# الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد

## 1. عموميّات

**1-1. مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E$.
إنّ الخواص الآتية متكافئة :

① الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء الشعاعي $E$.

② الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. أي إنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ لا تولّد $E$ أيّاً كان $j$ من $I$.

③ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة أعظمية. أي تكون مرتبطةً خطياً كلُّ جماعة تُمدِّد تماماً الجماعة السابقة.

### الإثبات

①⇐③ إذا لم يكن ذلك صحيحاً أمكن توسيع مجموعة الأدلّة إلى $J = I\cup\{j\}$، حيث $I \not\ni j$، وأمكن إيجاد عنصرٍ $e_j$ في $E$ على أن تكون الجماعة الجديدة $(e_i)_{i\in J}$ حرّةً. ولكنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء $E$ إذن توجد جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ تُحقّق $e_j = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ وهذا يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرّة.

③⇐② ليكن $x$ عنصراً من $E$، وليكن $j$ عنصراً لا ينتمي إلى $I$. نضع $J = I\cup\{j\}$ ونعرّف $e_j = x$. لمّا كانت الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً أعظميّة كانت الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ مرتبطة. إذن توجد جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in J}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$ تحقّق $\sum_{i\in J}\alpha_i e_i = 0$ و $(\alpha_i)_{i\in I} \neq 0$. ولأنّ افتراض $\alpha_j = 0$ يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرة، وجب أن يكون $\alpha_j \neq 0$ وبالإمكان القسمة على $\alpha_j$. وعندئذ يكون

$$x = e_j = -\sum_{i\in I}\frac{\alpha_i}{\alpha_j}e_i$$

وتكون، من ثَمّ، الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعةً مولّدة، وهي أصغرية لأنّها حرّة.

② ⇐ ① إذا لم تكن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ حرةً وُجِدَ $i_0$ في $I$ يُحقِّق أنّ العنصر $e_{i_0}$ تركيبٌ خطي في عناصر الجملة $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. ومن ثَمّ تكون الجماعة $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ مولّدة، وهذا يناقض كون الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولّدة أصغرية. ❐

**1-2. مبرهنة.** ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ جملة من $E$. نضع $F=\mathrm{vect}(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. عندئذ تكون كلُّ جملة $(f_1,f_2,\ldots,f_{n+1})$ من $F$ مرتبطةً خطيّاً.

**الإثبات**

سنثبت هذه المبرهنة بالتدريج على العدد $n$.

- إذا كان $n=1$ كان $F=\{\lambda e_1:\lambda\in\mathbb{K}\}$. فإذا كان $f_1$ و $f_2$ من $F$ وُجِدَ عددان $\lambda_1$ و $\lambda_2$ من $\mathbb{K}$ يُحقّقان $f_1=\lambda_1 e_1$ و $f_2=\lambda_2 e_1$. وعندئذ $\lambda_2 f_1-\lambda_1 f_2=0$، والجملة $(f_1,f_2)$ مرتبطة خطياً. (لاحظ أنّ حالة $\lambda_1=\lambda_2=0$ حالة تافهة).
- لنفترض صحة الخاصة عند قيمة $n-1$. ولنفترض أنّ $(f_1,f_2,\ldots,f_{n+1})$ جملة من $F=\mathrm{vect}(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. عندئذ توجد جملة $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n+1\\1\le j\le n}}$ من $\mathbb{K}$ تُحقّق :

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_1 & = & \alpha_{11}\,e_1 & + & \alpha_{12}\,e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\,e_n\\
f_2 & = & \alpha_{21}\,e_1 & + & \alpha_{22}\,e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\,e_n\\
\vdots & \vdots & & & & & & & \vdots\\
f_{n+1} & = & \alpha_{n+1,1}e_1 & + & \alpha_{n+1,2}e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n+1,n}e_n
\end{array}$$

فإذا كان $\alpha_{1n}=\alpha_{2n}=\cdots=\alpha_{n+1,n}=0$ كانت الجملةُ $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ جملةً من عناصر $\mathrm{vect}(e_1,e_2,\ldots,e_{n-1})$، وبمقتضى فرْض التدريج تكون هذه الجملة مرتبطة خطيّاً.

لنفترض إذن أنّ $\alpha_{k,n}\neq 0$، ولنضع، في حالة $j$ من $\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}$، التعريف الآتي:

$$\tilde{f}_j=f_j-\frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}}f_k\in\mathrm{vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$$

عندئذ تكون $(\tilde{f}_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ جملة من $\operatorname{vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$ فهي إذن مرتبطة خطياً بمقتضى فرْض التدريج. ومن ثَمّ توجد جملة غير معدومة $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus\{k\}}$ من $\mathbb{K}$ تُحقّق $\sum_{j\neq k}\lambda_j\tilde{f}_j=0$ ومنه

$$\sum_{j\neq k}\lambda_j f_j-\left(\sum_{j\neq k}\frac{\lambda_j\alpha_{j,n}}{\alpha_{n,k}}\right)f_k=0$$

وهذا يثبت أنّ الجملة $(f_1,f_2,\ldots,f_{n+1})$ جملة مرتبطة خطياً. ❐

1-3. **نتيجة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. إذا كانت $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ جملة مولّدة للفضاء $E$ كانت كلُّ جماعة $(f_j)_{j\in J}$ تُحقّق الشرط $\operatorname{card}(J)>n$ مرتبطةً خطيّاً.

## 2. بُعد فضاء شعاعي

1-2. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نقول إنّ $E$ **منتهي البعد** إذا وفقط إذا وُجدتْ فيه جماعة $(e_i)_{i\in I}$ مولّدة ومنتهية $(\operatorname{card}(I)<+\infty)$.

2-2. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E$. نفترض أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة مولِّدة وأنه توجد مجموعة جزئية غير خالية $J$ من $I$ تكون عندها الجماعة $(e_i)_{i\in J}$ حرةً. عندئذ توجد مجموعة جزئية $K$ من $I$ تحوي $J$ أي $(I\supset K\supset J)$، وتكون، في حالتها، الجماعة $(e_i)_{i\in K}$ أساساً للفضاء $E$.

### الإثبات

سنقدّم البرهان فقط في حالة كون الفضاء الشعاعي $E$ منتهي البعد. إذ تتطلّب الحالة العامة تقنيات إضافية مثل (توطئة زورن Zorn) وهي خارج إطار هذا الكتاب.

لمّا كان $E$ فضاءً منتهي البُعد وُجِدَ عددٌ طبيعي $n$ يجعل كلَّ جملةٍ $(f_j)_{j\in L}$ تُحقِّق الشرطَ $\operatorname{card}(L)>n$ مرتبطةً خطياً، وذلك استناداً إلى النتيجة 1-3. لنعرِّف إذن

$$\mathcal{A}=\left\{H\subset I:(J\subset H)\wedge\left((e_i)_{i\in H}\ \text{جماعة حرّة}\right)\right\}$$

من الواضح أنّ $J\in\mathcal{A}$ وأنّه بمقتضى الملاحظة السابقة :

$$\forall H\in\mathcal{A},\ \operatorname{card}(H)\leq n$$

إذن توجد $K$ تنتمي إلى $\mathcal{A}$، وتُحقّق

$$\operatorname{card}(K) = \max\left\{\operatorname{card}(H) : H \in \mathcal{A}\right\}$$

- من جهة أولى، لمّا كان $K \in \mathcal{A}$ كانت الجملة $(e_i)_{i\in K}$ حرّة وحقّقت $J \subset K \subset I$.
- ومن جهة ثانية، إذا لم تكن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ مولّدةً، وُجِدَ في $I\backslash K$ عنصر $j$ يُحقّق $e_j \notin \operatorname{vect}\left((e_i)_{i\in K}\right)$، ولكنّ هذا يقتضي أن تكون الجملة $(e_i)_{i\in K\cup\{j\}}$ جملة حرّة في $E$ وأن تكون المجموعة $K \cup \{j\}$ عنصراً من $\mathcal{A}$، وهذا يناقض تعريف $K$. إذن الجملة $(e_i)_{i\in K}$ جملة مولّدة وهي من ثَمّ تُكوّن أساساً للفضاء $E$. ❒

**2-3. نتيجة**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. لنفترض أنّ $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_r)$ جملة حرّة من $E$ و $\mathcal{G} = (g_1,\ldots,g_m)$ جملة مولّدة للفضاء $E$. عندئذ يمكننا أن نتمّم $\mathcal{E}$ إلى أساس $(e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$ للفضاء $E$، وذلك بعناصر $e_{r+1},\ldots,e_n$ مأخوذة من المجموعة $\{g_k : k \leq m\}$.

**2-4. مبرهنة وتعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$، نفترض أنّ $E \neq \{0\}$. عندئذ يوجد عددٌ طبيعيٌ وحيدٌ $n$، بحيث يحقّقُ كلُّ أساس $(e_i)_{i\in I}$ للفضاء $E$ الشرطَ $\operatorname{card}(I) = n$.

نسمّي العددَ $n$ **بُعدَ الفضاء الشعاعي** $E$ على الحقل $\mathbb{K}$، ونرمز إليه عادة بالرمز $\dim_{\mathbb{K}} E$، أو ببساطة $\dim E$، إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

### الإثبات

لنتأمّل أساسين $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ و $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_m)$ للفضاء $E$. لمّا كانت $\mathcal{E}$ جملة مولّدة، ولأنّ الجملة $\mathcal{F}$ جملة حرّة، كان $n \geq m$ وذلك بمقتضى النتيجة 1-3. وبأسلوب مماثل، الجملةُ $\mathcal{F}$ جملة مولّدة، والجملة $\mathcal{E}$ جملة حرّة إذن $n \geq m$، ومن ثَمّ $m = n$. ❒

**2-5. ملاحظة**. نصطلح أنّ $\dim\{0\} = 0$، وأنّه إذا لم يكن الفضاء الشعاعي $E$ منتهي البعد على $\mathbb{K}$ فإنّ $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$.

**2-6. نتيجة.** ليكن $E$ فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$ . وليكن $F$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$ . عندئذ يكون $F$ فضاءً شعاعياً منتهي البُعد يُحقّق

$$\dim F \leq \dim E$$

**الإثبات**

إذا كان $F = \{0\}$ تمّ الإثبات. نفترض إذن أنّ $F \neq \{0\}$ ونعرّف $\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية $q$ من $\mathbb{N}^*$ التي توجد، في حالة كل منها، جملة $(x_1,\ldots,x_q)$ حرّة في $F$ .

لمّا كانت كلُّ جملةٍ حرّةٍ في $F$ حرّةً في $E$ كان $\varnothing \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N}_{\dim E}$ ، لأنّ $F \neq \{0\}$ .

ليكن $p = \max \mathcal{N} \leq \dim E$ عندئذ توجد جملة $(x_1,\ldots,x_p)$ حرّة في $F$ ، وهي جملة حرّة أعظمية في $F$ ، فهي أساسٌ للفضاء $F$ . ومنه $p = \dim F$ ويكتمل الإثبات. ❐

**2-7. مبرهنة.** إذا كان $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$ ، وكان بُعداهما منتهيين كان $E \times F$ فضاءً شعاعياً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$ ، وتحقّقت المساواة الآتية.

