيّة في $W_1 \cap W_2$ تنعدم عند عناصر $W_1^\circ + W_2^\circ$، ومن ثَمّ $W_1^\circ + W_2^\circ \subset (W_1 \cap W_2)^\circ$. ولكن لمّا كان E منتهي البُعد كان

$$\begin{aligned}\dim(W_1^\circ + W_2^\circ) &= \dim W_1^\circ + \dim W_2^\circ - \dim W_1^\circ \cap W_2^\circ\\ &= 2\dim E - \dim W_1 - \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)^\circ\\ &= \dim E + \dim(W_1 + W_2) - \dim W_1 - \dim W_2\\ &= \dim E - \dim W_1 \cap W_2\\ &= \dim(W_1 \cap W_2)^\circ\end{aligned}$$

إذن $W_1^\circ + W_2^\circ = (W_1 \cap W_2)^\circ$.

وبذا يكتمل الحل. ■

التمرين 6. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن f و g من E^*. نفترض أنّه، أيّاً كان x من E كان $f(x)\,g(x) = 0$. أثبت أنّ $f = 0$ أو $g = 0$.

الحل

يُقرأ الفرْض بالقول إنّ $E \subset \ker f \cup \ker g$، ومن ثَمّ $E = \ker f \cup \ker g$. ونستنتج من ذلك أمرين :

- **أوّلاً.** إنّ $\ker f \cup \ker g$ فضاءٌ شعاعي جزئي، وهذا يقتضي أنّ
  $\ker f \subset \ker g$ أو $\ker g \subset \ker f$.
- **ثانياً.** استناداً إلى ما سبق، وإلى كون $E = \ker f \cup \ker g$ نجد
  $E = \ker g$ أو $E = \ker f$
  وهذا يعني أنّ
  $g = 0$ أو $f = 0$.

وهو المطلوب. ■

التمرين 7. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، أثبت صحّة القضيتين التاليتين :

$\mathcal{P}_k$: لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*، فتوجد جملة $(x_1,\ldots,x_k)$ من عناصر E تُحقّق $\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$ أيّاً كان (i,j) من $\mathbb{N}_k^2$.

$\mathcal{Q}_k$: لتكن $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^*. وليكن ℓ شكلاً خطياً من E^* يُحقّق $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell$. عندئذ توجد في $\mathbb{K}$ أعداد $(\lambda_i)_{1\le i\le k}$ تُحقّق $\ell=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\ell_i$.

واستنتج أنّه أيّاً كانت الجملة $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ من عناصر E^*، هناك تكافؤ بين الخاصتين

$$\ell\in\operatorname{vect}(\ell_1,\ldots,\ell_k)\quad \text{و} \quad \bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell$$

الحل

- الخاصّة $\mathcal{P}_1$ صحيحة. لأنّه إذا كان ℓ_1 شكلاً خطيّاً غير معدوم على E، كان ℓ_1 غامراً، أي وُجِدَ عنصرٌ x_1 من E يُحقّق $\ell_1(x_1)=1$. ومنه $\mathcal{P}_1$.
- $\mathcal{P}_k\Rightarrow\mathcal{Q}_k$. في الحقيقة، لنفترض أنّ $(\ell_1,\ldots,\ell_k)$ جملة حرّة من E^*، وليكن ℓ عنصراً من E^*، يُحقّق $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i\subset\ker\ell$. توجد استناداً إلى $\mathcal{P}_k$ جملة $(x_1,\ldots,x_k)$ تُحقّق الشرط $\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$. ليكن x عنصراً من E، ولنعرّف

$$y=x-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)x_i.$$

عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ y ينتمي إلى التقاطع $\bigcap_{i=1}^{k}\ker\ell_i$ فهو إذن عنصر من $\ker\ell$.

وعليه

$$0=\ell\left(x-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)x_i\right)=\ell(x)-\sum_{i=1}^{k}\ell_i(x)\ell(x_i)$$

وهذا يثبتُ أنّ $\ell=\sum_{i=1}^{k}\ell(x_i)\ell_i$. فالقضيّة $\mathcal{Q}_k$ صحيحة.

- $\mathcal{Q}_k\Rightarrow\mathcal{P}_{k+1}$. في الحقيقة، لنفترض أنّ $(\ell_1,\ldots,\ell_{k+1})$ جملة حرّة من E^*. عندئذ مهما تكن j من $\mathbb{N}_{k+1}$ فإنّ الشكل الخطّي ℓ_j لا ينتمي إلى $\operatorname{vect}\left((\ell_i)_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}}\right)$،

واستناداً إلى الفرْض $\mathcal{Q}_k$ فإنّ $\ker \ell_j \not\subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}} \ker \ell_i \right)$، وعليه يوجد في E عنصرٌ $\tilde{x}_j$ يُحقّق

$$\tilde{x}_j \notin \ker \ell_j \quad \text{و} \quad \tilde{x}_j \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}_{k+1}\setminus\{j\}} \ker \ell_i$$

فإذا عرّفنا $x_j = \frac{1}{\ell_j(\tilde{x}_j)} \tilde{x}_j$، حقّقت الجملة $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ الخاصّة

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_{k+1}^2, \quad \ell_j(x_i) = \delta_{ij}$$

وهذا يثبتُ صحّة $\mathcal{P}_{k+1}$. إذن، لقد أثبتنا أنّ الخواصّ $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ و $(\mathcal{Q}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ صحيحة.

