# الفضاءات الشعاعيّة والتطبيقات الخطّيّة

## 1. عموميّات

**1-1. تعريف**. لتكن $E$ مجموعة غير خالية، وليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً. نفترض أنّ المجموعة $E$ مزودة بقانوني تشكيل أوّلهما داخلي $+ : E \times E \to E, (x,y) \mapsto x+y$ وثانيهما خارجيّ $\bullet : \mathbb{K} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$. نقول إنّ البنية $(E,+,\bullet)$ **فضاءٌ شعاعيّ** على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط الآتية.

❶ البنية $(E,+)$ زمرة تبديليّة.

❷ يحقّق قانون التشكيل الخارجيّ $(\bullet)$ الخواص الآتية:

① أيّاً كان $x$ من $E$، كان $1 \cdot x = x$.

② أيّاً كان $x$ من $E$ و $(\alpha, \beta)$ من $\mathbb{K}^2$، كان

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

③ أيّاً كانت $(x,y)$ من $E$ و $\alpha$ من $\mathbb{K}$، كان

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

④ أيّاً كانت $x$ من $E$ و $(\alpha, \beta)$ من $\mathbb{K}^2$، كان $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

نسمّي عناصر $E$ **أشعّة**، ونسمّي عناصر $\mathbb{K}$ **مؤثِّرات سلّميّة**.

**2-1. أمثلة**

➢ ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً وليكن $1 \leq n$. تكوّن المجموعة $E = \mathbb{K}^n$ مزودةً بقانوني التشكيل الآتيين فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$.

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

➢ بوجه أعمّ، إذا كان $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، وكانت $X$ مجموعة غير خالية، كوّنت مجموعة التوابع التي منطلقها $X$ ومستقرّها $E$ والتي نرمز إليها $\mathcal{F}(X,E)$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القانونين المعرّفين كما يأتي:

$$\forall x \in X, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall x \in X, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

نسمّي أيَّ عنصر من $\mathcal{F}(I,E)$ ، **جماعةً** من عناصر $E$ مجموعة أدلّتها $I$ ، وعندئذ نرمز إلى هذا العنصر بالرمز $(x_i)_{i\in I}$ ، ونرمز إلى الفضاء $\mathcal{F}(I,E)$ بالرمز $E^I$ .

- إذا كانت $E_1,\ldots,E_n$ فضاءات شعاعيّة على حقل $\mathbb{K}$ ، يجعل القانونان الآتيان الجداء الديكارتي $F = E_1\times\cdots\times E_n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ :

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$\lambda\cdot(x_1,\ldots x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

- تكوّن $\mathbb{K}[X]$ أي مجموعة كثيرات الحدود بمتحوّل واحد على حقل $\mathbb{K}$ ، فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$ ، بالنسبة إلى قانوني جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد من $\mathbb{K}$ .

لنذكّر ببعض الخواص البسيطة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ:

3-1. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، عندئذ أيّاً كان $x$ من $E$ ، و $\alpha$ من $\mathbb{K}$ كان :

1. $0_E = \alpha\cdot 0_E$ و $0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$ .
2. إذا كان $\alpha\cdot x = 0_E$ فإمّا أن يكون $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ أو $x = 0_E$ .
3. وأخيراً : $(-\alpha)\cdot x = \alpha\cdot(-x) = -(\alpha x)$ .

4-1. **مبرهنة**. ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، ولتكن $F$ مجموعة جزئية من $E$ . نقول إنّ $F$ **فضاء شعاعي جزئي** من $E$ ، إذا وفقط إذا كان $F\neq\varnothing$ ، وكانت $F$ مغلقة بالنسبة إلى قانونيّ التشكيل المعرّفين على $E$ . عندئذ تكون المجموعة $F$ المزوّدةُ بمقصورَيْ قانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ على $F\times F$ و $\mathbb{K}\times F$ على التوالي، فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ .

ويتحقّق القارئ بسهولة صحةَ المبرهنة الآتية:

5-1. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$ ، ولتكن $F$ مجموعة جزئية من $E$ . عندئذ يكون $F$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $E$ ، إذا وفقط إذا كان $F\neq\varnothing$ ، وتحقَّق الشرط:

$$\forall(x,y)\in F\times F,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \lambda\cdot x+y\in F$$

كلٌّ من $\{0_E\}$ و $E$ فضاء شعاعيٌّ جزئيٌّ من $E$ . نسمّيهما الفضاءين الجزئيين التافهين.

**1-6. أمثلة.**

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، وليكن $n$ عدداً طبيعياً. عندئذ تكوّن المجموعة

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P \leq n\right\}$$

فضاء شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}[X]$.

- إذا كانت $I$ مجموعة غير خالية، وكان $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، كوّنت المجموعة

$$\mathbb{K}^{(I)} = \left\{(x_i)_{i\in I} : \operatorname{card}\left(\left\{i \in I : x_i \neq 0\right\}\right) < +\infty\right\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $\mathbb{K}^I$. نسمّي أيَّ عنصر من $\mathbb{K}^{(I)}$ **جماعة شبه معدومة** من عناصر $\mathbb{K}$ مجموعةُ أدلّتها $I$. لاحظ أنّ $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$ إذا وفقط إذا كانت $I$ مجموعة منتهية. ولنذكّر أنّ فضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$ ما هو إلاّ $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

- وبوجه أعمّ، إذا كانت $I$ مجموعة غير خالية، وكان $E$ فضاء شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، كوّنت المجموعة

$$E^{(I)} = \left\{(x_i)_{i\in I} : \operatorname{card}(\{i \in I : x_i \neq 0_E\}) < +\infty\right\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $E^I = \mathcal{F}(I,E)$. نسمّي أيَّ عنصر من $E^{(I)}$ جماعة أشعّة شبه معدومة من عناصر $E$ مجموعةُ أدلّتها $I$.

**1-7. مبرهنة.** ليكن $E$ فضاء شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من $E$. عندئذ يكون $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $E$.

**الإثبات**

الإثبات تحقّقٌ مباشر انطلاقاً من التعريف. ❐

1-8. **مبرهنة وتعريف**. ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، ولتكن $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة من $E$. نسمّي أصغر[1] فضاء شعاعيّ جزئي من $E$ يحوي $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ **الفضاء الجزئي المولَّد** بالجماعة $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، ونرمز إليه بالرمز $\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.
إنّ $\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ هو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$ الحاوية $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$، ويُعطى أيضاً بالعلاقة:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in E^{(\Lambda)}, \quad \forall\lambda\in\Lambda,\, x_\lambda \in F_\lambda \right\}$$

1-9. **ملاحظة**. إذا كانت $\Lambda = \mathbb{N}_n = \{1,\ldots,n\}$، وكانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ فضاءات شعاعيّة جزئية من $E$ كتبنا $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$، أو $\sum_{k=1}^{n} F_k$ للدلالة على الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجماعة $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، ويكون:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \left\{ x_1 + \cdots + x_n : \forall k \in \mathbb{N}_n, x_k \in F_k \right\}$$

## 2. التطبيقات الخطّية

2-1. **تعريف**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيّين على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، نقول إنّ **التطبيق** $u : E \to F$ **تطبيقٌ خطّي** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x,y) \in E\times E,\ u(\lambda\cdot x + y) = \lambda\cdot u(x) + u(y)$$

ونرمز بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$ إلى مجموعة التطبيقات الخطّية التي منطلقها $E$ ومستقرها $F$. وهي فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(E,F)$؛ أي فضاء التوابع التي منطلقها $E$ ومستقرها $F$. وإذا كان $u$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$ رمزنا بالرمز $\ker u$ إلى **نواته**؛ أي إلى المجموعة $u^{-1}(\{0\})$، ورمزنا بالرمز $\operatorname{Im} u$ إلى **صورته**؛ أي $u(E)$.

[1] بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

إنّ كلّاً من $\ker u$ و $\operatorname{Im} u$ فضاء شعاعيّ جزئي، وهذا ناتج من المبرهنة الآتية :

2-2. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن $u$ تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$ . وليكن $E_1$ و $F_1$ فضاءين شعاعيّين جزئيين من $E$ و $F$ على التوالي. عندئذ يكون $u(E_1)$ و $u^{-1}(F_1)$ فضاءَيْن شعاعيَّيْن جزئيين من $F$ و $E$ على التوالي.

**الإثبات**

ليكن $y_1$ و $y_2$ عنصرين من $u(E_1)$ . عندئذ يوجد عنصران $x_1$ و $x_2$ من $E_1$، يُحقّقان $u(x_1) = y_1$ و $u(x_2) = y_2$ ، ومن ثَمّ أيّاً كانت $\lambda$ من $\mathbb{K}$ كان

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E_1}) \in u(E_1)$$

وعليه يكون $u(E_1)$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $F$ .

وكذلك ليكن $x_1$ و $x_2$ عنصرين من $u^{-1}(F_1)$ . عندئذ، أيّاً كانت $\lambda$ من $\mathbb{K}$، كان

$$u(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) \in F_1$$

ومن ثَمّ $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$ . إذن $u^{-1}(F_1)$ فضاء شعاعيّ جزئي من $E$ . ❐

3-2. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيّين على الحقل $\mathbb{K}$، وليكن $u$ تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$ . عندئذ يكون $u$ متبايناً إذا وفقط إذا كان $\ker u = \{0_E\}$ .

**الإثبات**

إنّ هذا التكافؤ واضح لأنّه، أيّاً كان $(x,y)$ من $E \times E$، كان

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker u$$

وهذا يثبت الخاصة المطلوبة. ❐

المبرهنة الآتية واضحة.

4-2. **مبرهنة**. لتكن $E$ و $F$ و $G$ فضاءات شعاعيّة على $\mathbb{K}$، وليكن $u$ من $\mathcal{L}(E,F)$، و $v$ من $\mathcal{L}(F,G)$ . عندئذ يكون $v \circ u$ تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,G)$ .

5-2. **ملاحظة**. لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز $\mathcal{L}(E)$ إلى الفضاء $\mathcal{L}(E,E)$، وهو يكوّن جبراً على الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة إلى القوانين $(+,\circ,\cdot)$ وهو غير تبديليّ في الحالة العامّة.

6-2. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل التبديليّ $\mathbb{K}$، نرمز بالرمز $\mathcal{GL}(E)$ إلى مجموعة التقابلات الخطيّة من $E$ إلى $E$، وهي زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التطبيقات $(\circ)$.
تُسمّى الزمرةُ $\left(\mathcal{GL}(E),\circ\right)$ **الزمرة الخطية** على الفضاء $E$.

7-2. **مثال**. إذا كان $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، وكان $a$ عنصراً من $\mathbb{K}$. رمزنا بالرمز $H_a$ إلى التطبيق الخطّي $H_a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, H_a(x) = ax$ من $\mathcal{L}(\mathbb{K})$. وعندئذ يكون

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}) = \left\{H_a : a \in \mathbb{K}\right\}$$

ويعرّف التطبيق $H_a \mapsto a$ تشاكلاً تقابلياً زمرياً بين $\left(\mathcal{GL}(\mathbb{K}),\circ\right)$ و $(\mathbb{K}^*,\cdot)$.