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

**الإثبات**

إنّ هذه النتيجة صحيحة لأنه إذا تأملنا أساساً $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ للفضاء $E$ ، وتأملنا كذلك أساساً $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_m)$ للفضاء $F$ . كانت الجملة

$$\big((e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0),(0,f_1),(0,f_2),\ldots,(0,f_m)\big)$$

أساساً للفضاء $E \times F$ . ❐

**2-8. تعميم.** لتكن $E_1,E_2,\ldots,E_n$ فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقلٍ $\mathbb{K}$ . عندئذ يكون $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد أيضاً، ويكون

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

**الإثبات**

الإثبات مباشرٌ بالتدريج اعتماداً على الخاصّة السابقة. ❐

2-9. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ بُعد كلٍّ من $E$ و $F$ منتهياً. عندئذ تكون الخاصّتان الآتيتان متكافئتين :

❶ يوجد تقابلٌ خطي $u$ بين $E$ و $F$، (ونكتب عندئذ $E \cong F$).

❷ $\dim E = \dim F$.

**الإثبات**

❶ ⇐ ❷ ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء $E$. ولنعرّف $f_i = u(e_i)$ أيّاً كان $i$ من $\mathbb{N}_n$. إنّ الجملة $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ أساس للفضاء $F$. وذلك للسببين الآتيين:

- الجملة $\mathcal{E}$ جملة حرّة، والتطبيق $u$ متباينٌ إذن $\mathcal{F}$ جملة حرّة.
- الجملة $\mathcal{E}$ جملة مولّدة والتطبيق $u$ غامرٌ إذن $\mathcal{F}$ جملة مولّدة.

ومن ثَمّ $\dim F = n = \dim E$.

❷ ⇐ ❶ ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء $E$، وليكن $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$، أساساً للفضاء $F$. إنّ التطبيق الخطي $u : E \to F$ المعرّف كما يأتي

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad u(e_i) = f_i$$

هو التقابل الخطّي المطلوب. ❐

2-10. **نتيجة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون $E$ مُشاكِلاً تقابلياً للفضاء $\mathbb{K}^{\dim E}$. أي $E \cong \mathbb{K}^{\dim E}$.

**تطبيق**.

| |
|---|
| ليكن $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً، إذن $\operatorname{card}(\mathbb{F}) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $p$ عددٌ أولي. |

في الحقيقة، ليكن $p$ العددَ المميّز للحقل $\mathbb{F}$. نعلم أنّ $p$ عددٌ أوليٌّ لأنّ $\mathbb{F}$ حلقة تامّة. ومن ثَمّ يكون $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقلاً جزئياً من $\mathbb{F}$، ويمكن اعتبار $\mathbb{F}$ فضاءً شعاعياً على $\mathbb{K}$. ولمّا كان $\mathbb{F}$ حقلاً منتهياً كان بُعدُ الفضاء الشعاعي $\mathbb{F}$ على الحقل $\mathbb{K}$ منتهياً. لنضع $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. عندئذ يكون $\mathbb{F} \cong \mathbb{K}^n$ بمقتضى النتيجة السابقة ومنه

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}) = p^n$$

2-11. **نتيجة**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فضاءات شعاعيّة جزئيّة من $E$ أبعادها منتهية، ونفترض أنّ المجموع $\sum_{i=1}^{n} E_i$ مباشر. عندئذ يكون الفضاء $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ منتهي البعد، ويكون

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

**الإثبات**

في الحقيقة، نعلم أنّ التطبيق

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_i, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$$

تقابلٌ خطي. ❐

2-12. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $F$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$. عندئذ يوجد فضاء شعاعي جزئي $G$ من $E$ يُحقّق $E = F \oplus G$.

**الإثبات**

ليكن $(e_1, \ldots, e_r)$ أساساً للفضاء $F$. يمكننا بناءً على المبرهنة 2-3. أن نجد عناصر $e_{r+1}, \ldots, e_n$ في $E$ تجعل الجملة $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء $E$. نعرّف إذن

$$G = \mathrm{vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $E = F \oplus G$. ❐

**ملاحظة**. إنّ الخاصة السابقة صحيحة إذا لم يكن $\dim E < +\infty$.

2-13. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$، وليكن $F$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$. عندئذ يكون بُعد $E/F$ منتهياً، ويكون

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

**الإثبات**

لنتأمّل استناداً إلى المبرهنة 2-12. فضاءً شعاعياً جزئياً $G$ من $E$ يحقّق $E = F \oplus G$، ولنتأمّل التطبيق $\Phi : G \to E/F,\ x \mapsto [x]$ وهو مقصور الغمر القانوني على الفضاء الجزئي $G$. إنّ $\Phi$ تشاكل تقابلي خطي.

في الحقيقة، إنّ $\Phi$ خطيٌّ لأنّه مقصور تطبيق خطي على فضاء شعاعي جزئي من منطلقه. وهو متباينٌ لأنّ

$$\begin{aligned} x \in \ker \Phi &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge ([x] = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge (x \in F) \\ &\Leftrightarrow x \in G \cap F = \{0\} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

وأخيراً إذا كان $x$ عنصراً من $E$ كان $x = x_F + x_G$ حيث $x_F \in F$ و $x_G \in G$، ومن ثَمّ $\Phi(x_G) = [x_G] = [x]$، وهذا يثبت أنّ $\Phi$ غامر. ينتج من ذلك أنّ

$$\dim E/F = \dim G = \dim E - \dim F$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

2-14. **تعريف**. إذا كان $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، وكان $F$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$. نقول إنّ **تمام بُعد** $F$ منتهٍ ونكتب $\operatorname{codim}_E F < +\infty$ إذا وفقط إذا كان بُعد الفضاء $E/F$ منتهياً. ويكون بالتعريف $\operatorname{codim}_E F = \dim E/F$. لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة ما يأتي:

$$\dim E < +\infty \Rightarrow \operatorname{codim}_E F = \dim E - \dim F$$

2-15. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعييّن منتهيي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $u$ تطبيقاً خطياً من $E$ إلى $F$، أي $u \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ يكون بُعد $\operatorname{Im} u$ منتهياً ويكون

$$\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u)$$

**الإثبات**

لقد أثبتنا في بحث الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطيّة أنّ

$$E/\ker u \cong \operatorname{Im} u$$

ومن ثَمّ يكون

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim E/\ker u = \dim E - \dim \ker u$$ ❐

2-16.**مبرهنة** : ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان على حقل $\mathbb{K}$. عندئذ يكون بُعد الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$ منتهياً، ويكون $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.

**الإثبات**

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء $E$. لمّا كان التطبيق الخطي يتعيّن بأسلوب وحيد انطلاقاً من صورة أساس للمنطلق، كان التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E,F) \rightarrow F^n, \quad u \mapsto (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$$

تقابلاً خطياً، ومن ثَمّ

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = \sum_{i=1}^{n} \dim F = \dim E \cdot \dim F$$ ❐

## 3. رتبة جماعة أشعة ورتبة تطبيق خطي

3-1. **تعريف**. لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من فضاء شعاعي $E$. إذا كان بُعد $\mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$ منتهياً قلنا إنّ **رتبة الجماعة** $(x_i)_{i\in I}$ منتهية وكتبنا

$$\mathrm{rg}((x_i)_{i\in I}) = \dim \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$$

3-2. **مبرهنة**. ليكن $u$ تطبيقاً خطياً بين فضاءَيْن شعاعيَّين $E$ و $F$. ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من $E$ رتبتها منتهية. عندئذ تكون رتبة الجماعة $(u(x_i))_{i\in I}$ منتهية أيضاً ويكون

$$\mathrm{rg}((u(x_i))_{i\in I}) \le \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$$

**الإثبات**

ليكن $G = \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$، ولنضع $r = \dim G = \mathrm{rg}((x_i)_{i\in I})$. نتأمّل التطبيق الخطّي $v$ مقصور $u$ على $G$؛ أي $v = u_{|G} \in \mathcal{L}(G,F)$. إنّ

$$\mathrm{Im}\, v = \mathrm{vect}((u(x_i))_{i\in I})$$

ومن ثَمّ

$$r = \dim G = \dim \ker v + \dim \mathrm{Im}\, v \ge \dim \mathrm{Im}\, v = \mathrm{rg}(u(x_i))_{i\in I})$$

وهي النتيجة المرجوة. ❐

3-3. **تعريف**. ليكن $u$ تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين $E$ و $F$. إذا كان بُعد $\operatorname{Im} u$ منتهياً قلنا إنّ **رتبة التطبيق الخطي** $u$ منتهية وكتبنا $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$.

نلاحظ، من جهة أولى، أنّه في حالة $\dim E < +\infty$ لدينا

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$$

وأنه، من جهة ثانية، إذا كان $\dim F < +\infty$ كان $\operatorname{rg} u \leq \dim F$. إذن

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \quad \operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$$

ونلاحظ أيضاً أنّه إذا كان بُعد كلّ من $E$ و $F$ منتهياً كان لدينا التكافؤان المهمّان الآتيان:

- ❄ $u$ متباين $\Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} u$.
- ❄ $u$ غامر $\Leftrightarrow \dim F = \operatorname{rg} u$.

4-3. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعيَّين بُعداهما منتهيان ويُحقّقان $\dim E = \dim F$. وليكن $u$ تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$. عندئذ تكون الخواص الآتية متُكافئة.

❶ $u$ غامر.

❷ $u$ متباين.

❸ $u$ تقابل.

❹ $n = \operatorname{rg} u$.

❺ $u$ قَلوبٌ من اليسار. (أي يوجد $v$ من $\mathcal{L}(F,E)$ يُحقّق $v \circ u = I_E$).

❻ $u$ قَلوب من اليمين. (أي يوجد $v$ من $\mathcal{L}(E,F)$ يُحقّق $u \circ v = I_F$).

**الإثبات**

الإثبات سهل ومتروك للقارئ. ❐

5-3. **مبرهنة**. لتكن $E$ و $F$ و $G$ ثلاثة فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $u \in \mathcal{L}(E,F)$ و $v \in \mathcal{L}(F,G)$. عندئذ

① $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

② إذا كان $u$ غامراً كان $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.

③ إذا كان $v$ متبايناً كان $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

**الإثبات**

① لدينا من جهة أولى $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u))$ ومن ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \operatorname{rg} u$ . ومن جهة ثانية $\operatorname{Im}(u) \subset F$ إذن $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ ومن ثَمّ $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \operatorname{rg} v$ .

② إذا كان $u$ غامراً كان $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ .

③ إذا كان $v$ متبايناً كان

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim v(\operatorname{Im}(u)) = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rg} u$$

وبذا يكتمل إثبات المبرهنة. ❐

### 3-6. ملاحظة عملية

لتعيين رتبة جملة أشعة $(a_1, \ldots, a_p)$ من فضاء شعاعي $E$ بُعده منتهٍ يساوي $n$، نكتب أولاً كلّ شعاع منها عبارةً خطيّةً بعناصر أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ للفضاء $E$ . ثُمّ نلاحظ أنّ الفضاء $\operatorname{vect}(a_1, \ldots, a_p)$ لا يتغيّر إذا ضُرِبَ أحد الأشعة $a_i$ بثابت مختلف عن 0، أو إذا أُضيف إلى أحد الأشعة $a_i$ تركيب خطي في بقية الأشعة $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p$ . لذلك نسعى للحصول على جملة $(b_1, \ldots, b_p)$ من أشعة تولّد الفضاء نفسه $\operatorname{vect}(a_1, \ldots, a_p)$ وتحوي مركّباتها على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ العديد من الأصفار. في الحقيقة، نسعى لأن يكون تمثيل الأشعة $b_1, \ldots, b_p$ على الأساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ من النمط التالي :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_p \\
\hline
e_1 & \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
e_2 & \times & \times & 0 & & \vdots \\
\vdots & \times & & \times & \ddots & \vdots \\
 & \vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & \times & & & & \times \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
e_n & \times & \times & \cdots & \cdots & \times
\end{array}$$

سنوضّح هذا الأسلوب في المثال الآتي، إذ نحسب رتبة الجملة $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ من $\mathbb{R}^5$ التي تُعطى مركّباتها على الأساس القانونيّ كما يأتي :

$$a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ و } a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نبيّن فيما يلي العمليات التي يمكن إجراؤها على هذه الأشعّة للحصول على الشكل السابق:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث $b_1 = a_3$ و $b_2 = a_1 + 2a_3$ و $b_3 = a_2 + 5a_3$ و $b_4 = a_4 - 2a_3$ . ثُمّ

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & b_2 & b_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث $c_3 = b_3 - b_2 - b_4 = -a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4$ . ثُمّ

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & b_2 & b_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & c_2 & c_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix} \end{array}$$

وقد عرّفنا

$$\begin{aligned} c_2 &= b_2 - 7c_3 = 8a_1 - 7a_2 - 33a_3 + 7a_4 \\ c_4 &= b_4 - 3c_3 = 3a_1 - 3a_2 - 17a_3 + 4a_4 \end{aligned}$$

ثُمّ

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & c_2 & c_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & c_3 & c_4 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث $d_2 = c_2 - 2c_4 = 0$، ولكن $d_2$ تساوي من جهة ثانية $2a_1 - a_2 + a_3 - a_4$. نستنتج أنّ $\mathrm{rg}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$ وأنه توجد علاقة ارتباط خطّي بين الأشعة $a_1$ و $a_2$ و $a_3$ و $a_4$ هي

$$d_2 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0 \, .$$

# تمرينات

**التمرين** 1. نتأمّل في $\mathbb{R}^3$ الأشعّة

$$u = (1,1,-1) \quad \text{و} \quad v = (-1,1,1) \quad \text{و} \quad w = (1,-1,1)$$

أثبت أنّ $(u,v,w)$ أساسٌ للفضاء $\mathbb{R}^3$، وأعطِ مركِّبات الشعاع $(2,1,3)$ على هذا الأساس.

**الحل**

يكفي أن نثبتَ أنّ كلَّ شعاع $(x,y,z)$ يُكتب بأسلوب وحيد عبارة خطّية بالأشعّة $u$ و $v$ و $w$.

ولكنّ المساواة $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$ حيث $(\alpha,\beta,\gamma)$ من $\mathbb{R}^3$ تُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \beta + \gamma \\ y &= \alpha + \beta - \gamma \\ z &= -\alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \beta + \gamma \\ y + x &= 2\alpha \\ z + x &= 2\gamma \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{y+z}{2}, \quad \gamma = \frac{z+x}{2}$$

ولمّا كانت هذه الصيغة تعرّف بأسلوبٍ وحيد الثلاثيّة $(\alpha,\beta,\gamma)$، استنتجنا أنّ $(u,v,w)$ أساسٌ للفضاء $\mathbb{R}^3$ وأنّ

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) = \frac{x+y}{2} u + \frac{y+z}{2} v + \frac{z+x}{2} w$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$(2,1,3) = \frac{3}{2} u + 2v + \frac{5}{2} w$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

**التمرين 2.** عيِّن رتبة جملة الأشعّة $\mathcal{F}$ من الفضاء الشعاعي $E$ في كلٍّ من الحالات الآتية :

① الجملة $\mathcal{F} = \big((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0)\big)$ في $\mathbb{R}^4$ .

② الجملة $\mathcal{F} = \big(X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\big)$ في $\mathbb{C}[X]$ .

③ الجملة $\mathcal{F} = \big(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\big)$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ المعطاة بالعلاقات

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z,t) &= x+z\\
\varphi_2(x,y,z,t) &= -x+2y\\
\varphi_3(x,y,z,t) &= x+y-z+t\\
\varphi_4(x,y,z,t) &= y+t
\end{aligned}$$

**الحل**

① لنلاحظ أنّ $\mathcal{F} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ حيث

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1,0,1,0), & a_2 &= (1,1,0,0)\\
a_3 &= (-1,-1,1,0), & a_4 &= (0,0,2,0)
\end{aligned}$$

ليكن $V = \operatorname{vect}(\mathcal{F})$ . عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
e_1 &= a_1 - \tfrac{1}{2}a_4 &&= (1,0,0,0) \in V\\
e_2 &= a_2 - e_1 &&= (0,1,0,0) \in V\\
e_3 &= \tfrac{1}{2}a_4 &&= (0,0,1,0) \in V
\end{aligned}$$

وأخيراً نُلاحظ أنّ $a_4 = 2a_2 + 2a_3$ . إذن

$$\operatorname{vect}(e_1,e_2,e_3) \subset V \subset \operatorname{vect}(a_1,a_2,a_3)$$

ولأنّ الجملة $(e_1,e_2,e_3)$ مستقلّة خطيّاً وضوحاً، استنتجنا أنّ $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim V = 3$ .

② لنلاحظ أنّ $\mathcal{F} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ حيث

$$\begin{aligned}
a_1 &= X^2+X+1, & a_2 &= X^2+3X+1\\
a_3 &= 2X, & a_4 &= X^3+3
\end{aligned}$$

وليكن $V = \operatorname{vect}(\mathcal{F})$ . عندئذ نلاحظ أنّ $a_2 = a_1 + a_3$ ، إذن

$$V = \operatorname{vect}(a_1,a_3,a_4)$$

ولكنّ الأشعّة $(a_1,a_3,a_4)$ مستقلّة خطيّاً بسبب اختلاف درجاتها مثنى مثنى. إذن

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim V = 3$$

③ لنتأمّل الأساس $\mathcal{E}=(e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*)$ للفضاء $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$ المعرّف كما يأتي :

$$e_1^*(x,y,z,t)=x \qquad e_2^*(x,y,z,t)=y$$
$$e_3^*(x,y,z,t)=z \qquad e_4^*(x,y,z,t)=t$$

عندئذ تُعطى مركّبات $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ على الأساس $\mathcal{E}=(e_1^*,e_2^*,e_3^*,e_4^*)$ كما يأتي:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ولكن، بإجراء تحويلات بسيطة على هذه الأشعّة، نجد

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-C_1]{C_2\leftarrow C_2+C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4\rightleftarrows C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-2C_2]{C_3\leftarrow C_3-C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3\leftarrow \frac{-1}{2}C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4\leftarrow C_4-C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

وقد رمزنا بالرمز $C_k$ للدلالة على العمود ذي الدليل $k$. وهذا يثبتُ أنّ الجملة $\mathcal{F}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ مستقلّة خطيّاً، أي إنّ $\operatorname{rg}(\mathcal{F})=\dim V=4$. ■

**التمرين** 3. ليكن $F$ و $G$ فضاءَين شعاعيّين جزئيّين من $\mathbb{R}^5$، بُعد كلٍّ منهما يساوي 3. أثبت أنّ $F\cap G\neq\{0\}$.

**الحل**

في الحقيقة، لدينا $F+G\subset\mathbb{R}^5$، إذن $\dim(F+G)\leq 5$، ولكن إذا كان $F\cap G=\{0\}$ كان

$$F+G=F\oplus G$$

ومن ثمّ $\dim(F+G)=\dim F+\dim G=6$ وهذا خُلفٌ واضحٌ. ■

**التمرين 4.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ بُعده يساوي 3. وليكن $u$ تطبيقاً خطيّاً يُحقِّق $u^2\neq 0$ و $u^3=0$. جِدْ التطبيقات الخطّية $f$ من $\mathcal{L}(E)$ التي تُحقّق $f\circ u=u\circ f$.

**الحل**

لمّا كان $u^2\neq 0$ استنتجنا أنّه يوجد عنصرٌ $a$ في $E$ يُحقّق $u^2(a)\neq 0$. وعندئذ نتأمّل الجملة $\mathcal{E}$ من $E$ المعرّفة كما يأتي $\mathcal{E}=(a,u(a),u^2(a))$.

- في الحقيقة، إنّ الجملة $\mathcal{E}$ حرّة، لأنّه إذا افترضنا أنّ

$$\lambda a+\mu u(a)+\nu u^2(a)=0$$

استنتجنا، بتطبيق $u$ ثُمّ $u^2$ على طرفي هذه المساواة، أنّ

$$\lambda u(a)+\mu u^2(a)=0 \quad \text{و} \quad \lambda u^2(a)=0$$

ولأنّ $u^2(a)\neq 0$، نستنتج على التوالي أنّ $\lambda=0$ ثُمّ $\mu=0$ ثُمّ $\nu=0$.

- ولكن $\dim E=3$، إذن تكوّن الجملة $\mathcal{E}=(a,u(a),u^2(a))$ أساساً للفضاء $E$.

- ليكن $f$ تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق $f\circ u=u\circ f$. لمّا كان $f(a)$ عنصراً من $E$ وجدنا أعداداً $\lambda_0$ و $\lambda_1$ و $\lambda_2$ تُحقّق

$$f(a)=\lambda_0 a+\lambda_1 u(a)+\lambda_2 u^2(a)$$

وعندئذ يكون لدينا

$$f(u(a))=u(f(a))=\lambda_0 u(a)+\lambda_1 u^2(a)$$

و

$$f(u^2(a))=u(f(u(a)))=\lambda_0 u^2(a)$$

هذا يثبت أنّ التطبيق الخطّي $g = f - \lambda_0 I_E - \lambda_1 u - \lambda_2 u^2$ ينعدم عند عناصر الأساس $\mathcal{E}$ فهو إذن يساوي $0$، أي

$$f \in \operatorname{vect}(I_E, u, u^2)$$

وبالعكس، من الواضح أنّ كلَّ عنصرٍ من $\operatorname{vect}(I_E, u, u^2)$ يتبادل مع $u$ وهذا ما يثبتُ أنّ

$$\operatorname{vect}(I_E, u, u^2) = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) : f \circ u = u \circ f \right\}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

**التمرين 5.** ليكن $E = \mathbb{R}^4$. ولنتأمّل في $E$ الأشعة :

$$\begin{aligned} a &= (1,2,3,4), & b &= (1,1,1,3), & c &= (2,1,1,1) \\ d &= (-1,0,-1,2), & e &= (2,3,0,1) \end{aligned}$$

وليكن الفضاءين الجزئيين :

$$V = \operatorname{vect}(d,e) \quad \text{و} \quad U = \operatorname{vect}(a,b,c)$$

احسب بُعد كلٍّ من $U$ و $V$ و $U \cap V$ و $U + V$.