من جهة أخرى، إنّ الاقتضاء $\ell \in \operatorname{vect}\left(\ell_1, \ldots, \ell_k\right) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i \subset \ker \ell$ واضحٌ.
وبالعكس، إذا كانت جميع الأشكال الخطيّة ℓ_i معدومة كان الاقتضاء المُعاكس صحيحاً وضوحاً. لنفترض إذن أنّ واحداً على الأقل من الأشكال الخطيّة في الجملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ غير صفري. ولتكن A أكبر مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}_k$ تكون عندها الجماعة $\left(\ell_i\right)_{i\in A}$ حرّة. عندئذ

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i &= \left(\left\{\ell_1, \ldots, \ell_k\right\}\right)^\circ = \left(\operatorname{vect}\left(\ell_1, \ldots, \ell_k\right)\right)^\circ \\
&= \left(\operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in A}\right)\right)^\circ = \bigcap_{i\in A} \ker \ell_i
\end{aligned}$$

فإذا استفدنا من الخاصّة $\mathcal{Q}_k$ تم الإثبات، لأنّه عندئذ نستنتج من $\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i \subset \ker \ell$ أنّ

$$\ell \in \operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in A}\right) = \operatorname{vect}\left(\left(\ell_i\right)_{i\in \mathbb{N}_k}\right) \qquad \blacksquare$$

التمرين 8. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ جملة حرّة من عناصر E^* . أثبت أنّ $\dim \bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i = \dim E - k$.

تطبيق. نتأمّل جملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ من عناصر $(\mathbb{R}^n)^*$، ونفترض وجود شعاع غير معدوم x في $\mathbb{R}^n$ يُحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_n, \ \ell_k(x) = 0$. أثبت الارتباط الخطّي للجملة $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$.

الحل

في الحقيقة، لدينا

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i = \left(\{\ell_1,\dots,\ell_k\}\right)^\circ = \left(\mathrm{vect}(\ell_1,\dots,\ell_k)\right)^\circ$$

إذن

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i\right) = \dim E - \dim \mathrm{vect}(\ell_1,\dots,\ell_k) = \dim E - k$$

تطبيق. نستنتج من وجود شعاع غير معدوم x يُحقّق أنّ $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \ell_k(x) = 0$ أنّ

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker \ell_i\right) \geq 1$$

ولكن لو كانت الجملة $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ حرّة لكان $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker \ell_i\right) = n - n = 0$

استناداً إلى ما سبق. وعليه لا بُدَّ أن تكون الجملة $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ مرتبطة. ■

التمرين 9. ليكن $E = \mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن 2، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 العناصر من E^* المعرّفة كما يلي :

$$\varphi_1(P) = P(1),\ \varphi_2(P) = P'(1),\ \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أثبت أنّ $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساس للفضاء الثنوي E^*، وعيّن أساساً للفضاء E يكون $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ أساسه الثنوي.

الحل

لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^3, P \mapsto (\varphi_1(P),\varphi_2(P),\varphi_3(P))$$

ولنثبت أنّه غامرٌ، فيكون عندئذ تقابلاً لأنّ $\dim E = 3$.

ليكن (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$ عندئذ يُحقِّق كثير الحدود

$$P = \alpha + \beta(X-1) + \gamma(X-1)^2$$

يتحقّق الشرط $\Phi(P)=(a,b,c)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\alpha,\beta,\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}\right)=(a,b,c)$$

أي إذا وفقط إذا كان

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\quad \gamma=3c+\frac{3}{2}b-3a$$

ومنه، فإنّ كثير الحدود

$$\begin{aligned}P&=a+b\big(X-1\big)+\left(3c+\frac{3}{2}b-3a\right)\big(X-1\big)^2\\&=3c+\frac{1}{2}b-2a+X\big(6a-2b-6c\big)+\left(3c+\frac{3}{2}b-3a\right)X^2\end{aligned}$$

هو كثير الحدود الوحيد الذي يُحقّق $\Phi(P)=(a,b,c)$. إذن Φ تقابلٌ خطّي.

فإذا كان $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ وعرّفنا الأساس $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ كما يأتي :

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\Phi^{-1}(\varepsilon_1)&&=-2+6X-3X^2\\\varphi_2&=\Phi^{-1}(\varepsilon_2)&&=\frac{1}{2}-2X+\frac{3}{2}X^2\\\varphi_3&=\Phi^{-1}(\varepsilon_3)&&=3-6X+3X^2\end{aligned}$$

كان $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. ■

التمرين 10. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها عن n، نفترض أنّ $n\geq 2$. نتأمّل شكلاً خطيّاً φ من E^* يُحقّق

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-2}[X],\quad \varphi((X-a)^2P)=0$$