## 3. جماعات وجمل الأشعة

1-3. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن $n$ من $\mathbb{N}^*$. نتأمّل جملة $(x_1,\ldots,x_n)$ من عناصر $E$، أي عنصراً من $E^n$، والتطبيق الخطي

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to E, \quad (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

نسمّي كل عنصر من النمط $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ **عبارة خطّية** بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$. ونسمّي صورة التطبيق $\Phi$، **الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجملة** $(x_1,\ldots,x_n)$. ونكتب :

$$\mathrm{vect}\left((x_1,\ldots x_n)\right) = \mathrm{Im}\,\Phi = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k : (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

☜ نقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ تولّد الفضاء $E$ أو إنّها **جملة مولِّدة** في $E$، إذا وفقط إذا كان $\Phi$ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه بالإمكان كتابة كل عنصر من $E$ عبارةً خطيّةً بالجملة $(x_1,\ldots,x_n)$، أو إنّ $E = \mathrm{vect}\left((x_1,\ldots,x_n)\right)$.

☜ ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ **حرّة**، أو **مستقلة خطيّاً**، إذا وفقط إذا كان $\Phi$ متبايناً، أي $\ker\Phi = \{0\}$، وهذا يكافئ الشرط:

$$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = 0\right) \Rightarrow \left(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\right)$$

ونقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ **مرتبطة خطيّاً** إذا لم تكن حرّة.

☜ وأخيراً نقول إنّ الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ **أساسٌ** للفضاء $E$، إذا وفقط إذا كان $\Phi$ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجملة $(x_1,\ldots,x_n)$ حرّة ومولّدة في آن معاً.

هذا ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل جماعات الأشعّة كما يأتي:

**2-3. تعريف.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن $I$ مجموعة غير خالية، ونتأمّل جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر $E$، أي عنصراً من $E^I$. ولنتأمّل التطبيق الخطي

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \to E, \quad (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i$$

إذ نلاحظ أن للمجموع السابق معنى، لأن الجماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة.

كما في السابق، نسمّي صورة التطبيق $\Psi$، الفضاء الشعاعيّ المولّد بالجماعة $(x_i)_{i\in I}$، ويكون

$$\mathrm{vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = \left\{ \sum_{j\in J} a_j x_j : \big(J \text{ مجموعة جزئية منتهية من } I\big) \wedge \big((a_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J\big) \right\}$$

ونسمي كل عنصر من هذه الصورة عبارة خطيّة بالجماعة $(x_i)_{i\in I}$.

☜ نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، تولّد الفضاء $E$، أو إنها **جماعة مولِّدة** في $E$ إذا وفقط إذا كان $\Psi$ غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه بالإمكان كتابة كل عنصر من $E$ عبارةً خطيّةً بجماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، أو إنّ $E = \mathrm{vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$.

☜ ونقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعة **حرّة**، أو **مستقلة خطيّاً**، إذا وفقط إذا كان $\Psi$ متبايناً، أي $\ker\Psi = \{0\}$، وهذا يكافئ كون كلّ جماعة جزئية منتهية من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعةً حرةً.

ونقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ **مرتبطة خطيّاً** إذا لم تكن حرّة.

☜ وأخيراً نقول إنّ الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ **أساسٌ** للفضاء $E$، إذا وفقط إذا كان $\Psi$ تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرّة ومولِّدة في آن معاً.

لنُدرج في المبرهنة الآتية بعض الخواص البسيطة.

**3-3. مبرهنة.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، ولتكن $I$ مجموعة غير خالية. نتأمّل جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر $E$.

① إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت كلُّ جماعة $(x_i)_{i\in J}$ جزئية منها حرةً أيضاً.

② إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كان $\forall i \in I,\ x_i \neq 0$، وكان التطبيق $i \mapsto x_i$ متبايناً.

③ إذا كانت $(x_i)_{i\in J}$ جماعة جزئية مرتبطة خطياً من الجماعة $(x_i)_{i\in I}$، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ نفسُها مرتبطة خطيّاً.

④ تكون الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد الأشعّة $x_{i_0}$ بعبارة خطيّة بالجماعة $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

**الإثبات**

نحتفظ برموز التعريف السابق.

① هذه النتيجة واضحة، لأنّ مقصور التطبيق المتباين $\Psi$ على الفضاء الجزئي المولّد بالجماعة الجزئيّة $(x_i)_{i\in J}$، أي $\mathrm{vect}\big((x_i)_{i\in J}\big)$، يكون متبايناً أيضاً.

② الجملة المؤلفة من عنصر واحد هو $0$ مرتبطة. وكذلك تكون كلُّ جملة من النمط $(x,x)$. ونحصل على النتيجة المطلوبة بالاستفادة من ①.

③ تنتج هذه الخاصة من نفي الخاصة ①.

④ إذا كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً، أمكننا أن نجد جماعة $(a_i)_{i\in I}$ شبه معدومة وغير معدومة تُحقّق $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. ولمّا كانت $(a_i)_{i\in I}$ غير معدومة، وُجِدَ في $I$ عنصرٌ $i_0$ يُحقّق $a_{i_0} \neq 0$، ومن ثَمّ يكون $x_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \frac{a_i}{a_{i_0}} x_i$.

وبالعكس، إذا كان $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} b_i x_i$ حيث $(b_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}$، وعرّفنا الجماعة شبه المعدومة وغير المعدومة $(a_i)_{i\in I}$ بوضع $a_{i_0} = 1$ و $a_i = -b_i$ حين يكون $i \in I\setminus\{i_0\}$، كان $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ وكانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيّاً. ❐

## 3-4. أمثلة.

- ليكن $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقية المعرّفة على $\mathbb{R}$. ولنعرّف أيّاً كان $\alpha$ من $\mathbb{R}$ التابع $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto |x-\alpha|$. عندئذ تكون الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ جماعةً حرّة.

في الحقيقة، لو كانت هذه الجماعة مرتبطة لأمكن التعبير عن أحد العناصر، وليكن $f_\beta$ مثلاً، بصفته تركيباً خطيّاً بالجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\beta\}}$. وأمكننا، من ثَمّ، إيجاد $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ من $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$ و $a_1,\ldots,a_n$ من $\mathbb{R}$ لتتحقّق المساواة

$$f_\beta=\sum_{k=1}^{n}a_k f_{\alpha_k}$$

ولـمّا كان $\beta\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ كانت التوابع $(f_{\alpha_k})_{1\le k\le n}$ قابلة للاشتقاق عند $\beta$، ومن ثَمّ كان $f_\beta$ قابلاً للاشتقاق عند $\beta$ وهذا خُلفٌ واضح.

- ليكن $E=\mathbb{K}[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، ولنتأمّل تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، وجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $E$ تحقّق $\deg P_n=\varphi(n)$. عندئذ تكون الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّةً. وفي الحالة الخاصّة التي يكون فيها $\varphi(n)=n$ أيّاً كان $n$ من $\mathbb{N}$، تُكوِّن الجماعةُ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساساً للفضاء $E$.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، ولتكن $n$ من $\mathbb{N}^*$. تكوّن الجملة $(e_k)_{1\le k\le n}$، و $e_k$ هو العنصر $(0,\ldots,0,\underset{k}{1},0,\ldots,0)$ من $\mathbb{K}^n$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^n$ نسميّه **الأساس القانونيّ**.

- ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديليّاً، ولتكن $I$ مجموعة غير خالية. نعرّف في حالة $i$ من $I$ العنصر $e_i$ بأنّه العنصر $e_i=(\delta_{i,j})_{j\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$، حيث $\delta_{i,j}$ هو رمز كرونيكر Kronecker الذي يساوي $1$ عندما $i=j$ ويساوي $0$ عندما $i\ne j$، عندئذ تكوّن الجماعة $(e_i)_{i\in I}$، أساساً للفضاء $\mathbb{K}^{(I)}$ نسميّه **الأساس القانونيّ**.

- وفقاً للتعريف السابق، تكوّن الجماعة $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ الأساس القانوني لفضاء كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$، الذي يساوي $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

3-5. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$، وليكن $u$ تطبيقاً خطّياً من $\mathcal{L}(E,F)$، ولتكن $I$ مجموعة غير خالية، و $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E$.

① إذا كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ حرةً أيضاً.

② إذا كان $u$ متبايناً وكانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة، كانت $(u(x_i))_{i\in I}$ جماعة حرّة.

③ إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ جماعة مولِّدة، كان $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{vect}\big((u(x_i))_{i\in I}\big)$.

**الإثبات**

الإثبات بسيطٌ انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ. ❐

3-6. **مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $(e_i)_{i\in I}$ أساساً للفضاء $E$، ولتكن $(y_i)_{i\in I}$ جماعة من $F$. عندئذ يوجد تطبيق خطّي وحيد $u$ من $\mathcal{L}(E,F)$ يُحقّق $\forall i \in I,\;\; u(e_i) = y_i$.

**الإثبات**

نثبت أوّلاً الوحدانيّة. ليكن $u$ و $v$ تطبيقين خطّيين من $\mathcal{L}(E,F)$ يحقّقان

$$\forall i \in I,\;\; u(e_i) = y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\;\; v(e_i) = y_i$$

عندئذ يكون $\forall i \in I,\;\; (u-v)(e_i) = 0$ ومن ثَمّ

$$\{e_i : i \in I\} \subset \ker(u-v)$$

ولمّا كان $\ker(u-v)$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $E$ كان

$$E = \operatorname{vect}((e_i)_{i\in I}) \subset \ker(u-v)$$

ومنه ينتج أنّ $\forall x \in E,\;\; (u-v)(x) = 0$، وهذا يكافئ قولنا $u = v$.

لإثبات الوجود، نتأمّل التطبيقين الخطّيين

$$\Psi : \mathbb{K}^{(I)} \to E : (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$$

$$\Theta : \mathbb{K}^{(I)} \to F : (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i y_i$$

إنّ $\Psi$ تقابلٌ خطّي لأنّ $(e_i)_{i\in I}$ أساس للفضاء $E$، ومن ثَمّ يكون $u = \Theta \circ \Psi^{-1}$ تطبيقاً من $\mathcal{L}(E,F)$، يحقّق وضوحاً الشرط $\forall i \in I,\;\; u(e_i) = y_i$. ❐

## 4. المجموع المباشر والفضاءات المتتامّة

4-1. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $E_1$ و $E_2$ فضاءَيْن شعاعيّين جزئيين من $E$. نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = E_1 + E_2$ **مجموع مباشر** للفضاءين الجزئيين $E_1$ و $E_2$، ونكتب عندها $F = E_1 \oplus E_2$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$، نقول إنّ الفضاء الشعاعي الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموع مباشر للجماعة $(E_i)_{i\in I}$، ونكتب عندها $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall i \in I,\ E_i \cap \Big( \sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j \Big) = \{0\}$$

☜ من المهم الإشارة هنا إلى أنّ الشرط السابق **لا** يكافئ قولنا $E_i \cap E_j = \{0\}$ وذلك أيّاً كان الدليلان المختلفان $i$ و $j$ من $I^2$.