**الحل**

- نلاحظ أوّلاً أنّ كلاًّ من الجملتين $(a,b,c)$ و $(d,e)$ جملةٌ حرّة. وهذا يثبتُ أنّ

$$\dim V = 2 \quad \text{و} \quad \dim U = 3$$

- ومن جهة أخرى ينتمي الشعاع $(x,y,z,t)$ إلى $U$ إذا وفقط إذا وُجِدت أعداد $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ تُحقّق المساواة $(x,y,z,t) = \alpha a + \beta b + \gamma c$، وهذه المساواة تُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y &= 2\alpha + \beta + \gamma \\ z &= 3\alpha + \beta + \gamma \\ t &= 4\alpha + 3\beta + \gamma \end{aligned}$$

أو

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y - 2x &= -\beta - 3\gamma \\ z - 3x &= -2\beta - 5\gamma \\ t - 4x &= -\beta - 7\gamma \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + 2\gamma \\ y - 2x &= -\beta - 3\gamma \\ z - 3x - 2(y - 2x) &= \gamma \\ t - 4x - (y - 2x) &= -4\gamma \end{aligned}\right.$$

وأخيراً

$$\begin{aligned} x &= 2\gamma + \beta + \alpha \\ -y + 2x &= 3\gamma + \beta \\ z - 2y + x &= \ \gamma \\ t + 4z - 9y + 2x &= 0 \end{aligned}$$

وعليه

$$(x, y, z, t) \in U \Leftrightarrow 2x - 9y + 4z + t = 0$$

- لمّا كان $V \subset U \cap V$ استنتجنا أنّ $\dim U \cap V \leq 2$.
  - فإذا كان $\dim U \cap V = 0$ كان $U \cap V = \{0\}$، ونتج من ذلك أنّ المجموع $U + V$ مباشرٌ، ومن ثَمّ

    $$\begin{aligned} \dim(U + V) &= \dim U \oplus V \\ &= \dim U + \dim V = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

    وهذا يناقض كون الفضاء $U + V$ محتوى في $\mathbb{R}^4$ الذي بُعده 4.
  - وإذا كان $\dim U \cap V = 2 = \dim V$ كان $U \cap V = V$ أو $V \subset U$. ولكن نتيقّن بسهولة أنّ $d \not\in U$، وهذا تناقضٌ أيضاً. إذن يجب أن يكون $\dim U \cap V = 1$.
- لمّا كان $\dim U \cap V < \dim V$ استنتجنا أنّ $V \not\subset U$، ومن ثَمّ $U \subsetneq U + V$ إذن لا بُدّ أن يكون

$$3 = \dim U < \dim U + V \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

ومنه $\dim U + V = 4$. ■

**التمرين 6.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده $n$. وليكن $f$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E)$، و $x$ عنصراً من $E \backslash \{0\}$. نفترض أن الجملة $\mathcal{E} = (f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$ أساس للفضاء $E$. أثبت أن $f$ تقابلٌ، وأنه يوجد $(a_1, \ldots, a_n)$ في $\mathbb{K}^n$ يُحقّق

$$f^n + a_n f^{n-1} + \cdots + a_1 I_E = 0$$

**الحل**

لمّا كانت صورة هذه الجملة وفق التطبيق الخطّي $f$ حرّة، استنتجنا أنها نفسها حرّة. فهي أساسٌ للفضاء $E$ لأنّ بُعده يساوي $n$. ولمّا كان الشعاع $f^n(x)$ عنصراً من $E$ أمكن تحليله على الأساس $\mathcal{E}$، أي توجد أعداد $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ في $\mathbb{K}$ تُحقّق

$$f^n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k(x)$$

ونستنتج من ذلك، بتطبيق $f^j$ على طرفَي العلاقة السابقة، أنّ

$$\forall j \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \quad f^n(f^j(x)) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k(f^j(x))$$

وهذا يبرهن أنّ التطبيق الخطّي $g = f + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k$ ينعدم عند عناصر الأساس $\mathcal{E}$. وفهو إذن معدوم أي إنّ $f + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} f^k = 0$، وهي النتيجة المرجوّة. ■

**التمرين** 7. ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $V$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$ وكذلك ليكن $W$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $F$. نعرّف $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ بأنّها المجموعة :

$$\mathcal{L}_{V,W}(E,F) = \left\{u \in \mathcal{L}(E,F) : V \subset \ker u, \quad \operatorname{Im} u \subset W\right\}$$

أثبت أنَّ $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ فضاءٌ شعاعيّ جزئي من $\mathcal{L}(E,F)$ يُشاكِل تقابلياً الفضاء $\mathcal{L}(E/V,W)$. ماذا يمكن أن نقول عن بُعد $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$، إذا كان كل من $\dim W$ و $\operatorname{codim} V$ منتهياً ؟

**الحل**

- من الواضح أنّ $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ فضاءٌ جزئي من $\mathcal{L}(E,F)$.
- ليكن $i : W \to F, x \mapsto x$ التباين القانوني، و $Q : E \to E/V, x \mapsto [x]$ الغمر القانوني. ثُمّ لنعرّف التطبيق الخطّي:

$$\varphi : \mathcal{L}(E/V,W) \to \mathcal{L}_{V,W}(E,F), u \mapsto i \circ u \circ Q$$

- إنّ التطبيق $\varphi$ متباينٌ.

في الحقيقة، إذا كان $u$ عنصراً من $\ker\varphi$ كان $i\circ u\circ Q=0$، ولأنّ $Q$ غامرٌ و $i$ متباينٌ استنتجنا أنّ $u=0$ . أي $\ker\varphi=\{0\}$ .

- وكذلك فإنّ التطبيق $\varphi$ غامرٌ.

في الحقيقة، ليكن $v$ عنصراً من $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$، وليكن $A$ صفَّ تكافؤ ما من $E/V$ . عندئذ تتكون المجموعة $v(A)$ من عنصرٍ واحدٍ ينتمي إلى $W$ . لإثبات ذلك، نتأمّل عنصراً $a$ من $A$ فيكون $A=[a]$ ، عندئذ ينتمي $v(a)$ إلى $v(A)$ . وإذا كان $y$ عنصراً ما من $v(A)$ وُجِدَ $x$ في $A$ يُحقّق $y=v(x)$ . ولكن

$$y-v(a)=v(x-a)=0$$

لأنّ انتماء كلٍّ من $a$ و $x$ إلى صفّ التكافؤ $A$ نفسه يعني أنّ

$$x-a\in V\subset\ker v$$

إذن $v(A)=\{v(a)\}$ حيث $a$ هو عنصرٌ ما من $A$ . لنعرّف إذن في حالة $A$ من $E/V$ العنصر $u(A)$ من $W$ بالعلاقة $v(A)=\{u(A)\}$ ، عندئذ نتيقّن بتحقّق مباشر أنّ $u$ تطبيق خطّي من $E/V$ إلى $W$ يُحقّق $\varphi(u)=v$ .

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\varphi$ تشاكل تقابلي خطّي من $\mathcal{L}_{V,W}(E,F)$ إلى $\mathcal{L}(E/V,W)$ . فإذا كان بُعد $W$ وتمام بُعد $V$ منتهيين، كان

$$\dim\mathcal{L}(E/V,W)=\dim E/V\cdot\dim W=\operatorname{codim}_E V\cdot\dim W$$

ومن ثَمّ

$$\dim\mathcal{L}_{V,W}(E,F)=\operatorname{codim}_E V\cdot\dim W$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

**التمرين** 8. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ . وليكن $E_1$ و $E_2$ فضاءين شعاعيين جزئيين من $E$ . نفترض أن بُعد $E_1+E_2$ منتهٍ. أثبت أنّ

$$\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim E_1\cap E_2$$

ثُم أثبت أنّ :

$$\big(\dim E_1+\dim E_2>\dim E\big)\Rightarrow\big(E_1\cap E_2\neq\{0\}\big)$$

**الحل**

لنتأمّل التطبيق الخطّي $\varphi : E_1 \times E_2 \to E, (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ . عندئذ نلاحظ من جهة أولى أنّ $\operatorname{Im}\varphi = E_1 + E_2$ ، ونلاحظ من جهة ثانية أنّ

$$\ker\varphi = \{(x,x) : x \in E_1 \cap E_2\} \cong E_1 \cap E_2$$

إذن نستنتج من كون

$$\dim E_1 \times E_2 = \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi$$

أنّ

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim E_1 \cap E_2$$

وهي المساواة المطلوبة. أمّا الاستنتاج الأخير فهو واضح استناداً إلى المساواة السابقة. ■

**التمرين 9.** لتكن $E$ و $F$ و $G$ ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل $\mathbb{K}$ .

① نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(F,G)$ . أثبت أن

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \le \operatorname{rg}(g \circ f) \le \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big)$$

② نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(E,F)$ . أثبت أن

$$\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\big| \le \operatorname{rg}(g+f) \le \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

**الحل**

① نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(F,G)$ .

- نلاحظ أوّلاً أنّ $\operatorname{Im} f \subset F$ ، يقتضي أنّ $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ ومن ثمّ

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \le \operatorname{rg}(g)$$

- وإذا تأمّلنا التطبيق الخطي

$$\tilde{g} : \operatorname{Im} f \to G, x \mapsto g(x)$$

ولأنّ $\operatorname{Im}\tilde{g} = \operatorname{Im} g \circ f$ كان

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim\ker\tilde{g} + \dim\operatorname{Im}\tilde{g}$$

استنتجنا أنّ $\dim\operatorname{Im}\tilde{g} \le \dim\operatorname{Im} f$ أي $\operatorname{rg}(g \circ f) \le \operatorname{rg}(f)$ ، ومنه المتراجحة:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \le \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big)$$

■ في الحقيقة، لدينا

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\ker\tilde{g} + \operatorname{rg}(g\circ f)$$

ولكن $\ker\tilde{g} = \operatorname{Im} f \cap \ker g$ ومن ثمّ

$$\dim\ker\tilde{g} \leq \dim\ker g = \dim F - \operatorname{rg}(g)$$

إذن

$$\operatorname{rg}(f) \leq \dim F - \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(g\circ f)$$

فنكون بذلك قد أثبتنا صحّة المتراجحة

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \leq \operatorname{rg}(g\circ f) \leq \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big)$$

② نفترض أنّ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ و $g \in \mathcal{L}(E,F)$.