حيث a عددٌ حقيقي. أثبت أنّه يوجد عددان λ و μ يُحقّقان

$$\forall P\in E,\quad \varphi(P)=\lambda P(a)+\mu P'(a)$$

الحل

في الحقيقة، ليكن P من E . استناداً إلى منشور تايلور لدينا

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + (X-a)^2 Q$$

حيث $Q = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$. ومن ثَمّ يكون

$$\varphi(P) = P(a)\varphi(1) + P'(a)\varphi(X-a)$$

يكفي إذن أن نضع $(\lambda,\mu) = (\varphi(1), \varphi(X-a))$ ليتم الإثبات. ■

التمرين 11. ليكن $E = \mathbb{R}_3[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة، التي لا تزيد درجتها عن 3، ولتكن φ_1 و φ_2 و φ_3 و φ_4 العناصر من E^* المعرّفة كما يلي :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1)$$
$$\varphi_3(P) = P'(0), \quad \varphi_4(P) = P'(1)$$

1. أثبت أنّ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساس للفضاء E^*، وحدّد أساساً للفضاء E يكون الأساسُ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساسَه الثنوي.

2. عبّر عن الشّكل الخطّي ψ من E^*، المعرّف بالعلاقة $\psi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ بدلالة الأساس السّابق.

الحل

1. لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^4, P \mapsto \big(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \varphi_3(P), \varphi_4(P)\big)$$

وليكن $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^4$.

- الشرط $\Phi(P_1) = \varepsilon_1$ يقتضي أنّ العددَ 1 جذرٌ مضاعف لكثير الحدود P، إذن يُكتب P_1، في حال وجوده، بالشكل $(X-1)^2(aX+b)$ فإذا اشترطنا أيضاً $P_1(0) = 1$ و $P_1'(0) = 0$ استنتجنا أنّ $b = 1$ و $a = 2$. إذن $P_1 = (X-1)^2(2X+1)$ هو كثير الحدود الوحيد في E الذي يُحقّق $\Phi(P_1) = \varepsilon_1$.
- وإذا عرّفنا $P_2 = P_1(1-X) = X^2(3-2X)$ تحقّقنا مباشرة أنّ $\Phi(P_2) = \varepsilon_2$.

- أمّا الشرط $\Phi(P_3) = \varepsilon_3$ فيقتضي أنّ العددَ 1 جذرٌ مضاعف لكثير الحدود P، وأنّ 0 جذرٌ بسيط له، إذن يُكتب P_3، في حال وجوده، بالشكل $a(X-1)^2 X$. فإذا اشترطنا أيضاً أن يكون $P_3'(0) = 1$ استنتجنا أنّ $a = 1$. إذن $P_3 = (X-1)^2 X$ هو كثير الحدود الوحيد في E الذي يُحقّق $\Phi(P_3) = \varepsilon_3$.
- وإذا عرّفنا $P_4 = -P_3(1-X) = X^2(X-1)$ تحقّقنا مباشرة أنّ $\Phi(P_4) = \varepsilon_4$.

وعلى هذا، نرى أنّ الجملة $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ تُحقّق $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ في حالة i و j من $\mathbb{N}_4$. إذن الجملة $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ أساس للفضاء E^* وهي الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

2. نعلم أنّ $\psi = \sum_{k=1}^{4} \psi(P_k)\varphi_k$ إذن نجد بحساب بسيط

$$\psi = \frac{1}{2}\big(\varphi_1 + \varphi_2\big) + \frac{1}{12}\big(\varphi_3 - \varphi_4\big)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 12. ليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n. في حالة عدد حقيقيّ a نضع: $\varphi_a : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$.

1. تحقّق أنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ a، كان φ_a عنصراً من E^*.
2. لتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداداً حقيقيّةً مختلفةً مثنى مثنى. أثبت أنّ الجملة الآتية $(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n})$ هي أساس للفضاء E^* وجِدْ أساسه الثّنويّ.
3. أثبت أنّه توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0 \le i \le n}$ من الأعداد الحقيقيّة تُحقّق:

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

الحل

1. إثبات أنّ التطبيق φ_a شكلٌ خطّي على E أمرٌ بسيط نترك تفاصيله للقارئ.

2. لنعرّف في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$ كثير الحدود ℓ_k بالعلاقة

$$\ell_k(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{X-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

عندئذ نتيقَّن مباشرة أنّ $\varphi_{x_i}(\ell_j)=\delta_{ij}$ في حالة i و j من $\{0,1,\ldots,n\}$. وهذا يثبتُ أنّ الجملة $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$ أساسٌ للفضاء E^*، وأنها في الحقيقة الأساس الثنوي للأساس $(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_n)$.

3. لمّا كانت $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$ أساساً للفضاء E^*، أمكن التعبير عن الشكل الخطّي

$$\psi : E\rightarrow\mathbb{R},\quad P\mapsto\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

بطريقة وحيدة بعبارة خطيّة في عناصر الأساس $(\varphi_{x_0},\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$؛ أي توجد متتالية منتهية وحيدة $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ من الأعداد الحقيقيّة تُحقِّق $\psi=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varphi_{x_i}$، وهذا يُكافئ

$$\forall P\in E,\quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)$$

في الحقيقة $\lambda_k=\psi(\ell_k)$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 13. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n.