4-2. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $E_1$ و $E_2$ فضاءين شعاعيّين جزئيين من $E$ ، نقول إنّ $E_1$ و $E_2$ **متتامّان** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$E = E_1 \oplus E_2$$

وبوجه عام، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$، نقول إنّ الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ **متتامّة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

4-3. **مبرهنة** : ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$. عندئذ يكون الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا كانت جماعةً معدومةً كلُّ جماعةٍ شبهَ معدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ محقّقة للشرطين :

$$\forall i \in I,\quad x_i \in E_i \quad \text{و} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0 .$$

أي مهما تكن $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$، يكن

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i = 0\Big) \wedge \Big(\forall i \in I,\, x_i \in E_i\Big) \Rightarrow \Big(\forall i \in I,\, x_i = 0\Big)$$

**الإثبات**

لنفترض أولاً أنّ $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$ . ولتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة تنتمي إلى الفضاء $E^{(I)}$ وتُحقّق الشرطين :

$$\sum_{i\in I} x_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, x_i \in E_i$$

وليكن $k$ دليلاً من $I$ . عندئذ يكون لدينا

$$x_k = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} (-x_i) \in E_k \bigcap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right) = \{0\}$$

ومن ثَمّ $x_k = 0$ . إذن لقد أثبتنا أنّ $\forall k \in I,\, x_k = 0$ .

وبالعكس، ليكن $k$ دليلاً من $I$، وليكن $y$ عنصراً من $E_k \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right)$ . توجد عندئذ جماعة شبه معدومة $(y_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$ من $E^{I\setminus\{k\}}$ تُحقّق

$$y = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} y_i$$

نعرّف إذن الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ بالعلاقة :

$$x_i = \begin{cases} -y_i & : \quad i \in I\setminus\{k\} \\ y & : \quad i = k \end{cases}$$

فيكون $\forall i \in I,\, x_i \in E_i$ و $\sum_{i\in I} x_i = 0$ . إذن ينتج من الفرْض أنّ $x_k = 0$ ، ومن ثَمّ $y = 0$ . فنكون قد أثبتنا أنّ

$$E_k \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{k\}} E_i\right) = \{0\}$$

وذلك أيّاً كان $k$ من $I$ . ❐

4-4. **نتيجة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ . ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$ . نفترض أنّ الفضاء الجزئي $F = \sum_{i\in I} E_i$ مجموعٌ مباشرٌ.

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $E\setminus\{0\}$ تحقّق الشرطَ $\forall i \in I,\, x_i \in E_i$ . عندئذ تكون الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة.

### الإثبات

لتكن $(a_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة من $\mathbb{K}^{(I)}$، تُحقّق $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ . فإذا عرّفنا، في حالة $i$ من $I$، $y_i = a_i x_i$، حصلنا على جماعة $(y_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$، تحقّق الشرطين

$$\sum_{i\in I} y_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, y_i \in E_i$$

ولمّا كان المجموع $F = \bigoplus_{i\in I} E_i$ مباشراً استنتجنا أنّ $\forall i \in I,\, y_i = a_i x_i = 0$، بمقتضى المبرهنة السابقة، ولكن $\forall i \in I,\, x_i \neq 0$، إذن $\forall i \in I,\, a_i = 0$ . ❑

4-5. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ . ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة منتهية من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$ . عندئذ يكون المجموع

$$F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

مجموعاً مباشراً، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall k \in \{2,\ldots,n\}, \quad E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \{0\}$$

### الإثبات

ليكن $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عنصراً من $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ يُحقّق

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

إذا كانت المجموعة $\mathcal{J} = \left\{ j \in \mathbb{N}_n : x_j \neq 0 \right\}$ غير خالية، عرّفنا $k = \max \mathcal{J}$، وكان لدينا من ثَمّ :

$$0 \neq x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-x_i) \in E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \left\{0\right\}$$

وهذا تناقض. إذن المجموعة $\mathcal{J}$ خالية أي $\forall j \in \mathbb{N}_n,\, x_j = 0$ . وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى المبرهنة 4-3. ❑

4-6. **مبرهنة وتعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$. تكون الجماعةُ $(E_i)_{i\in I}$ متتامّة، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : أيّاً كان $x$ من $E$ **توجد** في $E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة **وحيدة** $(x_i)_{i\in I}$ تُحقّق الشرطين

$$x=\sum_{i\in I}x_i \quad \text{و} \quad \forall i\in I,\, x_i\in E_i$$

وإذا كانت الجماعة $(E_i)_{i\in I}$ جماعة متتامّة، وكان $i$ دليلاً من $I$، أسمينا التطبيق $p_i : E\to E$ الذي يقرن بالعنصرِ $x$ من $E$ العنصرَ $x_i$، **إسقاطاً للفضاء** $E$ **على الفضاء الجزئي** $E_i$ **توازياً مع الفضاء الجزئي** $F_i=\bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}}E_j$. وتُحقِّق جماعة التطبيقات $(p_i)_{i\in I}$ الخواص الآتية:

① أيّاً كان $i$ من $I$، كان التطبيق $p_i$ خطّياً.

② أيّاً كان الدليلان **المختلفان** $i$ و $j$ من $I^2$، كان $p_i\circ p_j=p_j\circ p_i$.

③ أيّاً كان $i$ من $I$، كان $p_i\circ p_i=p_i$.

④ أيّاً كان $x$ من $E$ كانت الجماعة $(p_i(x))_{i\in I}$ شبه معدومة وكان

$$x=\sum_{i\in I}p_i(x)$$

ونعبِّر عن الخاصّة الأخيرة بكتابة $I_E=\sum_{i\in I}p_i$.

### الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $E=\bigoplus_{i\in I}E_i$، وليكن $x$ عنصراً من $E$. عندئذ نظراً إلى أنّ

$$E=\sum_{i\in I}E_i$$

توجد في $E^{(I)}$ جماعة شبه معدومة $(x_i)_{i\in I}$ تُحقِّق

$$x=\sum_{i\in I}x_i \quad \text{و} \quad \forall i\in I,\, x_i\in E_i$$

وإذا كانت $(y_i)_{i\in I}$ جماعة شبه معدومة أخرى من $E^{(I)}$ تُحقّق

$$x=\sum_{i\in I}y_i \quad \text{و} \quad \forall i\in I,\, y_i\in E_i$$

كانت الجماعة $(z_i)_{i\in I}$ المعرّفة بالعلاقة $z_i = x_i - y_i$ ، جماعة شبه معدومة مُحقّقة للشرطين:

$$\sum_{i\in I} z_i = 0 \quad \text{و} \quad \forall i \in I, z_i \in E_i$$

وكان من ثَمّ $\forall i \in I,\, z_i = 0$ ، بمقتضى المبرهنة 3-4.، أي $\forall i \in I,\, x_i = y_i$ .

ونترك إثبات الاقتضاء المعاكس، وهو أبسط، تمريناً للقارئ.

- ليكن $k$ دليلاً من $I$ ، ولنثبت أنّ التطبيق $p_k$ خطّي. نتأمّل عنصراً $(x,y)$ من $E^2$ .

عندئذ يوجد في $E^{(I)}$ جماعتان شبه معدومتين $(x_i)_{i\in I}$ و $(y_i)_{i\in I}$ تحقّقان من جهة أولى

$$x = \sum_{i\in I} x_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I, x_i \in E_i$$

ومن جهة ثانية

$$y = \sum_{i\in I} y_i \quad \text{و} \quad \forall i \in I,\, y_i \in E_i$$

عندئذ أيّاًكان $\lambda$ من $\mathbb{K}$ كان

$$\forall i \in I,\;\; x_i + \lambda \cdot y_i \in E_i \quad \text{و} \quad x + \lambda \cdot y = \sum_{i\in I}(x_i + \lambda \cdot y_i)$$

ومن ثَمّ

$$p_k(x + \lambda \cdot y) = x_k + \lambda \cdot y_k = p_k(x) + \lambda \cdot p_k(y)$$

إذن التطبيق $p_k$ تطبيق خطّي؛ أي $p_k \in \mathcal{L}(E)$ . وهي الخاصّة ① .

- ليكن $k$ دليلاً من $I$ ، وليكن $x$ عنصراً من $E_k$ . ولنعرّف الجماعة شبه المعدومة $(x_i)_{i\in I}$ من $E^{(I)}$ كما يأتي:

$$x_i = \begin{cases} 0 & : \quad i \in I \backslash \{k\} \\ x & : \quad i = k \end{cases}$$

عندئذ يكون $\forall i \in I,\, x_i \in E_i$ ، و $x = \sum_{i\in I} x_i$ . ولأنّ هذه الكتابة وحيدة نستنتج أنّ $p_k(x) = x$ وأنّ $p_i(x) = 0$ في حالة $i \neq k$ .

▪ ليكن $k$ دليلاً من $I$، وليكن $x$ عنصراً من $E_k$. عندئذ يكون $p_k(x) \in E_k$، ومن المناقشة السابقة يكون $p_k(p_k(x)) = p_k(x)$، و $p_i(p_k(x)) = 0$ في حالة $i \neq k$. وهذا يثبت الخاصتين ② و ③ معاً.

أمّا الخاصّة الأخيرة فهي واضحة من التعريف. ❐

4-7. **حالة خاصّة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $E_1$ و $E_2$ فضاءَيْن شعاعيّين جزئيَّيْن من $E$. يكون الفضاءان $E_1$ و $E_2$ متتامّين، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي: أيّاً كان $x$ من $E$ **توجد** ثنائيّة **وحيدة** $(x_1, x_2)$ من $E_1 \times E_2$ تُحقّق

$$x = x_1 + x_2$$

وإذا عرّفنا

$$p_1 : E \to E, \quad x \mapsto x_1$$

و

$$p_2 : E \to E, \quad x \mapsto x_2$$

كان التطبيقان $p_1$ و $p_2$ خطيّين، وكان

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0 \quad \text{و} \quad p_1 \circ p_1 = p_1 \quad \text{و} \quad p_2 \circ p_2 = p_2$$

وأخيراً $I = p_1 + p_2$.

يسمّى $p_1$ الإسقاط الخطّي للفضاء $E$ على $E_1$ توازياً مع $E_2$، وكذلك يسمّى $p_2$ الإسقاط الخطّي للفضاء $E$ على $E_2$ توازياً مع $E_1$.

4-8. **تعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. نقول عن تطبيق خطيّ $p$ من $\mathcal{L}(E)$ إنه إسقاط إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$، ونكتب أيضاً $p^2 = p$.

4-9. **مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $p$ من $\mathcal{L}(E)$ إسقاطاً. عندئذ يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيان $E_1$ و $E_2$ من $E$ يُحقّقان $E = E_1 \oplus E_2$، ويكون $p$ هو الإسقاط الخطّي للفضاء الشعاعي $E$ على $E_1$ توازياً مع $E_2$.

**الإثبات**

▪ لنضع $E_1 = \operatorname{Im} p$ و $E_2 = \ker p$.

- إذا كان $x$ عنصراً من $E_1 \cap E_2$، وُجِدَ عنصر $y$ في $E$ يُحقّق $x = p(y)$ وكان $p(x) = 0$. وعندئذ يكون

$$0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$$

ومنه $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

- ومن ناحية أخرى، إذا كان $x$ عنصراً من $E$ كان $x = x_1 + x_2$ حيث

$$x_1 = p(x) \in E_1 \quad \text{و} \quad x_2 = x - p(x) \in E_2$$

لأنّ

$$p(x_2) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$$

ومنه نستنتج أنّ

$$E = E_1 \oplus E_2$$

- وأخيراً لقد وجدنا فيما سبق أنّه أيّاً كان $x$ من $E$، كان $p(x) = x_1$ هو الإسقاط الخطيّ للشعاع $x$ على الفضاء الجزئي $E_1$ توازياً مع $E_2$. ❐

سننهي هذه الفقرة بذكر خاصّتين بسيطتين نترك إثباتهما المباشر تمريناً للقارئ.