■ نستنتج من الاحتواء $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ أنّ

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

■ كما نستنتج من كون $f = f+g-g$ و $g = f+g-f$ أنّ

$$\operatorname{rg}(f) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{و} \quad \operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(f)$$

ومن ثمّ نكون قد أثبتنا أنّ

$$\big|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)\big| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

**التمرين 10.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، بُعده $n$. وليكن $E_1$ و $E_2$ فضاءين شعاعيين جزئيين من $E$ يحقّقان $\dim E_1 = \dim E_2 = n-p$. أثبت أنه يوجد فضاء شعاعي جزئي $F$ يحقّق $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$.

## الحل

■ لنذكّر بالخاصّة المعروفة الآتية : ليكن $H$ و $G$ فضاءَين جزئيّين من $E$. عندئذ يكون $F\cup G$ فضاءً جزئيّاً من $E$ إذا وفقط إذا كان $F \subset G$ أو $G \subset F$. في الحقيقة، إنّ كفاية هذا الشرط واضحة، لنثبت إذن لزومه. نفترض أنّ $F\cup G$ فضاء جزئي من $E$، وأنّ $F \not\subset G$، فيوجد عنصرٌ $b$ ينتمي إلى $F$ ولا ينتمي إلى $G$. ليكن $x$ عنصراً ما من $G$. لمّا كان

$F \cup G$ فضاءً جزئيّاً كان $x+b$ عنصراً من $F \cup G$ . فإمّا أن يكون $x+b \in G$ ومن ثَمّ $b = x+b-x \in G$ وهذا خُلفٌ، أو أن يكون $x+b \in F$ ومن ثَمّ $x = x+b-b \in F$ ، فنكون قد أثبتنا أنّ $G \subset F$ ، وتمّ إثبات الخاصة المشار إليها.

- ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ ، بُعده $n$ . نتأمّل في حالة $p$ من $\{0,1,\ldots,n\}$ الخاصّة $\mathbb{P}_p$ الآتية:

| |
|---|
| أيّاً كان الفضاءان الجزئيّان $E_1$ و $E_2$ من $E$ اللذان يُحقّقان $$\dim E_1 = \dim E_2 = n-p$$ فيوجد فضاءٌ جزئيٌ $F$ من $E$ يُحقّق $$E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$$ |

سنثبتُ صحّة $\mathbb{P}_p$ بالتدريج على العدد $p$ .

- في الحقيقة، $\mathbb{P}_0$ صحيحة وضوحاً. إذ نأخذ $F = \{0\}$ لأنّ $E_1 = E_2 = E$ في هذه الحالة.
- ليكن $k$ عدداً طبيعيّاً يُحقّق $1 \leq k \leq n$ ، ولنفترض صحّة $\mathbb{P}_{k-1}$ . ولنتأمّل فضاءَيْن جزئيَّيْن $E_1$ و $E_2$ من $E$ يُحقّقان $\dim E_1 = \dim E_2 = n-k$ .

  إذا كان $E_1 \subset E_2$ أو $E_2 \subset E_1$ كان $E_1 = E_2$ ، لأنّ $\dim E_1 = \dim E_2$ ، وفي هذه الحالة يكفي أن نختار $F$ فضاءً يتمّم $E_1$ ليتحقق $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$ .

  أمّا إذا كان $E_2 \not\subset E_1$ و $E_1 \not\subset E_2$ ، فعندئذ لا تكوّن المجموعة $E_1 \cup E_2$ فضاءً جزئيّاً من $E$ ، ومن ثَمّ يكون $E_1 \cup E_2 \subsetneq E$ ، نختار إذن عنصراً $a$ من $E \backslash (E_1 \cup E_2)$ ، ونعرّف

$$E_2' = E_2 \oplus \mathbb{K}a \quad \text{و} \quad E_1' = E_1 \oplus \mathbb{K}a$$

  فيكون $\dim E_1' = \dim E_2' = n-k+1 = n-(k-1)$ . ويوجد، بناءً على فرْض التدريج، فضاء جزئي $F'$ يُحقّق $E = F' \oplus E_1' = F' \oplus E_2'$ . وعندئذ نعرّف $F = F' \oplus \mathbb{K}a$ . فيكون $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$ ، وبذا نكون قد أثبتنا صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$ .

وهكذا يكتمل إثبات النتيجة المطلوبة بالتدريج. ■

**التمرين** 11. لتكن $n$ من $\mathbb{N}^*$، وليكن $E = \mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجة كل منها على $n$. وليكن $u$ من $\mathcal{L}(E)$ التطبيق الخطّي المعرّف بالعلاقة :

$$u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

① تحقّق أنّ $u$ خطّي، وعيّن $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ و $\operatorname{rg} u$.

② ليكن $Q$ من $\operatorname{Im} u$ أثبت أنه يوجد في $E$ كثير حدود وحيد $P$ يُحقّق الشروط :

$$u(P) = Q \quad \text{و} \quad P(0) = P'(0) = 0$$

## الحل

① ليكن $P$ عنصراً من $\ker u$، ولنعرّف

$$Q(X) = P(X) - P(0) - \big(P(1) - P(0)\big)X$$

فيكون $Q(0) = Q(1) = 0$، كما نلاحظ أنّ $u(Q) = 0$ لأنّ $u(P) = 0$. وعليه

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Q(k+1) - Q(k) = Q(k) - Q(k-1)$$

وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج أنّ $\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q(k+1) - Q(k) = 0$. فالمتتالية $\big(Q(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة، ولمّا كان $Q(0) = 0$ استنتجنا أنّ $\forall k \in \mathbb{N}, Q(k) = 0$. ولا يمكن لكثير الحدود $Q$ أن يقبل عدداً لانهائياً من الجذور ما لم يكن صفرياً. إذن $Q = 0$ أو $P = P(0) - \big(P(1) - P(0)\big)X$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\ker u \subset \mathbb{R}_1[X]$. أمّا الاحتواء المُعاكس فهو صحيح وضوحاً. إذن

$$\ker u = \mathbb{R}_1[X]$$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّه في حالة $k \geq 2$ لدينا

$$\begin{aligned} u(X^k) &= (X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-2} \Big(1 + (-1)^{k-\ell}\Big) C_k^\ell X^\ell \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\deg u(X^k) \leq k-2$ في حالة $k$ من $\mathbb{N}$. إذن $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$، ولكن

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} u &= \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker u \\ &= n+1-2 = n-1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X] \end{aligned}$$

إذن $\operatorname{rg} u = n-1$ و $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

② ليكن $G = X^2\mathbb{R}_{n-2}[X]$ . إنّ $G$ فضاء شعاعي جزئي من $E$ بُعده $n-1$ . ولنتأمّل

$$\varphi : G \to \mathbb{R}_{n-2}[X], P \mapsto u(P)$$

لمّا كان من الواضح أنّ $\ker \varphi = G \cap \ker u = \{0\}$ ، استنتجنا أنّ $\varphi$ متباينٌ، وهو من ثَمّ تقابل لأنّ $\dim G = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$ ، وعليه نرى أنّه مهما يكن $Q$ من $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ فيوجد كثير حدود وحيد $P$ يُحقّق $u(P) = Q$ بالإضافة إلى الشرطين $P(0) = P'(0) = 0$ ، (أي $P \in G$)، وهكذا يكتمل الحل. ■

**التمرين 12.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ . نفترض أنّ $n = \dim E$ . وليكن $u$ عنصراً من $\mathcal{L}(E)$ . أثبت أنّ

$$\ker u = \operatorname{Im} u \Leftrightarrow (u^2 = 0) \wedge (n = 2\operatorname{rg} u)$$

**الحل**

① لنفترض أنّ $\ker u = \operatorname{Im} u$ . عندئذ من الواضح أنّ $u^2 = 0$ ، كما نستنتج من العلاقة

$$n = \dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

أنّ $n = 2\operatorname{rg} u$ .

② وبالعكس، لنفترض أنّ $u^2 = 0$ وأنّ $n = 2\operatorname{rg} u$ . عندئذ نستنتج من $u^2 = 0$ أنّ

$$\forall x \in E, \quad u(x) \in \ker u$$

أي إنّ $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ . ولكن $\dim \operatorname{Im} u + \dim \ker u = \dim E = n$ إذن

$$\operatorname{rg} u + \dim \ker u = 2\operatorname{rg} u$$

ومن ثَمّ

$$\dim \ker u = \dim \operatorname{Im} u$$

إذن يجب أن يكون $\operatorname{Im} u = \ker u$ . ■

**التمرين 13.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ . وليكن $u$ و $v$ عنصرين من $\mathcal{L}(E)$ . نفترض أنّ

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$$

أثبت أنّ

$$E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \ker u \oplus \ker v$$

**الحل**

لنضع $n = \dim E$، ولنستفد من الخواص الآتية:

$$n = \operatorname{rg} u + \dim \ker u$$
$$n = \operatorname{rg} v + \dim \ker v$$
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

عندئذ نستنتج من الفرْض $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$ أنّ

$$n = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$$
$$n = n - \operatorname{rg} u + n - \operatorname{rg} v - \dim(\ker u \cap \ker v)$$

وبجمع هاتين المساواتين نجد

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) + \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

إذن

$$\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\} \quad \text{و} \quad \ker u \cap \ker v = \{0\}$$

وهذا يثبتُ المطلوب. ■

**التمرين 14.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن العنصران $u$ و $v$ من $\mathcal{L}(E)$. نفترض أنّ $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$، أثبت أنّ $u$ و $v$ يتبادلان أي $u \circ v = v \circ u$.

**الحل**

في الحقيقة، نستنتج من المساواة $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$ أنّ

$$u \circ v = u^2 + 2u - I_E$$

وكذلك أنّ

$$u \circ (u - v + 2I_E) = I_E$$

إذن $u$ قلوبٌ ومقلوبه هو التطبيق $u - v + 2I_E$ وعليه يكون

$$(u - v + 2I_E) \circ u = I_E$$

ومن ثَمّ $u^2 - v \circ u + 2u = I_E$ أو $v \circ u = u^2 + 2u - I_E = u \circ v$. فالتطبيقان الخطيّان $u$ و $v$ يتبادلان. ■

**التمرين** 15. ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعيين على حقل $\mathbb{K}$. نفترض أن $\dim E = n$.
ليكن $u$ عنصراً من $\mathcal{L}(E,F)$. أثبت أنّه

① أيّاً كان الفضاء الشعاعي الجزئي $G$ من $E$ لدينا

$$\dim u(G) = \dim G - \dim G \cap \ker u$$

② أيّاً كان الفضاء الشعاعي الجزئي $H$ من $F$ لدينا

$$\dim u^{-1}(H) = n + \dim H \cap u(E) - \operatorname{rg} u$$

**الحل**

① في الحقيقة، نتأمّل التطبيق $\tilde{u} : G \to F, x \mapsto u(x)$. فنلاحظ من جهة أولى أنّ $\operatorname{Im} \tilde{u} = u(G)$ وأنّه من جهة ثانية $\ker \tilde{u} = G \cap \ker u$. فإذا استفدنا من المساواة $\dim G = \operatorname{rg} \tilde{u} + \dim \ker \tilde{u}$ استنتجنا أنّ

$$\dim u(G) = \dim G - \dim G \cap \ker u.$$

② هنا أيضاً نتأمّل التطبيق $\tilde{u} : u^{-1}(H) \to F, x \mapsto u(x)$. فنلاحظ أنّ $\operatorname{Im} \tilde{u} = H \cap u(E)$ وأنّه من جهة ثانية $\ker \tilde{u} = \ker u$. فإذا استفدنا من المساواة $\dim u^{-1}(H) = \operatorname{rg} \tilde{u} + \dim \ker \tilde{u}$ استنتجنا أنّ

$$\dim u^{-1}(H) = \dim H \cap u(E) + n - \operatorname{rg} u. \qquad \blacksquare$$

**التمرين** 16. ليكن $(a,b)$ عنصراً من $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. ولنتأمّل المجموعة

$$\mathbb{S} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$$

① أثبت أنّ $\mathbb{S}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ بُعده يساوي 2.