1. ليكن $e_k=(X-a)^k$، جِدْ الأساس الثّنويّ $(e_k^*)_{0\leq k\leq n}$ للأساس $(e_k)_{0\leq k\leq n}$. وعبّر عن الشكل الخطّي $\varphi : P\mapsto\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ بدلالة عناصر هذا الأساس.
2. ليكن التطبيق الخطّي Δ المعرّف بالعلاقة $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$، وليكن الشكل الخطّي φ_k المعرّف بالعلاقة $\varphi_k(P)=\Delta^k(P)(0)$. أثبت أنّ $(\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ أساس للفضاء E^*، وعين الأساس $(e_k)_{0\leq k\leq n}$ في E الذي أساسه الثنويّ $(\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$.

الحل

1. في الحقيقة، مهما كان P من E، أمكننا أن نكتب استناداً إلى منشور تايلور

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} e_k$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall P \in E, \quad e_k^*(P) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

وهذا يعرّف الأساس الثنوي $(e_k^*)_{0\leq k\leq n}$ للأساس $(e_k)_{0\leq k\leq n}$.

أمّا الشكل الخطي $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ فيمكن التعبير عنه بدلالة هذا الأساس كما يلي :

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n} \varphi(e_k)e_k^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-a)^{k+1}-(-a)^{k+1}}{k+1} e_k^*$$

2. لنضع تعريفاً $e_0 = 1$ وكذلك

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad e_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

عندئذ نلاحظ أنّ $\Delta(e_0) = 0$ و $\Delta(e_1) = e_0$ وأنّه في حالة $2 \leq k \leq n$ لدينا

$$\begin{aligned}\Delta(e_k) &= \frac{(X+1)(X)\cdots(X-k+2)}{k!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{(k-1)!} = e_{k-1}\end{aligned}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$\Delta^p(e_k) = \begin{cases} e_{k-p} & : \quad k > p \\ 1 & : \quad k = p \\ 0 & : \quad k < p \end{cases}$$

ومن ثَمّ

$$\Delta^p(e_k)(0) = \begin{cases} 1 & : \quad k = p \\ 0 & : \quad k \neq p \end{cases}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\varphi_p(e_k) = \delta_{pk}$. إذن $(\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ هو الأساس الثنوي للأساس $(e_k)_{0\leq k\leq n}$. ■

التمرين 14. لتكن متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يلي:

$$P_0(X)=1,\, P_1(X)=X,\, \forall n\geq 2,\quad P_n(X)=\frac{1}{n!}X(X-n)^{n-1}$$

1. تحقّق أنّه أيّاً كان $1\leq n$ كان $P_n'(X)=P_{n-1}(X-1)$. واستنتج أنّ :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq k,\quad P_n^{(k)}(X)=P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن k من $\mathbb{N}$، نعرّف على $\mathbb{R}[X]$ الشكل الخطّي φ_k بالعلاقة :

$$\varphi_k(P)=P^{(k)}(k)$$

أوجد $\varphi_k(P_n)$.

3. نفترض الآن أنّ m عدد طبيعيّ موجب تماماً. ونرمز بالرمز $E=\mathbb{R}_m[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على m. أثبت أنّ الجملة $(P_0,P_1,\ldots,P_m)$ أساس للفضاء E. وعين أساسه الثّنويّ.

4. أثبت أنّ : $\displaystyle Q(X)=\sum_{k=0}^{m}Q^{(k)}(k)P_k(X)$,$\forall Q\in E$.

5. استنتج أنّ : $\displaystyle P_m(X+a)=\sum_{k=0}^{m}P_{m-k}(a)P_k(X)$,$\forall a\in\mathbb{R}$.

الحل

1. نلاحظ مباشرة أنّ

$$P_2'(X)=X-1=P_1(X-1)\quad \text{و}\quad P_1'(X)=1=P_0(X-1)$$

ليكن $3\leq n$ عندئذ

$$\begin{aligned}
P_n'(X)&=\frac{1}{n!}\Big((X-n)^{n-1}+(n-1)X(X-n)^{n-2}\Big)\\
&=\frac{1}{n!}(X-n)^{n-2}(nX-n)\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\Big(X-1-(n-1)\Big)^{n-2}(X-1)\\
&=P_{n-1}(X-1)
\end{aligned}$$

وهكذا نثبتُ بالتدريج على العدد k أنّ

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq k,\quad P_n^{(k)}(X)=P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن k من $\mathbb{N}$، نعرّف على $\mathbb{R}[X]$ الشكل الخطّي φ_k بالعلاقة $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$. عندئذ يكون لدينا، بالاستفادة من نتيجة السؤال السابق ومن كون $\deg P_n = n$، ما يأتي : $\varphi_k(P_n) = \delta_{nk}$ و δ_{nk} هو رمز كرونيكر.

3. نفترض الآن أنّ m عدد طبيعيّ موجب تماماً. ونرمز بالرمز $E = \mathbb{R}_m[X]$ إلى فضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على m. عندئذ نتأمّل الجملتين $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$ في E و $\mathcal{F} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ في E^*. نستنتج من السؤال السابق أنّ

$$\forall (i,j) \in \{0,1,\ldots,m\}^2, \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$$

وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{P}$ أساسٌ للفضاء E وأنّ $\mathcal{F}$ هو أساسه الثنوي.