**4-10. مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة **متتامّة** من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$. نفترض أنّه، أيّاً كان $i$ من $I$، يوجد أساس $(e_{i,j})_{j\in J_i}$ للفضاء الجزئي $E_i$. عندئذ تكوّن الجماعة التالية

$$(e_{i,j})_{(i,j)\in K} \quad \text{حيث} \quad K = \bigcup_{\ell\in I} \big(\{\ell\} \times J_\ell\big)$$

أساساً للفضاء $E$.

**4-11. مبرهنة**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $(E_k)_{1\le k\le n}$ جماعة متتامّة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من $E$. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to E, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$$

تقابلاً خطيّاً.

## 5. فضاءُ خارجِ القسمة

**1-5. مبرهنة وتعريف**. ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $H$ فضاءً شعاعيّاً جزئياً من $E$. تُعرِّف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}_H$ المعرّفة كما يلي :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad x\,\mathcal{R}_H\,y \Leftrightarrow x - y \in H$$

علاقة تكافؤ على $E$. نرمز بالرمز $E/H$ إلى مجموعة صفوف التكافؤ بالقياس $\mathcal{R}_H$. وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من $E/H$، وكان $\lambda$ عدداً من $\mathbb{K}$، كان كلٌّ من المجموعتين:

$$[x]+[y] = \left\{ x_1 + y_1 : (x_1, y_1) \in [x] \times [y] \right\}$$
$$\lambda \cdot [x] = \left\{ \lambda \cdot x_1 : x_1 \in [x] \right\}$$

عنصراً من $E/H$. هذا يتيح لنا تزويد المجموعة $E/H$ بقانوني التشكيل $(+)$ و $(\cdot)$ اللذين يجعلان من $\left(E/H,+,\cdot\right)$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، نسمّيه **فضاءَ خارجِ قسمةِ** $E$ على الفضاء الجزئي $H$.

وفي هذه الحالة يكون التطبيقُ

$$Q_H : E \to E/H : x \mapsto [x]$$

تطبيقاً خطيّاً غامراً، نسميّه **الغمر القانوني**.

**الإثبات**

الإثبات تحقُّقٌ مباشر من التعاريف. نترك تفاصيله للقارئ. ❒

**2-5. مبرهنة**. ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعيّين على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. وليكن $u$ تطبيقاً خطيّاً من $\mathcal{L}(E,F)$.

عندئذ يوجد تقابلٌ خطّي

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ Q\downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker u & \xrightarrow{\tilde{u}} & \operatorname{Im} u \end{array}$$

$$\tilde{u} : E/\ker u \to \operatorname{Im} u$$

يحقّق المساواة $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$، حيث $Q : E \to E/\ker u$ هو الغمر القانوني، و $i : \operatorname{Im} u \to F, x \mapsto x$.

### الإثبات

ليكن $[x]$ عنصراً من $E/\ker u$ . عندئذ يأخذ $u$ قيمة واحدة على جميع عناصر $[x]$. أي :

$$\operatorname{card}\left(\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\}\right) = 1$$

وذلك لأنه إذا كان $(\alpha,\beta)$ من $[x]\times[x]$ كان $\alpha-\beta \in \ker u$ ، ومن ثمّ

$$u(\alpha-\beta) = 0$$

أي $u(\alpha) = u(\beta)$ .

لنعرِّف إذن $\tilde{u}([x])$ بأنه العنصر الوحيد الموجود في المجموعة $\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\}$ أي

$$\left\{u(\alpha) : \alpha \in [x]\right\} = \left\{\tilde{u}([x])\right\}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\tilde{u}$ تطبيق من $E/\ker u$ إلى $\operatorname{Im} u$ . وإذا كان $[x]$ و $[y]$ عنصرين من $E/\ker u$ وكان $\lambda$ من $\mathbb{K}$ ، كان لدينا $[x+\lambda\cdot y] = [x]+\lambda\cdot[y]$ ومن ثمّ

$$\begin{aligned}\tilde{u}([x]+\lambda\cdot[y]) = \tilde{u}([x+\lambda\cdot y]) &= u(x+\lambda\cdot y)\\ = u(x)+\lambda\cdot u(y) &= \tilde{u}([x])+\lambda\cdot\tilde{u}([y])\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ $\tilde{u}$ تطبيق خطّي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$ .

ومن جهة أخرى، من الواضح أنّ $\tilde{u}$ تطبيق غامر لأنّ $\forall x \in E,\ \ \tilde{u}([x]) = u(x)$ . وهو أيضاً متباينٌ لأنّ

$$[x] \in \ker\tilde{u} \Rightarrow \tilde{u}([x]) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker u \Rightarrow [x] = 0$$

نستنتج أنّ $\tilde{u}$ تقابل خطّي من $\mathcal{L}(E/\ker u, \operatorname{Im} u)$ . وأخيراً تنتج العلاقة

$$u = i\circ\tilde{u}\circ Q$$

من المساواة الواضحة : $\forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x)$ . ❐

# تمرينات

**التمرين** 1. ليكن $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيقاً متبايناً. ولتكن $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جماعة من فضاء $\mathbb{K}[X]$ كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = \varphi(n)$. أثبت أنّ الجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حرّة.

**الحل**

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k P_k = 0$ حيث $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. نعلم أنّ المجموعة

$$\mathcal{S} = \left\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\right\}$$

مجموعة جزئيّة منتهية أو خالية من $\mathbb{N}$، فإذا افترضنا جدلاً أنّ $\mathcal{S}$ غير خالية، كانت المجموعة $\varphi(\mathcal{S})$ مجموعة جزئيّة منتهية وغير خالية من $\mathbb{N}$، فلها أكبر عنصر. أي يوجد في $\mathcal{S}$ عنصرٌ $\ell$ يحقّق

$$\varphi(\ell) = \max\left\{\varphi(k) : k \in S\right\}$$

والعنصرُ $\ell$ وحيدٌ لأنّ $\varphi$ متباينٌ. وعلى هذا، نستنتج من المساواة

$$\alpha_\ell P_\ell = \sum_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \alpha_k P_k$$

أنّ

$$\begin{aligned}\varphi(\ell) = \deg(\alpha_\ell P_\ell) &\leq \max_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \deg(\alpha_k P_k)\\ &\leq \max_{k\in\mathcal{S}\setminus\{\ell\}} \varphi(k) < \varphi(\ell)\end{aligned}$$

وهذا التناقض الواضح دليلٌ على وجوب كون المجموعة $\mathcal{S}$ خالية. أي إنّ $\alpha_k = 0$ أيّاً كانت قيمة الدليل $k$ من $\mathbb{N}$. فالجماعة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جماعة حرّة. ■

**التمرين** 2. ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاءَ التوابع من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. نعرّف أيّاً كان $\alpha$ من $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f_\alpha$ بالعلاقة $f_\alpha(x) = \cos\alpha x$. أثبت أن الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ حرّة في $E$.

**مساعدة** : احسب

$$I(\alpha,\beta) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t \cdot \cos\beta t\,\mathrm{d}t$$

## الحل

لنبدأ أوّلاً بملاحظة أنّه في حالة $\alpha \neq \beta$ لدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t\cdot\cos\beta t\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2T}\int_0^T\Big(\cos(\alpha+\beta)t+\cos(\alpha-\beta)t\Big)\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)T}{(\alpha+\beta)T}+\frac{\sin(\alpha-\beta)T}{(\alpha-\beta)T}\right)\end{aligned}$$

ومن ثمّ $I(\alpha,\beta)=0$ في حالة $\alpha\neq\beta$.

أمّا في حالة $\alpha=\beta$ فلدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha t\cdot\cos\alpha t\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2T}\int_0^T\Big(1+\cos 2\alpha t\Big)\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2\alpha T}{2\alpha T}\right)\end{aligned}$$

إذن $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}$ في حالة $\alpha=\beta$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّ $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}$ حيث $\delta_{\alpha,\beta}$ هو رمز كرونيكر، الذي يساوي الواحد في حالة تساوي الدليلين والصفر في غير هذه الحالة.

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha f_\alpha=0$ حيث $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\in\mathbb{R}^{(\mathbb{R}_+^*)}$. عندها

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha f_\alpha f_\beta=0$$

ومن ثمّ

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\forall T\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha\int_0^T f_\alpha(t)f_\beta(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

وبالقسمة على $T$ ثمّ جعل $T$ تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\lambda_\alpha I(\alpha,\beta)=0$$

ولمّا كان $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\delta_{\alpha,\beta}$ استنتجنا أنّ المجموع السابق يساوي $2\lambda_\beta$. إذن

$$\forall\beta\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \lambda_\beta=0$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

**التمرين** 3. ليكن $E=\mathbb{K}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ التي لا تزيد درجتها على $n$ . أثبت أنّنا نعرّف تطبيقاً خطيّاً $\varphi$ من $E$ إلى $E$ بالعلاقة

$$\varphi(P)=X(1-X)P'(X)+nXP(X)$$

واستنتج أن الجملة $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\le k\le n}$ حرّة في $E$ . في حالة عدد طبيعي $p$ من $\{0,1,\ldots,n\}$ ، عبّر عن كثير الحدود $X^p$ بصفته تركيباً خطيّاً في عناصر هذه الجملة، ماذا تستنتج ؟

**الحل**

- من الواضح أنّ $\varphi$ هو مقصور تطبيق خطّي من $\mathcal{L}\left(\mathbb{K}[X]\right)$ على الفضاء الجزئي $\mathbb{K}_n[X]$ . ونلاحظ أنّه في حالة $P=X^k$ و $0\le k\le n$ يكون

$$\varphi(X^k)=kX^k+(n-k)X^{k+1}$$

إذن صورة كلِّ عنصرٍ من $\mathbb{K}_n[X]$ وفق $\varphi$ تنتمي فعلاً إلى $\mathbb{K}_n[X]$ . وعليه يعرّف $\varphi$ تطبيقاً خطِّياً من $\mathbb{K}_n[X]$ إلى $\mathbb{K}_n[X]$ .

- لنعرّف في حالة $0\le k\le n$ كثير الحدود $Q_k=X^k(1-X)^{n-k}$ فنجد أنّ

$$\begin{aligned}\varphi(Q_k)&=\left(kX^k(1-X)^{n-k+1}-(n-k)X^{k+1}(1-X)^{n-k}\right)\\&\quad+nX^{k+1}(1-X)^{n-k}\\&=X^k(1-X)^{n-k}\left(k-kX-(n-k)X+nX\right)\\&=kX^k(1-X)^{n-k}=kQ_k\end{aligned}$$

- لنتأمّل إذن المجموعة $\mathcal{N}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\mathcal{N}=\left\{k\in\{0,1,\ldots,n\}:\text{جملة حرّة}\ (Q_0,Q_1,\ldots,Q_k)\right\}$$

من الواضح أنّ $\mathcal{N}\ne\varnothing$ لأنّ $0\in\mathcal{N}$ . نعرّف إذن $\ell=\max(\mathcal{N})$ .