② نفترض أنّ المعادلة $X^2 - aX - b = 0$ تقبل جذرين مختلفين $\lambda_1$ و $\lambda_2$. أثبت أنّ الجملة $\left( (\lambda_1^n)_{n\geq 0}, (\lambda_2^n)_{n\geq 0} \right)$ تكوّن أساساً للفضاء $\mathbb{S}$.

③ نفترض أنّ المعادلة $X^2 - aX - b = 0$ تقبل جذراً مضاعفاً $\lambda$. أثبت أنّه في هذه الحالة تكوّن الجملة $\left( (n\,\lambda^n)_{n\geq 0}, (\lambda^n)_{n\geq 0} \right)$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$.

④ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية **فيبوناتشي** Fibonacci المعرّفة تدريجياً كما يأتي:

$$\forall n \geq 0, \;\; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \;\; \text{و} \;\; x_1 = 1, \;\; x_0 = 1$$

احسب $x_n$ بدلالة $n$.

## الحل

① نترك أمر التيقُّن من كون $\mathbb{S}$ فضاءً جزئيّاً من $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ للقارئ. لنتأمّل في $\mathbb{S}$ المتتاليتين $\mathfrak{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\mathfrak{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين كما يأتي:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n$$
$$B_0 = 0, \quad B_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+2} = aB_{n+1} + bB_n$$

من الواضح أنّ الجملة $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ حرّة لأنّ $\left(\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}\right)_0 = \lambda$ و $\left(\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}\right)_1 = \mu$.
فإذا كانت العبارة الخطية $\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}$ معدومة كان $\lambda = \mu = 0$.

ومن جهة أخرى، إذا كانت $\mathfrak{U} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathbb{S}$، أثبتنا بالتدريج على العدد $n$ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0A_n + u_1B_n$$

ومن ثَمّ $\mathfrak{U} = u_0\mathfrak{A} + u_1\mathfrak{B}$.
إذن تكوّن الجملة $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$، و $\dim \mathbb{S} = 2$.

② لنبحث متى تنتمي المتتالية الهندسيّة $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $\mathbb{S}$؟ في الحقيقة، تتحقّق العلاقة التدريجيّة إذا وفقط إذا كان $\lambda^2 = a\lambda + b$، أي إذا وفقط إذا كان $\lambda \in \{\lambda_1,\lambda_2\}$. إذن تنتمي المتتاليتان $(\lambda_1^n)_{n\geq 0}$ و $(\lambda_2^n)_{n\geq 0}$ إلى $\mathbb{S}$. أمّا الجملة $\left((\lambda_1^n)_{n\geq 0},(\lambda_2^n)_{n\geq 0}\right)$ فهي جملة مستقلّة خطيّاً، لأنّه إذا كانت العبارة الخطيّة $\alpha(\lambda_1^n)_{n\geq 0} + \beta(\lambda_2^n)_{n\geq 0}$ معدومة، استنتجنا، بملاحظة الدليلين $n = 0$ و $n = 1$ فقط، أنّ

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha + \beta = 0$$

وهذا يقتضي $\alpha = \beta = 0$ لأنّ $\lambda_1 \neq \lambda_2$. وعلى هذا تكوّن الجملة $((\lambda_1^n)_{n\geq 0},(\lambda_2^n)_{n\geq 0})$ أساساً للفضاء $\mathbb{S}$ الذي بُعده يساوي $2$.

③ نفترض في هذه الفقرة أنّ $\lambda$ جذرٌ مضاعف للمعادلة $X^2 - aX - b = 0$. عندئذ نعلم استناداً إلى السؤال السابق أنّ المتتالية $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathbb{S}$، وكذلك إذا عرّفنا $v_n = n\lambda^n$ عندئذ يكون

$$\begin{aligned} v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n &= \lambda^n((n+2)\lambda^2 - a(n+1)\lambda - nb) \\ &= \lambda^n(n(\lambda^2 - a\lambda - b) + \lambda(2\lambda - a)) = 0 \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ المتتالية $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي أيضاً إلى $\mathbb{S}$. ونتيقَّن بسهولة أنّ الجملة $((\lambda_1^n)_{n\geq 0},(\lambda_2^n)_{n\geq 0})$ جملة حرّة، فهي إذن أساسٌ للفضاء $\mathbb{S}$ في هذه الحالة.

④ نلاحظ في هذا المثال أنّ $a = b = 1$، وللمعادلة $X^2 - X - 1 = 0$ جذران مختلفان هما

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-1}{\omega} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

إذن

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha\omega^n + \beta(-1/\omega)^n)_{n\in\mathbb{N}} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

نعيِّن الثابتين $\alpha$ و $\beta$ ليتحقَّق الشرطان

$$\begin{aligned} \alpha\omega^0 + \beta(-1/\omega)^0 &= x_0 = 1 \\ \alpha\omega^1 + \beta(-1/\omega)^1 &= x_1 = 1 \end{aligned}$$

فنجد أنّ

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{\omega\sqrt{5}}$$

وعليه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \omega^{n+1} - \left( \frac{-1}{\omega} \right)^{n+1} \right)$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}} \left( \left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1} \right)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

**التمرين** 17. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين منتهيَي البُعد على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $f$ و $g$ تطبيقين خطيين من $\mathcal{L}(E, F)$ و $\mathcal{L}(F, E)$ على التوالي. نفترض أنّ

$$g \circ f \circ g = g \quad \text{و} \quad f \circ g \circ f = f$$

① أثبت أن $E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$.

② قارن بين $\operatorname{rg} f$ و $\operatorname{rg} g$.

## الحل

① ليكن $y$ عنصراً من $\operatorname{Im} g \cap \ker f$ عندئذ $f(y) = 0$ ، ويوجد عنصرٌ $x$ في $F$ يُحقّق $y = g(x)$ . ولكن

$$y = g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = g(0) = 0$$

إذن لقد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} g \cap \ker f = 0$ .

ومن جهة أخرى، إذا كان $x$ عنصراً من $E$ عرّفنا

$$x_1 = g \circ f(x) \text{ و } x_2 = x - g \circ f(x)$$

عندئذ من الواضح أنّ $x_1 \in \operatorname{Im} g$ ، و إنّ $f(x_2) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = 0$ إذن $x_2 \in \ker f$ . وأخيراً، $x = x_1 + x_2$ . إذن $E \subset \operatorname{Im} g + \ker f$ . وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$$

② نستنتج من المساواة السابقة أنّ

$$\dim E = \operatorname{rg} g + \dim \ker f$$

ونعلم من جهة أخرى أنّ $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \ker f$ ، إذن $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ . ■

**التمرين** 18. ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $\mathbb{K}$ . وليكن التطبيق الخطّي $u$ من $\mathcal{L}(E)$ . نصطلح أنّ $u^0 = I_E$ ، ونعرّف في حالة $k$ من $\mathbb{N}^*$ التطبيق الخطّي $u^k$ بالعلاقة $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k}$ . كما نعرّف

$$N_k = \ker u^k \quad \text{و} \quad I_k = \operatorname{Im} u^k \quad \text{و} \quad \delta_k = \dim N_k$$

① أثبت أنّه، في حالة $k$ من $\mathbb{N}$ ، يتحقّق الاحتواءان $I_{k+1} \subset I_k$ و $N_k \subset N_{k+1}$ .

② أثبت أنّه يوجد $r$ في $\mathbb{N}$ يُحقّق $\delta_{r+1} = \delta_r$ . نعرّف إذن

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} : \delta_{k+1} = \delta_k\}$$

③ أثبت أنّه، أيّاً كان $k \geq p$ ، فلدينا $I_k = I_p$ و $N_k = N_p$ .

④ أثبت أنّ $p \leq \dim E$ .

⑤ وأخيراً أثبت أنّ $E = N_p \oplus I_p$ .

## الحل

① ليكن $y$ عنصراً من $I_{k+1}$، عندئذ نجد $x$ من $E$ يُحقِّق $y = u^{k+1}(x)$ ويكون من ثَمّ

$$y = u^k(u(x)) \in I_k$$

وعليه $I_{k+1} \subset I_k$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $N_k \subset N_{k+1}$.

② لنضع $n = \dim E$. ولنتأمّل التابع

$$\delta : \mathbb{N} \to \{0,1,\ldots,n\}, k \mapsto \delta_k = \dim N_k$$

استناداً إلى الخاصّة $N_k \subset N_{k+1}$ أيّاً كانت $k$، نستنتج أنّ التابع $\delta$ تابعٌ متزايدٌ، وهو لا يمكن أن يكون متزايداً تماماً، وإلاّ كانت المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$ غير منتهية، فلا بُدّ أن نجد عدداً $r$ يُحقّق $\delta_r = \delta_{r+1}$. وعليه نعرّف

$$p = \min\left\{r \in \mathbb{N} : \delta_r = \delta_{r+1}\right\}$$

③ نعلم إذن أنّ $N_p \subset N_{p+1}$ و $\dim N_p = \dim N_{p+1}$ إذن $N_p = N_{p+1}$. ليكن $k$ عدداً طبيعيّاً يُحقِّق $k \geq p$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} x \in N_{k+1} &\Rightarrow u^{k+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow u^{p+1}(u^{k-p}(x)) = 0 \\ &\Rightarrow u^{k-p}(x) \in \ker u^{p+1} = N_{p+1} \\ &\Rightarrow u^{k-p}(x) \in N_p \\ &\Rightarrow u^p(u^{k-p}(x)) = 0 \\ &\Rightarrow x \in N_k \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $N_{k+1} = N_k$. إذن نستنتج بالتدريج على العدد $k$ أنّ $\forall k \geq p, N_k = N_p$.