4. من المعروف أنّ

$$\forall Q \in E, \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \langle \varphi_k, Q \rangle P_k(X) = \sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(k) P_k(X)$$

5. ليكن a عدداً من $\mathbb{R}$. فإذا طبّقنا المساواة السابقة في حالة $Q(X) = P_m(X+a)$، واستفدنا من نتيجة السؤال الأوّل، وجدنا

$$\begin{aligned} P_m(X+a) &= \sum_{k=0}^{m} P_m{}^{(k)}(a+k) P_k(X) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a+k-k) P_k(X) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a) P_k(X) \end{aligned}$$

ونحصل من ثَمّ على النتيجة الآتية

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P_m(X+Y) = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(Y) P_k(X)$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 15. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n.
ونتأمّل كثير حدود Q من E درجته n، وأعداداً $x_0,x_1,\ldots,x_n$ مختلفة مثنى مثنى.

1. أثبت أنّ الجملة $\left(Q,Q',Q'',\ldots,Q^{(n)}\right)$ جملة حرّة.
2. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. أثبت أنّه توجد $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ في $\mathbb{R}^{n+1}$ تُحقّق

$$\forall P\in E,\quad f(P)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P^{(k)}(0)$$

3. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. نفترض أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\quad f(Q(X+x_k))=0$$

أثبت أنّ $f=0$. واستنتج أنّ الجملة $(Q(X+x_k))_{0\le k\le n}$ أساس للفضاء E.

الحل

1. في الحقيقة، لمّا كان $\deg Q^{(k)}=n-k$ استنتجنا أنّ الجملة $(Q,Q',Q'',\ldots,Q^{(n)})$ جملةٌ حرّة. لأنّ درجات كثيرات الحدود التي تكوّنها مختلفة مثنى مثنى.

2. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. ولنعرّف $\alpha_k=\frac{1}{k!}f(X^k)$. ثُمّ لنتأمّل كثير حدود P من E عندئذ يمكننا أن نكتب، استناداً إلى منشور تايلور، أنّ

$$P=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)\frac{1}{k!}X^k$$

وبتطبيق الشكل الخطّي f على طرفي هذه المساواة نجد

$$f(P)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)\frac{1}{k!}f(X^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P^{(k)}(0)$$

3. ليكن f شكلاً خطيّاً على E. ولنفترض أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\quad f(Q(X+x_k))=0 \qquad (\mathcal{H})$$

نعلم استناداً إلى ما سبق أنّه توجد أعداد $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ تُحقِّق

$$\forall P\in E,\quad f(P)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P^{(i)}(0)$$

واستناداً إلى الفرْض $(\mathcal{H})$ يكون لدينا

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q^{(i)}(x_k) = 0$$

ولكنّ درجة كثير الحدود $S = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q^{(i)}$ لا تتجاوز n، وهو ينعدم عند $n+1$ نقطة مختلفة استناداً إلى ما سبق، فلا بُدّ أن يكون $S = 0$. وإذا استفدنا من الاستقلال الخطّي للجملة $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ استنتجنا أنّ $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$، وهذا يقتضي أنّ $f = 0$.

نكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\left(\operatorname{vect}\left((Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}\right)\right)^{\circ} = \{0\}$$

إذن

$$\operatorname{vect}\left((Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}\right) = E$$

فالجملة $(Q(X + x_k))_{0 \le k \le n}$ مولِّدة وعدد حدودها المختلفة يساوي $n+1$، أي يساوي $\dim E$. وهذا ما يثبت أنّها أساس للفضاء E. ■

التمرين 16. لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة المصفوفات $M = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تحقّق :

$$\exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s$$

نرمز بالرمز $\delta(M)$ إلى s.

1. أثبت أنّ $\mathcal{R}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ وأنّ δ شكل خطّيّ على $\mathcal{R}$.

2. أثبت أنّ جداء ضرب عنصرين من $\mathcal{R}$ هو عنصر من $\mathcal{R}$.

3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = 1$.
أثبت أنّ : $(A \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\exists s : AJ = JA = sJ)$.

4. أثبت أنّه إذا كانت المصفوفة A من $\mathcal{R}$ قَلوبةً فإنّ $A^{-1} \in \mathcal{R}$.

5. أثبت أنّ $\mathcal{R} = \ker \delta \oplus \mathbb{R}J$، وأوجد $\dim \mathcal{R}$.

6. لتكن $\tilde{\mathcal{R}}$ مجموعة المصفوفات $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق :

$$\exists s\in\mathbb{R},\quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=s,\quad \forall j\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=s,$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,n+1-k}=s$$

أثبت أنّ $\tilde{\mathcal{R}}$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ واحسب بُعده.