فإذا كان $\ell<n$ عنى ذلك أنّ الجملة $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell,Q_{\ell+1})$ مرتبطة خطياً، وأنّ الجملة $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell)$ حرّة. وعليه يمكن التعبير عن $Q_{\ell+1}$ بصفته عبارةً خطيّةً في كثيرات الحدود $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_\ell)$ ، فتوجد أعداد $(\alpha_k)_{0\le k\le\ell}$ تُحقِّق

$$Q_{\ell+1}=\alpha_0Q_0+\alpha_1Q_1+\cdots+\alpha_kQ_k+\cdots+\alpha_\ell Q_\ell$$

وبتطبيق $\varphi$ على طرفي هذه المساواة نستنتج أيضاً أنّ

$$(\ell+1)Q_{\ell+1}=\alpha_1Q_1+\cdots+\alpha_kkQ_k+\cdots+\alpha_\ell\ell Q_\ell$$

ومن ثَمّ، بضرب المساواة الأولى بالعدد $\ell + 1$ وطرح الثانية منها، نستنتج أنّ

$$0 = \alpha_0(\ell+1)Q_0 + \alpha_1 \ell Q_1 + \cdots + \alpha_k(\ell+1-k)Q_k + \cdots + \alpha_\ell Q_\ell$$

ولمّا كانت الجملة $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_\ell)$ حرّة، استنتجنا من المساواة السابقة أنّ

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,\ell\}, \quad \alpha_k(\ell+1-k) = 0$$

وعليه يجب أن يكون $\alpha_k = 0$ في حالة $0 \le k \le \ell$، وهذا يقتضي أنّ $Q_{\ell+1} = 0$، هذا يناقض كون $\deg Q_{\ell+1} = n$ . نستنتج من هذا التناقض أنّه يجب أن يكون $\ell = n$، وهذا يعني أنّ الجملة $(Q_k)_{0\le k\le n}$ حرّة. وهي النتيجة المطلوبة.

- ليكن $p$ من $\{0,1,\ldots,n\}$ . بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned} 1 = (X+1-X)^{n-p} &= \sum_{r=0}^{n-p} C_{n-p}^r X^r (1-X)^{n-p-r} \\ &= \sum_{k=p}^{n} C_{n-p}^{k-p} X^{k-p}(1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

نستنتج بعد الضرب بالمقدار $X^p$ أنّ

$$X^p = \sum_{k=p}^{n} C_{n-p}^{k-p} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=p}^{n} C_{n-p}^{k-p} Q_k$$

وعلى هذا تكون الجملة $(Q_k)_{0\le k\le n}$ في آن معاً جملة حرّة وجملة مولِّدة للفضاء $\mathbb{K}_n[X]$ فهي إذن أساسٌ لهذا الفضاء. ■

**التمرين 4.** ليكن $E = \mathbb{K}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ التي لا تزيد درجتها على $n$ . ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$ . نعرّف، أيّاً كان $j$ من $\{0,1,\ldots,n\}$، كثيرَ الحدود $\ell_j$ بالعلاقة

$$\ell_j(X) = \prod_{0\le k\le n, k\ne j} \frac{X-\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k}$$

أثبت أن الجملة $(\ell_j)_{0\le j\le n}$ أساس للفضاء $E$ . وأنّ كلَّ كثير حدود $P$ من $E$ يكتب بطريقة وحيدة بالصيغة: $P = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k)\cdot \ell_k$ .

**الحل**

لنلاحظ أنّ $\ell_j(\alpha_i) = \delta_{i,j}$ في حالة $i$ و $j$ من $\{0,1,\ldots,n\}$. فإذا كان $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \ell_j = 0$ استنتجنا بتعويض $X = \alpha_i$ في هذه العبارة أنّ $\lambda_i = 0$ وذلك أيّاً كان الدليل $i$ من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$، وهذا ما يثبتُ أنّ الجملة $(\ell_j)_{0\le j\le n}$ جملة حرّة.

ومن جهة أخرى، ليكن $P$ من $\mathbb{K}_n[X]$. عندئذ نعرّف كثير الحدود

$$Q = P - \sum_{j=0}^{n} P(\alpha_j)\ell_j$$

فنلاحظ أنّ $\deg Q \le n$، وأنّ $Q$ يقبل الأعداد $\alpha_0$ و $\alpha_1$ و $\cdots$ و $\alpha_n$ التي عددها $n+1$ جذوراً، فلا بُدّ أن يكون $Q = 0$، أي أن يكون $P = \sum_{j=0}^{n} P(\alpha_j)\ell_j$. ■

**التمرين** 5. لتكن $(e_k)_{0\le k\le n}$ جملة حرّة في فضاء شعاعي $E$ على حقل تبديلي $\mathbb{K}$. ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ عناصرَ متباينةً مثنى مثنى من $\mathbb{K}$. أثبت أن الجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$ المعرّفة بالعلاقات $f_k = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i)^k e_i$ جملة حرّة أيضاً.

**الحل**

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة بعناصر الجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$. مثلاً $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$ عندئذ

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\alpha_i)^k\right) e_i = 0$$

فإذا تأملنا كثير الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ كان $\deg P \le n$ وكان

$$\sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) e_i = 0$$

ولأنّ الجملة $(e_k)_{0\le k\le n}$ جملةٌ حرّة استنتجنا أنّ $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\},\ P(\alpha_i) = 0$، إذن يقبل كثير الحدود $P$ الذي لا تزيد درجته عن $n$ عدداً من الجذور يزيد تماماً عن $n$. فهو إذن معدوم، أي $P = 0$. وهذا يعني أنّ الأمثال $(\lambda_k)_{0\le k\le n}$ معدومة، والجملة $(f_k)_{0\le k\le n}$ حرّة. ■

**التمرين** 6. ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$، وليكن $P$ كثير حدود من الدرجة $n$ في $\mathbb{R}[X]$، ولتكن $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ أعداداً حقيقيّة مختلفة مثنى مثنى. أثبت أن الجملة

$$\left(P(X+\alpha_k)\right)_{0\le k\le n}$$

جملة حرّة في $\mathbb{R}[X]$.

**الحل**

لنتأمّل عبارة خطيّة معدومة $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(X+\alpha_k) = 0$ بعناصر الجملة المعطاة. لمّا كان

$$P(X+\alpha_k) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\alpha_k^\ell$$

استنتجنا أنّ

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \sum_{\ell=0}^{n} \frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\alpha_k^\ell\alpha_k^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\alpha_k^\ell\right) = 0$$

لنعرّف إذن $b_\ell = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\alpha_k^\ell$ في حالة $0 \le \ell \le n$، ولنثبتْ أنّ هذه الأعداد معدومة. لتكن

$$\mathcal{N} = \left\{\ell \in \{0,1,\ldots,n\} : b_\ell \neq 0\right\}$$

فإذا افترضنا أنّ $\mathcal{N} \neq \varnothing$ عرّفنا $p = \min \mathcal{N}$. ولكن، لمّا كان $\deg P = n$ استنتجنا أنّه في حالة $0 \le \ell \le n$ لدينا $\deg P^{(\ell)} = n - \ell$. وينتج من المساواة ما يأتي

$$\sum_{\ell=p}^{n} \frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!} b_\ell = 0$$

- فإذا كان $p = n$ كان $P^{(n)}(X) b_n = 0$، وهذا يناقض تعريف $p$ وكون $P^{(n)}$ ثابتاً غير معدوم.
- وإذا كان $p < n$ استنتجنا من المساواة

$$\frac{P^{(p)}(X)}{p\,!} b_p = -\sum_{\ell=p+1}^{n} \frac{P^{(\ell)}(X)}{\ell\,!} b_\ell$$

أنّ

$$n - p = \deg\left(b_p P^{(p)}\right) \le \max_{p+1\le \ell \le n} \deg\left(b_\ell P^{(\ell)}\right) \le n - p - 1$$

وهذا أيضاً خُلفٌ واضح.

وعليه لا بُدّ أن تكون المجموعة $\mathcal{N}$ خالية؛ أي أن يكون

$$\forall \ell \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad b_\ell = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \alpha_k^\ell = 0$$

وهذا يُكافئ أنّه

$$\forall \left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell b_\ell = 0$$

أو

$$\forall \left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \alpha_k^\ell\right) = 0$$

وأخيراً

$$\forall Q \in \mathbb{K}_n[X], \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q(\alpha_k) = 0$$

فإذا اخترنا، في حالة $0 \leq q \leq n$، كثيرَ الحدود $Q$ مساوياً $\prod_{j=0, j\neq q}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_q - \alpha_j}$ استنتجنا أنّ $\lambda_q = 0$ . وهذا يثبت الاستقلال الخطّي للجملة $\left(P\left(X + \alpha_k\right)\right)_{0\leq k\leq n}$. ■

**التمرين 7.** ادرس في $C\left(]0,1[, \mathbb{R}\right)$، الارتباط الخطي للجملة $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ في حالة $f(x) = \ln(1+x)$ .

**الحل**

لنلاحظ أوّلاً أنّه في جوار الصفر لدينا

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

وكذلك

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 + O(x^4) \\ &= x - x^2 + \frac{7x^3}{6} + O(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{7x^3}{6}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 + O(x^4) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + O(x^4) \end{aligned}$$

وعليه إذا عرّفنا $g = af + bf \circ f + cf \circ f \circ f$ كان

$$g(x) = (a+b+c)x - \frac{a+2b+3c}{2}x^2 + \frac{2a+7b+15c}{6}x^3 + O(x^4)$$

فإذا كان $af + bf \circ f + cf \circ f \circ f = 0$ استنتجنا، بسبب وحدانيّة النشر المحدود، أنّ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a + 2b + 3c &= 0 \\ 2a + 7b + 15c &= 0 \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ، بعد طرح المعادلة الأولى من الثانية وطرح ضعفيها من الثالثة، أنّ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \\ 5b + 13c &= 0 \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ، بعد طرح خمسة أضعاف المعادلة الثانية من الثالثة، أنّ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \\ 3c &= 0 \end{aligned}$$

إذن $0 = a = b = c$، والجملة المدروسة حرّة. ■

**التمرين 8.** ليكن $E$ فضاء التوابع من الصف $C^\infty$ على $\mathbb{R}$، والدوريّة ذات الدور $2\pi$. وليكن $T$ التطبيق الخطيّ من $\mathcal{L}(E)$ المعرّف بالعلاقة $T(f) = f''$. عيّن صورة ونواة التطبيق الخطّي $T$.

**الحل**

■ ليكن $f$ عنصراً من $\ker T$. عندئذ نستنتج من كون $f'' = 0$ على $\mathbb{R}$ أنّه يوجد عددان حقيقيّان $a$ و $b$ يُحقّقان $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. ولمّا كان التابع $f$ يقبل العدد $2\pi$ دوراً وجب أن يكون $b = f(0) = f(2\pi) = 2\pi a + b$ ومن ثَمّ $a = 0$. إذن يجب أن يكون $f$ ثابتاً. فإذا رمزنا بالرمز $\mathbb{1}$ إلى التابع الثابت $\mathbb{1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ استنتجنا أنّ $\ker T = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ لأنّ الاحتواء المُعاكس واضحٌ.