ومن جهة أخرى، لدينا، في حالة $k \geq p$، ما يلي :

$$\begin{aligned} \dim I_k &= \mathrm{rg}(u^k) = n - \dim N_k \\ &= n - \dim N_p = \mathrm{rg}(u^p) = \dim I_p \end{aligned}$$

ولمّا كان $\forall k \geq p, I_k \subset I_p$، استنتجنا أنّ $\forall k \geq p, I_k = I_p$.

④ لمّا كان $N_p \subset E$ استنتجنا أنّ $\delta_p = \dim N_p \leq n$ . ولكن

$$\delta_p = \sum_{k=1}^{p}(\delta_k - \delta_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{p} 1 = p$$

إذن $p \leq n = \dim E$ .

⑤ في حالة $p = 0$ يكون $N_p = \{0\}$ و $I_p = E$ ، والخاصّة المشار إليها محقّقة.
لننظر في حالة $p > 0$ . ليكن $y$ عنصراً من $N_p \cap I_p$ . عندئذ يكون $u^p(y) = 0$ ويوجد عنصرٌ $x$ من $E$ يُحقّق $y = u^p(x)$ . وعندئذ يكون $u^{2p}(x) = u^p(y) = 0$ ، إذن $x \in N_{2p}$ ، ولكن $N_{2p} = N_p$ إذن $x \in N_p$ ومن ثَمّ $y = u^p(x) = 0$ . نكون بذلك قد أثبتنا أنّ $N_p \cap I_p = \{0\}$ .

نستنتج من ذلك أنّ

$$\dim(N_p \oplus I_p) = \dim \ker u^p + \operatorname{rg}(u^p) = \dim E$$

ومن ثَمّ $E = N_p \oplus I_p$ . وهي النتيجة المطلوبة. ■

**التمرين 19.** لتكن $E$ و $F$ و $G$ ثلاثة فضاءات شعاعيّة منتهية البُعد على حقلٍ $\mathbb{K}$ . وليكن $u$ و $v$ تطبيقين خطيّين من $\mathcal{L}(E,F)$ و $\mathcal{L}(F,G)$ على التوالي.

① نفترض أنّ $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(v \circ u)$ .

❶ أثبت أنّ $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} v \circ u$ وأنّ $\ker u = \ker v \circ u$ .

❷ أثبت أنّ $\operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0\}$ .

❸ استنتج أنّ $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$

② بالعكس، نفترض أنّ $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ .

❶ أثبت أنّ $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} v \circ u$ .

❷ استنتج أنّ $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(v \circ u)$ .

**الحل**

① نفترض أنّ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u)$ .

❶ في الحقيقة، $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ ولمّا كان لهذين الفضاءين البُعد نفسه استنتجنا أنّهما متساويان أي $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ .

ومن جهة أخرى من الواضح أنّ $\ker u \subset \ker v \circ u$ . ولكن

$$\begin{aligned} \dim \ker u &= \dim E - \operatorname{rg} u \\ &= \dim E - \operatorname{rg}(v \circ u) = \dim \ker v \circ u \end{aligned}$$

إذن، لا بُدّ أن يكون $\ker u = \ker v \circ u$ .

❷ ليكن $y$ عنصراً من $\operatorname{Im} u \cap \ker v$ . عندئذ لدينا من جهة أولى $v(y) = 0$ ويوجد عنصرٌ $x$ من $E$ يُحقّق $u(x) = y$ . نستنتج إذن أنّ $x$ ينتمي إلى $\ker v \circ u$ ومن ثَمّ إلى $\ker u$ . ولكنّ هذا يقتضي أنّ $y = u(x) = 0$ . بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} u \cap \ker v = \{0\}$ .

❸ نستنتج مما سبق أنّ $\operatorname{Im} u \oplus \ker v \subset F$ ، ولكن

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} u \oplus \ker v &= \operatorname{rg}(u) + \dim \ker v \\ &= \operatorname{rg}(v) + \dim \ker v = \dim F \end{aligned}$$

إذن يجب أن يكون $\operatorname{Im} u \oplus \ker v = F$ .

② بالعكس، نفترض أنّ $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ .

❶ لدينا بوجه عام $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ . وبالعكس، ليكن $y$ عنصراً من $\operatorname{Im} v$ . عندئذ يوجد $x$ في $F$ يُحقّق $y = v(x)$ . ولكن لمّا كان $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ أمكننا كتابة $x = u(z) + t$ حيث $z$ من $E$ و $t$ من $\ker v$ . وعليه يكون

$$y = v(x) = v\big(u(z) + t\big) = v \circ u(z)$$

إذن ينتمي العنصر $y$ إلى $\operatorname{Im} v \circ u$ وهذا ما يثبتُ أنّ $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ .

❷ إذن $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u)$ . ومن $F = \operatorname{Im} u \oplus \ker v$ نستنتج أنّ

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$$

ويكتمل الحل. ■

**التمرين 20.** لتكن $F$ و $G$ و $H$ ثلاثة فضاءات شعاعيّة جزئيّة من فضاء شعاعي $E$ . ولنفترض أنّ $F \subset G$ و $F + H = G + H$ و $F \cap H = G \cap H$ .

أثبت أنّ $F = G$ .

**الحل**

ليكن $x$ عنصراً من $G$، عندئذ نستنتج من كون $G \subset F+H$ أنّه يوجد $x_F$ في $F$، ويوجد $x_H$ في $H$ يُحقّقان $x = x_F + x_H$.

ولكن لمّا كان $F \subset G$ كان $x_H = x - x_F \in G$، إذن $x_H \in G \cap H$. ولكن نعلم من جهة أخرى أنّ $F \cap H = G \cap H$، إذن $x_H \in F \cap H \subset F$. وعليه يكون $x = x_F + x_H \in F$. فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $G \subset F$، ومن ثَمّ $F = G$. ■

**التمرين 21.** نذكّر أنّ $\mathbb{R}[X]$ هو فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة، وأنّ $\mathbb{R}_m[X]$ هو فضاء كثيرات الحدود التي درجاتها أصغر أو تساوي $m$.

① ليكن $P$ كثير حدود حقيقياً يُحقّق $P(X) = P(X+1)$. أثبت أنّ $P$ ثابت.

② ليكن $P(X)$ كثير حدود حقيقياً غير معدوم. أثبت أنّ

$$\deg(P(X+1) - P(X)) < \deg P(X)$$

③ نعرّف التطبيق الخطّي $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ بالعلاقة :

$$\Phi(P) = \big(P(0), P(X+1) - P(X)\big)$$

عيّن $\ker \Phi$. ماذا تستنتج بشأن التطبيق الخطّي $\Phi$؟

④ استنتج مما سبق أنّه مهما تكن $n$ من $\mathbb{N}^*$، يوجد كثيرُ حدود وحيدٌ $Q_n(X)$ من $\mathbb{R}_n[X]$ يُحقّق: $Q_n(0) = 0$ و $Q_n(X+1) - Q_n(X) = X^{n-1}$. عيّن $\deg Q_n$ بدلالة $n$. واحسب بوجه خاصّ $Q_1(X)$.

⑤ نعرّف في حالة $n$ من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود $P_{n+1}$ بالعلاقة :

$$P_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

احسب $\Phi(P_{n+1})$ واستنتج عبارة $P_{n+1}$ بدلالة $Q_{n+1}$.

⑥ أثبت أنّ : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^{n-1} = Q_n(m+1)$.

⑦ استفد مما سبق لحساب $Q_2$ و $Q_3$ و $Q_4$ واستنتج عبارة $\sum_{k=1}^{m} k^3$ بدلالة $m$.

**الحل**

① ليكن $P$ كثير حدود حقيقي، ولنفترض أنّ $P$ يحقّق $P(X)=P(X+1)$. نعرّف $Q(X)=P(X)-P(0)$، ونلاحظ أنّ $Q(k+1)=Q(k)$ أيّاً كانت $k$ من $\mathbb{N}$، ولمّا كان $Q(0)=0$ استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q(k)=0$$

ولكن لا يمكن لكثير حدود غير الصفري أن يقبل عدداً لانهائيّاً من الجذور. إذن $Q=0$. أي

$$P(X)=P(0)\in \mathbb{R}$$

② ليكن $P(X)$ كثير حدود حقيقياً غير صفري، وليكن $a_dX^d$ الحدّ المسيطر في $P(X)$. عندئذ يكون $a_dX^d$ أيضاً الحدَّ المسيطر في $P(X+1)$. وهذا يثبتُ أنّ

$$\deg\big(P(X+1)-P(X)\big)<\deg P(X)$$

③ نعرّف التطبيق الخطّيّ $\Phi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{n-1}[X]$ بالعلاقة

$$\Phi(P)=\big(P(0),P(X+1)-P(X)\big)$$

- إذا كان $P\in\ker\Phi$ كان $P(0)=0$ وكان $P(X+1)=P(X)$، وبناءً على ما أثبتناه في الطلب الأوّل، نستنتج أنّ $P(X)=P(0)=0$. وعليه $\ker\Phi=\{0\}$. فالتطبيق $\Phi$ متباين.
- في الحقيقة، لمّا كان $\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1=\dim\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)$ استنتجنا أنّ التطبيق $\Phi$ تقابلٌ خطّي.

④ في الحقيقة، الشروط الموضوعة على $Q_n$ تُكافئ $\Phi(Q_n)=(0,X^{n-1})$. ولمّا كان $\Phi$ تقابلاً استنتجنا أنّ هناك كثير حدود وحيداً $Q_n$ يُحقّق المطلوب هو $\Phi^{-1}((0,X^{n-1}))$. ولمّا كان $Q_n$ عنصراً من $\mathbb{R}_n[X]$ استنتجنا أنّ $\deg Q_n\le n$. ولكن إذا كان $\deg Q_n<n$ كان

$$\deg\big(Q_n(X+1)-Q_n(X)\big)<n-1$$

وما تحقّقت المساواة $Q_n(X+1)-Q_n(X)=X^{n-1}$. فلا بُدَّ أن يكون $\deg Q_n=n$. من الواضح أنّ $Q_1(X)=X$، لأنّ $\Phi(X)=(0,1)$.

⑤ نعرّف في حالة $n$ من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود $P_{n+1}$ بالعلاقة:

$$P_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

- نلاحظ أوّلاً أنّ $P_{n+1}(0) = 0$.
- ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ $P_{n+1}$ قابلٌ للاشتقاق وأنّه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P'_{n+1}(x) = nQ_n(x) - n\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

إذن

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x+1) - P'_{n+1}(x) &= n\big(Q_n(x+1) - Q_n(x)\big) \\ &= nx^{n-1} = (x^n)' \end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $P_{n+1}(1) = P_{n+1}(0) = 0$، نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = x^n$$

أي إنّ $\Phi(P_{n+1}) = (0, X^n)$ وهذا يثبتُ أنّ $Q_{n+1} = P_{n+1}$.