الحل

1. لنعرّف على الفضاء $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ الأشكال الخطيّة $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ و $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ كما يلي :

$$\rho_k:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\rho_k(M)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}$$
$$\lambda_k:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\lambda_k(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}$$

عندئذ نجد مباشرة أنّ

$$\mathcal{R}=\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\ker(\rho_k-\rho_n)\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\lambda_k-\rho_n)\right)$$

إذن $\mathcal{R}$ هو فضاءٌ شعاعي جزئي من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. كما نلاحظ أنّ δ ينطبق على مقصور أيٍّ من الأشكال الخطيّة السابقة على $\mathcal{R}$، فمثلاً $\delta=\rho_n\big|_{\mathcal{R}}$، وهذا يثبت أنّ δ شكلٌ خطّي على $\mathcal{R}$.

2. لنتأمّل مصفوفتين $A=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ و $B=(b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ولنفترض أنّ المصفوفة $C=(c_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ تساوي AB. عندئذ، أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$ كان

$$\rho_k(C)=\sum_{j=1}^{n}c_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}b_{\ell j}$$
$$=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{k\ell}b_{\ell j}=\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{\ell j}\right)=\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\rho_\ell(B)$$

$$\begin{aligned}\lambda_k(C) &= \sum_{i=1}^n c_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k}\\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell k}\left(\sum_{i=1}^n a_{i\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell(A) b_{\ell k}\end{aligned}$$

فإذا افترضنا أنّ A و B تنتميان إلى $\mathcal{R}$ استنتجنا مما سبق أنّه أيّاً كان k من $\mathbb{N}_n$ كان

$$\begin{aligned}\rho_k(C) &= \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell}\rho_\ell(B) = \sum_{\ell=1}^n \big(a_{k\ell}\delta(B)\big) = \delta(A)\delta(B)\\ \lambda_k(C) &= \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell(A) b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n \big(\delta(A) b_{\ell k}\big) = \delta(A)\delta(B)\end{aligned}$$

وعليه، تنتمي المصفوفة C إلى $\mathcal{R}$، ويكون $\delta(C) = \delta(A)\delta(B)$.

3. لتكن المصفوفة $J = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ التي تُحقّق $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\ a_{ij} = 1$. ولتكن المصفوفة $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. عندئذ

$$AJ = \begin{bmatrix}\rho_1(A) & \rho_1(A) & \cdots & \rho_1(A)\\ \rho_2(A) & \rho_2(A) & \cdots & \rho_2(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho_n(A) & \rho_n(A) & \cdots & \rho_n(A)\end{bmatrix},\quad JA = \begin{bmatrix}\lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\\ \lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1(A) & \lambda_2(A) & \cdots & \lambda_n(A)\end{bmatrix}$$

وعليه، نستنتج أنّ $\big(AJ = JA\big) \Leftrightarrow \big(A \in \mathcal{R}\big)$، وفي حالة $A \in \mathcal{R}$ يكون

$$AJ = JA = \delta(A)J$$

4. لتكن المصفوفة A من $\mathcal{R}$، ولنفترض أنها قَلوبةٌ. عندئذ يكون لدينا

$$\big(A \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow \big(AJ = JA\big) \Rightarrow \big(JA^{-1} = A^{-1}J\big) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{R}.$$

أي تنتمي A^{-1} إلى $\mathcal{R}$، ويكون $\delta(A^{-1}) = \dfrac{1}{\delta(A)}$ في هذه الحالة.

5. لنلاحظ أنّ $\delta(J) = n \neq 0$ إذن $\ker\delta \cap \mathbb{R}J = \{0\}$.

ثُمّ إنّ كلّ مصفوفة M من $\mathcal{R}$ تُكتب بأسلوب وحيد بالشكل

$$M = \left(M - \frac{\delta(M)}{n}J\right) + \frac{\delta(M)}{n}J$$

حيث $\left(M - \frac{\delta(M)}{n} J\right) \in \ker \delta$. إذن لا بُدّ أن يكون

$$\mathcal{R} = \ker \delta \oplus \mathbb{R} J$$

ليكن $F = \operatorname{vect}\left(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$، بملاحظة أنّ $\sum_{k=1}^{n} \rho_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ نستنتج

$$F = \operatorname{vect}\left(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \cancel{\rho_n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$$

ومن جهة أخرى، ليكن $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ الأساس القانوني في $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، ولنعرّف $\varepsilon_n' = E_{nn}$ و $\varepsilon_k = E_{k1} - E_{n,1}$ و $\varepsilon_k' = E_{1k} - E_{1n} + E_{nn}$ في حالة k من $\mathbb{N}_{n-1}$:

$$\varepsilon_k = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k\rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \mathbf{0} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_k' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & k & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & \mathbf{0} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

عندئذ نتيقّن بسهولة أنّه في حالة j من $\mathbb{N}_{n-1}$ لدينا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \rho_j(\varepsilon_i') = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n-1},\ \rho_j(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$$

وفي حالة j من $\mathbb{N}_n$ لدينا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \lambda_j(\varepsilon_i') = \delta_{ij} \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n-1},\ \lambda_j(\varepsilon_i) = 0$$

وهذا يُثبتُ أنّ الجملة $\left(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ حرّة، لأنّه إذا كان

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \rho_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \lambda_i$$

كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_k' = f(\varepsilon_k') \quad \text{و} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{n-1},\ \alpha_k = f(\varepsilon_k)$$

وعليه، فإنّ $f = 0$ يقتضي أنّ

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_1' = \cdots = \alpha_n' = 0 .$$

إذن لا بُدّ أن تكوّن الجملة $\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ أساساً للفضاء F، ومنه $\dim F = 2n-1$.