■ ليكن $g$ عنصراً من $\operatorname{Im} T$ ، عندئذ يوجد $f$ من $E$ يُحقِّق $g = f''$ ، وعندئذ يكون

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = \big[\,f'(t)\big]_0^{2\pi} = f'(2\pi) - f'(0) = 0$$

لأنّ $f$ يقبل العدد $2\pi$ دوراً. وبالعكس، ليكن $g$ عنصراً من $E$ يُحقّق $\int_0^{2\pi} g = 0$ .
عندئذ نعرّف التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi} tg(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi} tg(t)\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

فنلاحظ مباشرة أنّ $f$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وأنّ

$$f'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tg(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ يقبل $f$ الاشتقاق مرّة ثانية على $\mathbb{R}$ ، ويكون

$$f''(x) = g(x)$$

وعليه، نستنتج من كون $g$ ينتمي إلى الصف $C^\infty$ ، أنّ $f$ ينتمي أيضاً إلى الصف $C^\infty$ على $\mathbb{R}$ . ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\; f'(x+2\pi) - f'(x) = \int_x^{x+2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

إذ استفدنا من كون التابع $g$ يقبل العدد $2\pi$ دوراً، ومن الفرْض $\int_0^{2\pi} g = 0$ . وعليه يكون

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+2\pi) - f(x) = f(2\pi) - f(0) = 2\pi\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

والتابع $f$ يقبل العدد $2\pi$ دوراً، إذن $f\in E$ ويُحقّق $T(f) = f'' = g$ . وهكذا نكون أثبتنا أنّ

$$\operatorname{Im} T = \left\{ g\in E : \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \right\}$$ ■

**التمرين 9.** ليكن $E$ و $F$ فضاءَين شعاعيّين على حقل $\mathbb{K}$ . وليكن $u$ تطبيقاً خطّياً من $E$ إلى $F$ . نتأمّل فضاءَين شعاعيّين جزئيّين $E_1$ و $E_2$ من $E$ ، وفضاءَين شعاعيّين جزئيّين $F_1$ و $F_2$ من $F$ . ماذا تقول عن $u(E_1+E_2)$ ، وعن $u(E_1\cap E_2)$ ، وعن $u^{-1}(F_1+F_2)$ وعن $u^{-1}(F_1\cap F_2)$ ؟

**الحل**

- من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} u(E_1+E_2) &= \{u(x_1+x_2) : x_1\in E_1, x_2\in E_2\} \\ &= \{u(x_1)+u(x_2) : x_1\in E_1, x_2\in E_2\} \\ &= u(E_1)+u(E_2) \end{aligned}$$

- ومن خواص الصورة العكسيّة نعلم أنّ $u^{-1}(F_1\cap F_2) = u^{-1}(F_1)\cap u^{-1}(F_2)$ .
- أمّا خواص الصورة المباشرة، فتفيدنا في أنّ $u(E_1\cap E_2)\subset u(E_1)\cap u(E_2)$ . ولكن ليس هناك مساواة بوجه عام. لنتأمّل على سبيل المثال التطبيق الخطّي:

$$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto (x,0)$$

والفضاءَيْن الجزئيَّين $E_1=\mathbb{R}\times\{0\}$ و $E_2=\{(x,x) : x\in\mathbb{R}\}$ . عندئذ

$$E_1\cap E_2=\{0\} \quad \text{و} \quad u(E_1)=u(E_2)=E_1 ،$$

وهذا يثبت أنّ $u(E_1\cap E_2)\subsetneq u(E_1)\cap u(E_2)$ في هذه الحالة.

- وأخيراً من الواضح أنّ

$$u^{-1}(F_1)\subset u^{-1}(F_1+F_2) \quad \text{و} \quad u^{-1}(F_2)\subset u^{-1}(F_1+F_2)$$

إذن

$$u^{-1}(F_1)+u^{-1}(F_2)\subset u^{-1}(F_1+F_2)$$

ولكن ليس هناك مساواة بوجه عام. لنتأمّل على سبيل المثال التطبيق الخطّي :

$$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto (x,0)$$

والفضاءَيْن الجزئيَّين $F_1=\{(x,-x) : x\in\mathbb{R}\}$ و $F_2=\{(x,x) : x\in\mathbb{R}\}$ من $\mathbb{R}^2$ . عندئذ نلاحظ أنّ

$$u^{-1}(F_1)=u^{-1}(F_2)=\{(0,0)\} \quad \text{و} \quad F_1+F_2=\mathbb{R}^2$$

وهذا يثبت أنّ $u^{-1}(F_1)+u^{-1}(F_2)\subsetneq u^{-1}(F_1+F_2)$ في هذه الحالة. ■

**التمرين 10.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقل $\mathbb{K}$. وليكن $f$ و $g$ تطبيقين خطيّين من $E$.
أثبت أنّ $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

**الحل**

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} y \in f\big(\ker(g \circ f)\big) &\Leftrightarrow \exists x \in E : \big(g(f(x)) = 0\big) \wedge \big(y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E : \big(g(y) = 0\big) \wedge \big(y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(g(y) = 0\big) \wedge \big(\exists x \in E : y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(y \in \ker g\big) \wedge \big(y \in \operatorname{Im} f\big) \\ &\Leftrightarrow y \in \ker g \cap \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ صحة المساواة $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$ المطلوبة. ■

**التمرين 11.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن $u$ تطبيقاً خطّيّاً من $E$. يُحقّق الشرط $u^3 = I_E$.

1. أثبت أنّ $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.
2. أثبت الخاصتين الآتيتين.

$$\begin{aligned} \ker(u - I_E) &= \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E) \\ \operatorname{Im}(u - I_E) &= \ker(u^2 + u + I_E) \end{aligned}$$

**الحل**

1. في الحقيقة، ليكن $x$ عنصراً من $\ker(u - I_E) \cap \operatorname{Im}(u - I_E)$ عندئذ يوجد، من جهة أولى، عنصرٌ $z$ يُحقّق $x = (u - I_E)(z)$ ويكون، من جهة ثانية، $(u - I_E)(x) = 0$.
وعليه

$$\begin{aligned} 3x &= u^2(x) + u(x) + x = (u^2 + u + I_E)(x) \\ &= (u^2 + u + I_E)(u - I_E)(z) \\ &= (u^3 - I_E)(z) = 0 \end{aligned}$$

إذن $3x = 0$ أي $x = 0$. وعليه

$$\ker(u - I_E) \cap \operatorname{Im}(u - I_E) = \{0\}.$$

ومن جهة أخرى، نستفيد من المساواة $3 = X^2 + X + 1 - (X-1)(X+2)$ ، فنعرّف في حالة شعاع $x$ من $E$ الشعاعين:

$$x_2 = \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x\Big) \quad \text{و} \quad x_1 = -\frac{1}{3}\Big(u(x) + 2x\Big)$$

فيكون لدينا وضوحاً $x_2 \in \ker(u - I_E)$ لأنّ $u^3 = I_E$ ، وكذلك يكون

$$\begin{aligned} x_2 + (u - I_E)(x_1) &= \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x - (u - I_E)(u(x) + 2x)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(u^2(x) + u(x) + x - u^2(x) - u(x) + 2x\Big) = x \end{aligned}$$

وعليه ينتمي $x$ إلى المجموع $\ker(u - I_E) + \operatorname{Im}(u - I_E)$ . وبذا يتمّ إثبات 1.

2. سنثبتُ صحّة الاحتواءات المختلفة.

- إذا كان $x$ عنصراً من $\ker(u - I_E)$ كان $u(x) = x$ ومن ثَمّ كان

$$3x = u^2(x) + u(x) + x = (u^2 + u + I_E)(x) \in \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$$

وعليه $\ker(u - I_E) \subset \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$ .

- وإذا كان $x$ عنصراً من $\operatorname{Im}(u^2 + u + I_E)$ وجدنا $z$ في $E$ يُحقّق

$$x = (u^2 + u + I_E)(z)$$

وعندئذ يكون

$$\begin{aligned} (u - I_E)(x) &= (u - I_E) \circ (u^2 + u + I_E)(z) \\ &= (u^3 - I_E)(z) = 0 \end{aligned}$$

أي يكون $x$ عنصراً من $\ker(u - I_E)$ . فنكون قد أثبتنا أنّ صحة المساواة

$$\ker(u - I_E) = \operatorname{Im}(u^2 + u + I_E) .$$

- وإذا كان $x$ عنصراً من $\ker(u^2 + u + I_E)$ كان $u^2(x) + u(x) + x = 0$ ، ومن ثَمّ $u^2(x) + u(x) - 2x = -3x$ أي $-3x = (u - I_E)(u(x) + 2x)$ وعليه ينتمي إلى $-3x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ أو $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ . إذن

$$\ker(u^2 + u + I_E) \subset \operatorname{Im}(u - I_E)$$

- وبالعكس، إذا كان $x$ عنصراً من $\mathrm{Im}(u-I_E)$ وجدنا $z$ في $E$ يُحقّق

$$x=(u-I_E)(z)$$

وعندئذ يكون

$$\begin{aligned}(u^2+u+I_E)(x)&=(u^2+u+I_E)\circ(u-I_E)(z)\\&=(u^3-I_E)(z)=0\end{aligned}$$

أي $x\in\ker(u^2+u+I_E)$ . فنكون قد أنجزنا إثبات المساواة :

$$\mathrm{Im}(u-I_E)=\ker(u^2+u+I_E)$$

وبذا يتم إثبات المطلوب.

**ملاحظة** : تبقى نتائج التمرين السابق صحيحة في أي حقلٍ عدده المميِّز لا يساوي $3$ .

**التمرين 12.** نتأمّل $\mathbb{C}$ فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{R}$ .

1. أعطِ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$ .
2. نعرّف في حالة $a$ و $b$ من $\mathbb{C}$ التطبيق :

$$f_{a,b}:\mathbb{C}\to\mathbb{C},f_{a,b}(z)=az+b\overline{z}$$

أثبت أنّ $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=\left\{f_{a,b}:(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}$ .

3. أعطِ الشرط اللازم والكافي على $a$ و $b$ من $\mathbb{C}$ ليكون التطبيق $f_{a,b}$ متبايناً.

**الحل**

1. الجملة $(1,\mathrm{i})$ أساسٌ للفضاء $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$ .

2. من الواضح أنّ التطبيقات $f_{a,b}$ هي تطبيقات $\mathbb{R}-$خطيّة على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ .

وبالعكس، ليكن $f$ عنصراً من $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ . عندئذ نستنتج من الخاصّة الخطيّة أنّ

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\underbrace{x+y\,\mathrm{i}}_{z})&=xf(1)+yf(\mathrm{i})\\&=\frac{z+\overline{z}}{2}f(1)+\frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}f(\mathrm{i})\\&=\frac{f(1)-\mathrm{i}\,f(\mathrm{i})}{2}z+\frac{f(1)+\mathrm{i}\,f(\mathrm{i})}{2}\overline{z}\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا

$$b = \frac{f(1) + \mathrm{i}\, f(\mathrm{i})}{2} \quad \text{و} \quad a = \frac{f(1) - \mathrm{i}\, f(\mathrm{i})}{2}$$

كان $f = f_{a,b}$ . وهذا يثبتُ أنّ

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \left\{ f_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

.3 ليكن $z$ عنصراً من $\ker f_{a,b}$ . عندئذ يكون لدينا $az + b\overline{z} = 0$ ، وكذلك $\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}z = 0$ . فإذا ضربنا المعادلة الأولى بالمقدار $\overline{a}$ والثانية بالمقدار $b$ ثمّ طرحنا المعادلتين الناتجتين طرفاً من طرف وجدنا

$$(|a|^2 - |b|^2)z = 0$$

- فإذا كان $|a| \neq |b|$ استنتجنا مما سبق أنّ $z = 0$ ، والتطبيق الخطّي $f_{a,b}$ متباينٌ.
- أمّا إذا كان $|a| = |b|$ فإمّا أن تكون هذه الطويلة المشتركة مساوية الصفر، وعندئذ يكون $f_{a,b}$ نفسه مساوياً الصفر وهو في هذه الحالة غير متباينٍ، أو أن يكون $|a| = |b| \neq 0$ وعندئذ يوجد عددٌ حقيقي $\theta$ يُحقّق $a = e^{\mathrm{i}\theta} b$ . وعندئذ لا يكون التطبيق $f_{a,b}$ ليس متبايناً في هذه الحالة أيضاً لأن $f_{a,b}(0) = 0 = f_{a,b}(\mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\theta/2})$ .