⑥ نعلم أنّه في حالة $1 \le k \le m$ لدينا

$$k^{n-1} = Q_n(k+1) - Q_n(k)$$

فإذا جمعنا هذه المساوَيات طرفاً إلى طرف، وتذكّرنا أنّ $Q_n(0) = 0$، استنتجنا أنّ

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\quad \sum_{k=1}^{m} k^{n-1} = Q_n(m+1)$$

⑦ انطلاقاً من $Q_1(X) = X$، وبالاستفادة من العلاقة التدريجيّة

$$Q_{n+1}(x) = n\left(\int_0^x Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 Q_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

نجد مباشرة أنّ

$$Q_2(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

ومن ثَمّ $Q_2(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$. ونجد أيضاً

$$Q_3(x) = \int_0^x (t^2 - t)\,\mathrm{d}\,t - x\int_0^1 (t^2 - t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

ومن ثَمّ

$$Q_3\left(X\right)=\frac{1}{6}\left(2X^3-3X^2+X\right)=\frac{1}{6}X\left(X-1\right)\left(2X-1\right)$$

ونجد أيضاً

$$\begin{aligned}Q_4(x)&=\frac{1}{2}\int_0^x(2t^3-3t^2+t)\,\mathrm{d}\,t-x\int_0^1(2t^3-3t^2+t)\,\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{4}(x^4-2x^3+x^2)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $Q_4\left(X\right)=\frac{1}{4}X^2(X-1)^2$ . وبوجه خاص نجد

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad\sum_{k=1}^{m}k^3=Q_4(m+1)=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

**التمرين** 22. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً منتهي البُعد على $\mathbb{R}$، وبُعده $n\geq 1$ . نفترض أيضاً أنّه يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي $u$ يُحقّق الشرط $u\circ u+I_E=0$، و $I_E$ هو التطبيق المطابق.

① ليكن $x$ من $E$ شعاعاً مختلفاً عن $0$ . أثبت أنّ الجملة $(x,u(x))$ جملة حرّة. نرمز بالرمز $F_x$ إلى $\mathrm{vect}(x,u\left(x\right))$ . احسب بُعد $F_x$، وبيّن أنّ $F_x=u(F_x)$ .

② ليكن $F$ فضاءً جزئياً من $E$ يحقّق : $F\neq E$ و $u(F)\subset F$ . وليكن $x$ عنصراً من $E\backslash F$ . أثبت أنّ $F\cap F_x=\left\{0\right\}$ .

③ لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة $G$ من $E$ التي تُحقّق $G\cap u(G)=\left\{0\right\}$ . أثبت أنّ $\mathcal{G}\neq\varnothing$، وأنّه يوجد في $\mathcal{G}$ فضاء شعاعي جزئي $G_0$ يُحقّق

$$\dim G_0=\max\left\{\dim G : G\in\mathcal{G}\right\}$$

④ نعرّف $F=G_0\oplus u(G_0)$ . ونريد أن نثبت بنقض الفرض أنّ $F=E$ . لنفترض إذن أنّ $F\neq E$ .

❶ أثبت أنّ $u(F)\subset F$ .

❷ خُذْ عنصراً $x$ من $E\backslash F$، وأثبت أنّ $G_0\oplus\mathbb{R}x$ عنصرٌ من $\mathcal{G}$ . ماذا تستنتج؟

⑤ استنتج من الدراسة السابقة وجود فضاء شعاعيّ جزئي $H$ من $E$ يُحقِّق العلاقة $E = H \oplus u(H)$ . وبيّن أنّ بُعد $E$ ، أي العدد $n$ ، هو عدد زوجيّ، وأنّه يوجد أساس $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m})$ للفضاء $E$ يُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_{2m}, \quad u(e_k) = \begin{cases} e_{k+m} & : \quad 1 \leq k \leq m, \\ -e_{k-m} & : \quad m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

⑥ بالعكس، نفترض أنّ $\dim E = 2m$ . أثبت أنّه يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي $u$ ، يُحقِّق العلاقة $u \circ u + I_E = 0$ .

**الحل**

① ليكن $x$ شعاعاً من $E$ مختلفاً عن $0$ . ولنتأمّل العبارة الخطيّة المعدومة :

$$ax + bu(x) = 0$$

عندئذ نستنتج بتطبق $u$ على طرفي العبارة السابقة، وبعد الاستفادة من كون $u^2 = -I_E$ ما يأتي:

$$au(x) - bx = 0$$

وعليه يكون

$$(a^2 + b^2)x = a(ax + bu(x)) - b(au(x) - bx) = 0$$

ولمّا كان $x \neq 0$ كان $a^2 + b^2 = 0$ أي $a = b = 0$ . فالجملة $(x, u(x))$ جملة حرّة. لمّا كانت الجملة $(x, u(x))$ جملة حرّة، استنتجنا أنّ بُعد الفضاء $F_x = \operatorname{vect}(x, u(x))$ يساوي $2$ . وكذلك فإنّ من الواضح أنّ $u(F_x) \subset F_x$ ، بل تتحقّق المساواة $u(F_x) = F_x$ ، لأنّ كون $u$ تقابلاً خطيّاً يقتضي أنّ $\dim u(F_x) = \dim F_x$ .

② ليكن $F$ فضاءً جزئياً من $E$ يحقِّق $F \neq E$ و $u(F) \subset F$ ، وليكن $x$ عنصراً من $E \backslash F$ . لنتأمّل عنصراً $y$ من $F \cap F_x$ . عندئذ نجد عددين حقيقيّين $a$ و $b$ يُحقِقان $y = ax + bu(x)$ . لمّا كان $u(F) \subset F$ استنتجنا أنّ $u(y) = au(x) - bx \in F$ وعليه

$$(a^2 + b^2)x = ay - bu(y) \in F$$

فإذا كان $a^2 + b^2 \neq 0$ استنتجنا أنّ $x \in F$ وهذا خُلفٌ. إذن لا بُدّ أن يكون $a^2 + b^2 = 0$ أي أن يكون $y = 0$ . وعليه $F \cap F_x = \{0\}$ .

③ لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة الفضاءات الجزئيّة $G$ من $E$ التي تُحقّق $G \cap u(G) = \{0\}$. في الحقيقة، إنّ $\mathcal{G} \neq \varnothing$، إذ يكفي أن نلاحظ أنّ الفضاء الجزئي $G = \{0\}$ ينتمي إلى $\mathcal{G}$. إذن تكوّن المجموعة

$$\mathcal{N} = \left\{ \deg G : G \in \mathcal{G} \right\}$$

مجموعةً جزئيّة غير خالية محتواة في $\{0,1,\ldots,n\}$، فهي إذن تحوي أكبر عنصرٍ. وعليه يوجد في $\mathcal{G}$ فضاء جزئي $G_0$ يُحقّق $\dim G_0 = \max(\mathcal{N})$.

④ نعرّف $F = G_0 \oplus u(G_0)$. ونفترض جدلاً أنّ $F \neq E$.

❶ إذا كان $z$ عنصراً من $F$ أمكن إيجاد عنصرين $x$ و $y$ من الفضاء الجزئي $G_0$ يُحقّقان $z = y + u(x)$، وعندئذ يكون

$$u(z) = -x + u(y) \in G_0 + u(G_0) = F$$

فنكون قد أثبتنا أنّ $u(F) \subset F$.

❷ لنتأمّل إذن عنصراً $x$ من $E \backslash F$، عندئذ نستنتج من كون $F \subset G_0$ أنّ $x \notin G_0$، وعليه يكون $G_0 \cap \mathbb{R}x = \left\{0\right\}$، وهذا ما يتيح لنا أن نعرّف $G = G_0 \oplus \mathbb{R}x$.

لنتأمّل عنصراً $y$ ينتمي إلى $G \cap u(G)$. عندئذ يُكتب $y$ بالشكل $g + \lambda x$ حيث $g \in G_0$، كما نجد $g'$ في $G_0$ و $\lambda'$ في $\mathbb{R}$ يُحقّقان $y = u(g') + \lambda' u(x)$. وعليه يكون

$$y = u(g') + \lambda' u(x) = g + \lambda x$$

ومنه نستنتج أنّ

$$-g + u(g') = \lambda x - \lambda' u(x)$$

ولكن $\lambda x - \lambda' u(x) \in F_x$ و $-g + u(g') \in G_0 \oplus u(G_0) = F$، فإذا استفدنا من نتيجة السؤال ② التي تقتضي أنّ $F \cap F_x = \{0\}$، استنتجنا أنّ

$$g = u(g') \text{ و } \lambda x - \lambda' u(x) = 0$$

واعتماداً على الاستقلال الخطّي للجملة $(x, u(x))$ نستنتج أنّ $\lambda = \lambda' = 0$. على هذا يكون $y$ عنصراً من $G_0 \cap u(G_0) = \{0\}$، وهذا يقتضي أنّ $y = 0$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ $G \in \mathcal{G}$، وفي هذا تناقضٌ لأنّ

$$\dim G = 1 + \dim G_0 > \dim G_0 \geq \dim G$$

نتج التناقض السابق من الافتراض $E \neq F$ ، وعليه لا بُدَّ أن يكون $E = F$ أي

$$E = G_0 \oplus u(G_0)$$

⑤ أثبتنا إذن أنّ الفضاء $H = G_0$ يُحقّق $E = H \oplus u(H)$ . ولكنّ التطبيق $u$ تقابلٌ خطّي إذن $\dim u(H) = \dim H$ ، وعليه فإنّ

$$\dim E = \dim H + \dim u(H) = 2 \dim H$$

وعليه إذا كان $m = \dim H$ كان $n = \dim E = 2m$ .

لنتأمّل أساساً $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ للفضاء الجزئي $H$ ، عندئذ نستنتج من كون $u$ تقابلاً خطيّاً من $H$ إلى $u(H)$ أنّ $\left(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_m)\right)$ أساس للفضاء $u(H)$ ، وعليه إذا عرّفنا

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad e_{m+k} = u(e_k)$$

كان $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m})$ أساساً للفضاء $E = H \oplus u(H)$ . وبالاستفادة من كون $u^2 = -I_E$ نستنتج مباشرة أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{2m}, \quad u(e_k) = \begin{cases} e_{k+m} & : \quad 1 \leq k \leq m, \\ -e_{k-m} & : \quad m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

⑥ وبالعكس، لنفترض أنّ $\dim E = 2m$ . ولنتأمّل أساساً

$$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m})$$

لهذا الفضاء. عندئذ نعرّف التطبيق الخطّي $u$ من $\mathcal{L}(E)$ بوضع $u(e_k) = e_{m+k}$ و $u(e_{k+m}) = -e_k$ في حالة $k \in \mathbb{N}_m$ . عندئذ نتيقّن مباشرة أنّ التطبيق الخطّي $u$ المعرّف بهذا الأسلوب يُحقّق العلاقة

$$u \circ u + I_E = 0$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

**ملاحظة** : في الحقيقة، لقد أثبتنا في التمرين السابق الخاصة التالية :

> ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ . عندئذ الشرط اللازم والكافي كي يوجد في $\mathcal{L}(E)$ تطبيق خطّي $u$ يُحقّق $u^2 = -I_E$ ، هو أن يكون بُعد الفضاء $E$ زوجيّاً.