ولكن

$$\begin{aligned}\ker\delta &= \left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\rho_k)\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}\ker(\lambda_k)\right)\\ &= \left(\left\{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right\}\right)^\circ\\ &= \left(\operatorname{vect}\left(\rho_1,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\right)^\circ\\ &= F^\circ\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\dim\ker\delta &= \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim F\\ &= n^2-2n+1 = (n-1)^2\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\dim\mathcal{R} = (n-1)^2+1 = n^2-2n+2$$

6. لتكن $\tilde{\mathcal{R}}$ مجموعة المصفوفات $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ التي تُحقّق :

$$\exists s\in\mathbb{R},\quad \forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=s,\quad \forall j\in\mathbb{N}_n,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=s,$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,n+1-k}=s$$

في حالة $n=1$ يكون $\tilde{\mathcal{R}}=\mathcal{R}=\mathbb{R}J$، لذلك سنفترض أنّ $n>1$. عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ $\tilde{\mathcal{R}}$ فضاءٌ شعاعي جزئي من $\mathcal{R}$، وإذا عرّفنا على $\mathcal{R}_0=\ker\delta$ الشكلين الخطيّين

$$\tau:\mathcal{R}_0\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\tau(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$\mu:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad M=(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\mapsto\mu(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{in+1-i}$$

أثبتنا بأسلوبٍ مماثلٍ لما سبق أنّ

$$\tilde{\mathcal{R}}=\left(\ker\tau\cap\ker\mu\right)\oplus\mathbb{R}J$$

وهنا نلاحظ أنّه في حالة $n = 2$ لدينا $\dim \mathcal{R}_0 = 1$، ولكن $\tau = -\mu$، إذن $\ker \tau = \ker \mu$. ولكن $\tau \neq 0$ فيجب أن يكون $\ker \tau = \ker \mu = \{0\}$، ومن ثمّ $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{R}J$، في هذه الحالة أيضاً.

لندرس إذن حالة $n > 2$. ولنعرّف المصفوفتين

$$A = I - \frac{1}{n}J \quad \text{و} \quad B = L - \frac{1}{n}J$$

حيث $L = (\delta_{i,n+1-j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$. نلاحظ مباشرة أنّهما تنتميان إلى $\ker \delta = \mathcal{R}_0$، كما نلاحظ ما يأتي :

- إذا كان n عدداً زوجيّاً كان

$$\tau(A) = n - 1 \quad \text{و} \quad \tau(B) = -1$$

و

$$\mu(A) = -1 \quad \text{و} \quad \mu(B) = n - 1$$

وهذا يثبت أنّ الجملة (τ, μ) حرّة في هذه الحالة.

- وإذا كان n عدداً فردياً كان

$$\tau(A) = n - 1 \quad \text{و} \quad \tau(B) = 0$$

و

$$\mu(A) = 0 \quad \text{و} \quad \mu(B) = n - 1$$

وهذا يبرهن الاستقلال الخطّي للجملة (τ, μ) في هذه الحالة أيضاً. ومن ثمّ يكون

$$\begin{aligned}\dim\left(\ker \tau \cap \ker \mu\right) &= \dim\left(\operatorname{vect}(\tau,\mu)\right)^\circ \\ &= \dim \delta - \dim \operatorname{vect}(\tau,\mu) \\ &= (n-1)^2 - 2\end{aligned}$$

وعليه نستنتج أنّ

$$\dim \tilde{\mathcal{R}} = \begin{cases} 1 & : \quad n \leq 2 \\ n(n-2) & : \quad n > 2 \end{cases}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 17. ليكن E و F فضاءَيْن منتهيي البعد على حقل $\mathbb{K}$. نذكّر بأن E^* يمثّل الفضاء الثنوي للفضاء E ، وبأنّ $\mathcal{L}(E,F)$ هو فضاء التطبيقات الخطّية من E إلى F .

نعرّف، في حالة a من F و f من E^* ، التطبيق $f \otimes a$ من $\mathcal{L}(E,F)$ على النحو الآتي

$$f \otimes a : E \to F : x \mapsto \langle f, x \rangle a$$

1. في حالة a من F ، و f من E^* ، ما رتبة التطبيق الخطّي $f \otimes a$ ؟
2. أثبت أنّه إذا كان u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E,F)$ رتبته تساوي 1، فيوجد a من F و f من E^* يُحقّق $u = f \otimes a$.
3. إذا كانت $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ أساساً للفضاء F ، و $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ أساساً للفضاء E^* . فأثبت أنّ الجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حيث $u_{ij} = f_i \otimes a_j$ هي أساس للفضاء $\mathcal{L}(E,F)$.
4. استنتج مما سبق أنّ كلّ تطبيق خطّي u من $\mathcal{L}(E,F)$ ، يُساوي مجموع p تطبيقاً خطيّاً على الأكثر رتبة كلٍّ منها 1، وقد عرّفنا $p = \min(\dim E, \dim F)$.
5. أثبت، على وجه الدقّة، أنّه إذا كان u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطيّاً رتبته r ، فتوجد تطبيقات خطيّة u_1 و u_2 و ... و u_r من $\mathcal{L}(E,F)$ ، تُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_r,\ \mathrm{rg}\, u_k = 1 \quad \text{و} \quad u = \sum_{k=1}^{r} u_k$$