وهكذا نكون قد أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطّي $f_{a,b}$ من $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ متبايناً هو أن يكون $|a| \neq |b|$ . ■

**التمرين** .13 ليكن $E$ فضاء شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ عدده المميّز يساوي $0$ . ولنذكّر أنّ تطبيقاً خطياً $p$ من $E$ إلى $E$ يكون إسقاطاً إذا وفقط إذا كان $p \circ p = p$ .

.1 ليكن $p$ إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$ . أثبت أنه يوجد فضاءان شعاعيّان جزئيّان متتامّان $E_1$ و $E_2$ من $E$ ، يجعلان من $p$ إسقاطاً للفضاء $E$ على $E_1$ توازياً مع $E_2$ .

.2 ليكن $p$ إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$ . وليكن $\lambda$ عدداً من $\mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ . أثبت أنّ التطبيق الخطّي $p - \lambda I_E$ تشاكلٌ تقابلي خطّي.

.3 ليكن $p$ و $q$ إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$ . أثبت أن $p + q$ يكون إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$ إذا وفقط إذا كان $p \circ q = q \circ p = 0$ . عيّن في هذه الحالة صورة ونواة $p + q$ .

4. ليكن $p$ و $q$ إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$ يُحقّقان $p \circ q = 0$. أثبت أن التطبيق الخطي $r = p + q - q \circ p$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$، وعيّن صورته ونواته.

5. نقول إنّ تطبيقاً خطيّاً $u : E \to E$ يحافظ على الفضاء الشعاعي الجزئي $E_1$ من $E$ إذا وفقط إذا كان $u(E_1) \subset E_1$. ليكن $p$ إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$، وليكن $u$ تطبيقاً خطياً من $E$ إلى $E$. أثبت أن التطبيقين $u$ و $p$ يتبادلان إذا وفقط إذا حافَظَ $u$ على كلٍّ من $\ker p$ و $\operatorname{Im} p$.

6. ليكن $u : E \to E$ تطبيقاً خطياً يحقق $u^m = I_E$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$. ونفترض أنّ $u$ يحافظ على الفضاء الجزئي $E_1$ من $E$. ليكن $p$ إسقاطاً للفضاء $E$ على $E_1$. أثبت أن التطبيق الخطيّ المعرّف بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

هو أيضاً إسقاط للفضاء $E$ على $E_1$، وأن $u$ يحافظ على الفضاء الجزئي $\ker q$.

## الحل

1. يكفي أن نعرّف $E_1 = \operatorname{Im} p$ و $E_2 = \ker p$.

- فإذا كان $x$ عنصراً من $E_1 \cap E_2$ كان لدينا من جهة أولى $p(x) = 0$ ووجدنا من جهة ثانية عنصراً $z$ يُحقّق $x = p(z)$. ولكن في هذه الحالة يكون

$$0 = p(x) = p^2(z) = p(z) = x$$

أي إنّ $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. فالمجموع $E_1 + E_2$ مجموع مباشرٌ.

- وإذا كان $x$ عنصراً من $E$ عرّفنا $x_1 = p(x)$ و $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$. عندئذ يكون $x_1 \in E_1$، ويكون

$$p(x_2) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

إذن $x_2 \in E_2$. وأخيراً نرى مباشرة أنّ $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$. وهذا ما يثبتُ أنّ $E = E_1 \oplus E_2$ وأنّ الإسقاط الخطّي على $E_1$ توازياً مع $E_2$ هو التطبيق الخطّي $p$ نفسه.

2. ليكن $p$ إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$. وليكن $\lambda$ عدداً من $\mathbb{K}\backslash\{0,1\}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$(p - \lambda I_E)(p - \mu I_E) = p^2 - (\lambda + \mu)p + \lambda\mu I_E = \lambda\mu I_E + (1 - \lambda - \mu)p$$

فإذا اخترنا $\mu = 1 - \lambda$ وجدنا أنّ

$$(p - \lambda I_E)(p - (1-\lambda)I_E) = \lambda(1-\lambda)I_E$$

ولمّا كان $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ استنتجنا أنّ $p - \lambda I_E$ تقابلٌ خطّي، وأنّ تقابله العكسي هو

$$(p - \lambda I_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} p - \frac{1}{\lambda} I_E$$

3. ليكن $p$ و $q$ إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$.

- نلاحظ أوّلاً أنّ $p + q$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$ إذا وفقط إذا كان

$$(p+q) \circ (p+q) = p + q$$

وهذا يُكافئ $p \circ q + q \circ p = 0$ لأنّ $p^2 = p$ و $q^2 = q$.

- فإذا كان $p \circ q + q \circ p = 0$ استنتجنا بتركيب $p$ مع طرفي $p \circ q = -q \circ p$ أنّ

$$p^2 \circ q = -p \circ q \circ p$$

وبالاستفادة مجدّداً من $p \circ q = -q \circ p$، ومن الخاصّتين $p^2 = p$ و $q^2 = q$، نجد

$$p \circ q = -p \circ q \circ p = -(-q \circ p) \circ p = q \circ p^2 = q \circ p$$

ولأنّ $p \circ q + q \circ p = 0$، والعدد المميِّز للحقل $\mathbb{K}$ لا يساوي 2، استنتجنا من المساواتين $p \circ q + q \circ p = 0$ و $p \circ q = q \circ p$ أنّ $p \circ q = q \circ p = 0$.

- وبالعكس، إذا كان $p \circ q = q \circ p = 0$ كان $p \circ q + q \circ p = 0$، وهذا يُكافئ، كما وجدنا سابقاً، أنّ $p + q$ إسقاط من $\mathcal{L}(E)$.

- لنفترض إذن أنّ $p \circ q = q \circ p = 0$. من الواضح أنّ

$$\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$$

وبالعكس، إذا كان $x$ عنصراً من $\ker(p+q)$ كان $p(x) = -q(x)$، وعندئذ

$$p(x) = p^2(x) = p(-q(x)) = -p \circ q(x) = 0$$
$$q(x) = q^2(x) = q(-p(x)) = -q \circ p(x) = 0$$

ومن ثَمّ $x \in \ker p \cap \ker q$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q .$$

وكذلك من الواضح أنّ $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ . وبالعكس، إذا كان $y$ عنصراً من الفضاء الجزئي $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ ، أمكن كتابته بالشكل $y = p(a) + q(b)$ حيث $a$ و $b$ من $E$ ، وعندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}(p+q)(y) &= p^2(a) + p \circ q(b) + q \circ p(a) + q^2(b) \\ &= p(a) + q(b) = y\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ $y \in \operatorname{Im}(p+q)$ . فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ .

4. ليكن $p$ و $q$ إسقاطين من $\mathcal{L}(E)$ يُحقّقان $p \circ q = 0$ ، ولنعرّف

$$r = p + q - q \circ p$$

عندئذ

$$\begin{aligned} r \circ p &= p^2 + q \circ p - q \circ p^2 = p \\ r \circ q &= \cancel{p \circ} q + q^2 - q \circ \cancel{p \circ} q = q \\ r \circ q \circ p &= q \circ p \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} r \circ r &= r \circ p + r \circ q - r \circ q \circ p \\ &= p + q - q \circ p = r \end{aligned}$$

- من الواضح أنّ $\ker r \subset \ker p \cap \ker q$ . وبالعكس، إذا كان $x$ عنصراً من $\ker r$ كان

$$p(x) + q(x) = q \circ p(x) \qquad (*)$$

وعندئذ نجد بتطبيق $p$ على الطرفين أنّ

$$p^2(x) + \cancel{p \circ} q(x) = \cancel{p \circ} q \circ p(x) = 0$$

ومن ثمّ $p(x) = 0$ ، وبالعودة إلى $(*)$ نستنتج أيضاً أنّ $q(x) = 0$ . إذن ينتمي العنصر $x$ إلى $\ker p \cap \ker q$ . وهكذا نستنتج أنّ

$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$

- من الواضح أنّ $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ لأنّ $r = p + q \circ (I_E - p)$.
وبالعكس، إذا كان $y$ عنصراً من $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ أمكن كتابة $y$ بالشكل $y = p(a) + q(b)$ وعندئذ يكون

$$\begin{aligned} r(y) &= \big(p + q \circ (I_E - p)\big)\big(p(a) + q(b)\big) \\ &= p(a) + \cancel{p \circ} q(b) + q \circ \cancel{(I_E - p) \circ p}(a) + q^2(b) - q \circ \cancel{p \circ} q(b) \\ &= p(a) + q(b) = y \end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ $y \in \operatorname{Im} r$. فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

5. ليكن $p$ إسقاطاً من $\mathcal{L}(E)$، وليكن $u$ تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$. نعرّف

$$E_1 = \operatorname{Im} p \quad \text{و} \quad E_2 = \ker p$$

عندئذ، بالاستفادة من كون $E = E_1 \oplus E_2$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} p \circ u = u \circ p &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad p \circ u(x) = u \circ p(x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1 \in E_1, & p(u(x_1)) = u(x_1) \\ \forall x_2 \in E_2, & p(u(x_2)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1 \in E_1, & u(x_1) \in \operatorname{Im} p \\ \forall x_2 \in E_2, & u(x_2) \in \ker p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \big(u(E_1) \subset E_1\big) \wedge \big(u(E_2) \subset E_2\big) \end{aligned}$$

وهذا يثبت التكافؤ المطلوب.

6. ليكن $u : E \to E$ تطبيقاً خطياً يحقّق $u^m = I_E$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$. ونفترض أنّ $u$ يحافظ على الفضاء الجزئي $E_1$ من $E$. نهدف إلى إيجاد فضاء جزئي $E_2$ يتمّم الفضاء $E_1$ ويُحافظ عليه $u$.

لتحقيق ذلك نتأمّل إسقاطاً ما $p$ للفضاء $E$ على $E_1$. ونعرّف التطبيق الخطيّ $q$ بالعلاقة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

وعندئذ نلاحظ أنّه إذا كان $x$ عنصراً من $E$ كان $p(x) \in E_1$ استناداً إلى تعريف $p$، وكان أيضاً $u^k \circ p \circ u^{m-k}(x) \in u(E_1) \subset E_1$ في حالة $1 \le k < m$، وعلى هذا نستنتج مباشرة أنّ $q(x)$ ينتمي إلى $E_1$، ومن ثَمّ $\forall x \in E, q(x) \in E_1$، وهذا يُكافئ $p \circ q = q$.

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} u \circ q &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{m-k} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{m-k-1}\right) \circ u \\ &= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} u^{k} \circ p \circ u^{m-k}\right) \circ u = q \circ u \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k} \circ q \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ q \circ u^{m-k} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ q \circ u^{m-k} \\ &= \frac{1}{m} q \circ \left(\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ u^{m-k}\right) \\ &= \frac{1}{m} q \circ (mI_E) = q \end{aligned}$$

إذن $q$ هو إسقاط خطّي يتبادل مع $u$. والتطبيق $u$ يُحافظ على كلٍّ من $\operatorname{Im} q$ و $\ker q$. ولقد وجدنا أيضاً أنّ $\operatorname{Im} q \subset E_1$.