الحل

1. في حالة a من F ، و f من E^* ، نلاحظ أنّه إذا كان $a = 0$ أو $f = 0$ كان $f \otimes a = 0$ ، أمّا إذا كان $a \neq 0$ و $f \neq 0$ فعندئذ يكون $\mathrm{Im}(f \otimes a) = \mathbb{K}a$ ، وعليه $\mathrm{rg}(f \otimes a) = 1$ في هذه الحالة.

2. ليكن u تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E,F)$ رتبته 1، فيوجد a من $F\backslash\{0\}$ يُحقّق $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{K}a$. لنتأمّل عنصراً e_1 من E يُحقّق $u(e_1) = a$ ، عندئذ من الواضح أنّ $\ker u \cap \mathbb{K}e_1 = \{0\}$ ، ولمّا كان

$$\dim \ker u = \dim E - \mathrm{rg}\, u = n - 1$$

استنتجنا أنّ $E = \ker u \oplus \mathbb{K}e_1$. لنتأمّل إذن أساساً $(e_2,\ldots,e_n)$ للفضاء $\ker u$ ، فتكون الجملة $\mathcal{E}$ التالية: $(e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E ، ثمّ لنتأمّل الأساس الثنوي $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ نجد

$$\begin{aligned}\forall x \in E,\ u(x) &= u\left(\sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle e_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle u(e_k) = \left\langle e_1^*, x\right\rangle u(e_1) = \left\langle e_1^*, x\right\rangle a\end{aligned}$$

أي إنّ $u = e_1^* \otimes a$. وهي النتيجة المطلوبة.

3. ليكن $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ أساساً للفضاء F ، و $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساساً للفضاء E^* . ولنثبت أنّ الجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حيث $u_{ij} = f_i \otimes a_j$ هي أساس للفضاء $\mathcal{L}(E,F)$. من الواضح أنّ عدد حدود هذه الجملة يساوي nm أي يساوي $\dim \mathcal{L}(E,F)$ ، لذلك يكفي أن نثبت أنها حرّة. لنتأمل إذن عبارة خطيّة معدومة بعناصر هذه الجملة، ولتكن

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}u_{ij} = 0$$

نستنتج إذن أنّ

$$\forall x \in E,\quad \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i(x)\right)a_j = 0$$

ولأنّ الجملة $\mathcal{A}$ حرّة، نستنتج من ذلك أنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \forall x \in E,\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i(x) = 0$$

أو

$$\forall j \in \mathbb{N}_m,\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i = 0$$

ولكنّ الجملة $\mathcal{F}$ جملة حرّة أيضاً في E^* ، إذن

$$\forall j \in \mathbb{N}_m,\quad \lambda_{1j} = \lambda_{2j} = \cdots = \lambda_{nj} = 0$$

والجملة $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ حرّة.

4. لنحتفظ برموز السؤال السابق. وليكن u تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$ ، عندئذ توجد جملة من عناصر $\mathbb{K}$ ولتكن $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ تُحقِّق

$$u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}(f_i \otimes a_j)$$

ولكن يمكن كتابة هذه العبارة بالشكلين المتكافئين التاليين :

$$u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}a_j\right)}_{b_i} = \sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}f_i\right)}_{g_j}\otimes a_j$$

أو

$$u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes b_i = \sum_{j=1}^{m} g_j \otimes a_j$$

إذن u يُساوي مجموع p تطبيقاً خطيّاً على الأكثر رتبة كلٍّ منها 1، حيث $p = \min(n,m)$.

5. ليكن u من $\mathcal{L}(E,F)$ تطبيقاً خطيّاً رتبته r فيكون $\dim\ker u = n - r$ ، نختار $(e_{r+1},\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء $\ker u$ ، ونتمّمه إلى أساس

$$\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$$

للفضاء E . ثُمّ لنعرّف جملة العناصر $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_r}$ بالعلاقات $a_k = u(e_k)$. وليكن

$$\mathcal{E}^* = (e_1^*,\ldots,e_r^*,e_{r+1}^*,\ldots e_n^*)$$

الأساس الثنوي للأساس $\mathcal{E}$. عندئذ

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle e_k$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \qquad u(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left\langle e_k^*, x\right\rangle u(e_k)\\ &= \sum_{k=1}^{r}\left\langle e_k^*, x\right\rangle u(e_k) = \left(\sum_{k=1}^{r} e_k^* \otimes a_k\right)(x)\end{aligned}$$

أو

$$\forall x \in E, \quad u = \sum_{k=1}^{r} e_k^* \otimes a_k$$

وهي النتيجة المطلوبة.