وأخيراً، إذا كان $x \in E_1$ كان $u^k(x)$ عنصراً من $E_1$ أيّاً كانت $k$ من $\{0,1,\ldots,m-1\}$، وعندئذ يكون $p \circ u^{m-k}(x) = u^{m-k}(x)$ أيّاً كانت $k$ من $\{0,1,\ldots,m-1\}$، وهذا يقتضي أن يكون

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}(x) \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ u^{m-k}(x) = x \end{aligned}$$

إذن $E_1 \subset \operatorname{Im} q$، وهذا يثبت أنّ $\operatorname{Im} q = E_1$. وعليه يكون $q$ أيضاً إسقاطاً للفضاء $E$ على $E_1$، كما إنّ التطبيق $u$ يحافظ على الفضاء الجزئي $E_2 = \ker q$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

**التمرين 14.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$، و ليكن $f : E \to E$ تطبيقاً خطّياً.

1. أثبت أن $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \ker f^2 = \ker f$.
2. أثبت أن : $E = \ker f + \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
3. نفترض أن بُعد $E$ منتهٍ[2]. أثبت تكافؤ الشروط الأربعة السابقة.

**الحل**

1. $(\Rightarrow)$ لنفترض أنّ $\ker f^2 = \ker f$، ولنتأمّل عنصراً $x$ من $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى $f(x) = 0$ ويوجد عنصرٌ $z$ في $E$ يُحقّق $x = f(z)$، ولكن نستنتج من ذلك أنّ $f^2(z) = f(x) = 0$ إذن $z$ ينتمي إلى $\ker f^2$، واستناداً إلى الفرْض، هو ينتمي إلى $\ker f$. وعليه يكون $x = f(z) = 0$. ونكون بذلك قد أثبتنا أنّ $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$ وبالعكس، لنفترض أنّ $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. إنّ الاحتواء $\ker f \subset \ker f^2$ صحيحٌ وضوحاً. ليكن $x$ عنصراً من $\ker f^2$. عندئذ يكون $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$ وهذا يقتضي، استناداً إلى الفرْض، أنّ $f(x) = 0$ أي إنّ $x$ ينتمي إلى $\ker f$.

2. $(\Rightarrow)$ لنفترض أنّ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$، ولنتأمّل عنصراً $x$ من $E$ عندئذ نستنتج من انتماء $f(x)$ إلى $\operatorname{Im} f^2$ أنّه يوجد $z$ في $E$ يُحقّق $f^2(z) = f(x)$. فإذا وضعنا $x_1 = f(z)$ و $x_2 = x - f(z)$ كان $x_1$ عنصراً من $\operatorname{Im} f$، وكان $x_2$ عنصراً من $\ker f$، وأخيراً كان $x = x_1 + x_2$. إذن أثبتنا أنّ $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.

$(\Leftarrow)$ وبالعكس، لنفترض أنّ $E = \ker f + \operatorname{Im} f$. إنّ الاحتواء $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ صحيحٌ وضوحاً. ليكن إذن $x$ عنصراً من $\operatorname{Im} f$. عندئذ يوجد $z$ في $E$ يُحقّق $x = f(z)$. استناداً إلى الفرْض، نجد في $E$ عنصرين $z_1$ و $z_2$ يُحقّقان $z = z_2 + f(z_1)$ حيث $z_2 \in \ker f$. وعندها يكون $x = f^2(z_1)$، أي يكون $x$ عنصراً من $\operatorname{Im} f^2$. فنكون قد أثبتنا أنّ $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

[2] يتطلّب هذا السؤال بعض الدراية ببحث الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البُعد.

3. لنفترض أنّ بُعد الفضاء $E$ منته. لدينا بوجه عام $\ker f \subset \ker f^2$ و $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ إذن

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \dim \ker f = \dim \ker f^2$$
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$$

وعندئذ تفيدنا المساواتان

$$\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f$$

و

$$\dim \ker f^2 = \dim E - \dim \operatorname{Im} f^2$$

في إثبات صحّة التكافؤ

$$\dim \ker f = \dim \ker f \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّه عندما يكون بُعد الفضاء $E$ منتهياً يكون

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

وهذا يُثبت تكافؤ الخواص الأربع المدروسة في هذه الحالة. ■

**ملاحظة**. يبيِّن التطبيق الخطّي $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto X^2P'$ أنّ شرط البُعد المنتهي على $E$ ضروري لتكافؤ الخواص الأربع السابقة. فهنا لدينا

$$\operatorname{Im} f = \left\{P : X^2 | P\right\} \quad \text{و} \quad \ker f = \left\{P : \deg P \le 0\right\}$$

فالمجموع $\ker f + \operatorname{Im} f$ مباشر دون أن يكون هذان الفضاءان متتامّين.

**التمرين 15.** ليكن $E$ فضاءً شعاعياً على حقل $\mathbb{K}$ عدده المميِّز لا يساوي 2. ليكن $F$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $E$ ولا يساوي $E$. وليكن $u$ تطبيقاً خطياً من $\mathcal{L}(E)$ يُحقِّق الشرط:

$$\forall x \in E \backslash F, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda_x \cdot x$$

أثبت أنه يوجد عدد $\lambda$ في $\mathbb{K}$ يُحقّق $u = \lambda I_E$.

**الحل**

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $E \backslash F$. ولنناقش حالتين.

- إذا كانت الجملة $(x, y)$ مرتبطة خطياً، وجدنا عددين $\alpha$ و $\beta$ غير معدومين معاً يُحقّقان

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ولكن، لمّا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ استنتجنا أنّ $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ . ومن ثَمّ يوجد عددٌ غير معدوم $\gamma$ يُحقّق $x = \gamma y$ . ونستنتج من المساواة $u(x) = \gamma u(y)$ أنّ

$$\lambda_x x = \gamma \lambda_y y = \lambda_y x$$

ومن ثَمّ $\lambda_y = \lambda_x$ لأنّ $x \neq 0$ .

- لنفترض إذن أنّ $(x, y)$ جملة حرّة. عندئذ يوجد $t$ في $\mathbb{K}^*$ يُحقّق $x + ty \notin F$ ، وعندئذ نستنتج من المساواة $u(x+ty) = u(x) + u(ty)$ أنّ

$$(\lambda_{x+ty} - \lambda_x)x + t(\lambda_{x+ty} - \lambda_y)y = 0$$

ولأنّ الجملة $(x, y)$ جملة حرّة، نستنتج أنّ $\lambda_y = \lambda_{x+ty} = \lambda_x$ .

إذن ليكن $a$ عنصراً ما من $E \backslash F$ ، ولنضع $\lambda = \lambda_a$ ، فنكون قد أثبتنا فيما سبق أنّ

$$\forall x \in E \backslash F, \quad \lambda_x = \lambda$$

أو

$$\forall x \in E \backslash F, \quad u(x) = \lambda x$$

لنتأمّل عنصراً $z$ من $F$ . عندئذ ينتمي العنصران $a$ و $a + z$ إلى $E \backslash F$ ، ومن ثَمّ

$$u(z) = u(a+z) - u(a) = \lambda(a+z) - \lambda a = \lambda z$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \lambda x$$

أو $u = \lambda I_E$ . ■

**ملاحظة** : لقد أثبتنا بوجه خاصّ أنّه إذا حقّق تطبيقٌ خطّي $u$ من $\mathcal{L}(E)$ الخاصّة

$$\forall x \in E, \ u(x) \in \mathbb{K}x$$

وُجِدَ $\lambda$ في $\mathbb{K}$ يُحقّق $u = \lambda I_E$ .

**التمرين 16.** ليكن $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $\mathbb{R}$ . نعرّف على $E$ التطبيق $\varphi : E \to E$ بالعلاقة $\varphi(f) = g$ حيث $g(x) = \int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t$ . أثبت أنّ $\varphi$ خطّي. وبيِّن: أيكون $\varphi$ متبايناً أو غامراً ؟

**الحل**

- إنّ التيقُّن من كون التطبيق $\varphi$ تطبيقاً خطّياً أمرٌ بسيط نتركه للقارئ.
- ليكن $f$ عنصراً من $\ker\varphi$ عندئذ يكون لدينا

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

- وباشتقاق طرفي هذه المساواة نستنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\quad xf(x)=0$ ، ومن ثَمّ يكون

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f(x)=0$$

- وبالاستفادة من استمرار $f$ نستنتج أنّ $f=0$ ، أي إنّ $\ker\varphi=\{0\}$ والتطبيق $\varphi$ متباينٌ.
- إنّ التطبيق $\varphi$ غير غامر لأنّ $\operatorname{Im}\varphi\subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، حيث $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هو فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف $C^1$ على $\mathbb{R}$ .

**التمرين 17.** ليكن $E=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة التي تقبل الاشتقاق عدداً لانهائيّاً من المرات على $\mathbb{R}$ . نعرّف على $E$ التطبيق $\varphi:E\to E$ كما يأتي :

$$\varphi(f)=g \quad \text{حيث} \quad g(x)=f'(x)-2xf(x)$$

أثبت أنّ $\varphi$ خطّي. وعيِّن $\ker\varphi^n$ في حالة $n$ من $\mathbb{N}^*$ .

**الحل**

نلاحظ أنّه بالإمكان صياغة عبارة $g=\varphi(f)$ كما يلي :

$$\varphi(f)(x)=f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big(e^{-x^2}f(x)\Big)$$

فإذا عرّفنا التطبيقين الخطّيين $T$ و $D$ بالصيغتين الآتيتين:

$$T:E\to E,f\mapsto T(f)\quad :T(f)(x)=e^{x^2}f(x)$$
$$D:E\to E,f\mapsto f'$$

كان $\varphi=T\circ D\circ T^{-1}$ ، وهذا يُثبتُ من جهة أولى أنّ $\varphi\in\mathcal{L}(E)$ ، ومن جهة ثانية أنّ

$$\varphi^n=T\circ D^n\circ T^{-1}$$

وعليه $f\in\ker\varphi^n$ إذا وفقط إذا كان $f\in\ker D^n$ ؛ أي إذا كان $f$ تابعاً كثير الحدود من الدرجة $n-1$ على الأكثر.

**التمرين 18.** نتأمّل في $\mathbb{R}^3$ الشعاعين $u = (1,2,3)$ و $v = (3,2,1)$. جِدْ الشرط اللازم والكافي على $x$ و $y$ و $z$ حتّى ينتمي الشعاع $(x,y,z)$ إلى $\text{vect}(u,v)$.

**الحل**

لنضع بالتعريف $w = (x,y,z)$. عندئذ

$$\begin{aligned} w \in \text{vect}(u,v) &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad w = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad w = \big(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta\big) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 3\beta \\ y &= 2\alpha + 2\beta \\ z &= 3\alpha + \beta \end{aligned}$$

يُكافئ

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 3\beta \\ y - 2x &= -4\beta \\ z - 3x &= -8\beta \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُكافئ

$$\begin{aligned} \frac{3y - 2x}{4} &= \alpha \\ \frac{2x - y}{4} &= \beta \\ z - 2y + x &= 0 \end{aligned}$$

فإذا وُجِد $(\alpha,\beta)$ يُحقّق الشرط $w = \alpha u + \beta v$ وجب أن يكون $x + z = 2y$.

وبالعكس، إذا تحقّق هذا الشرط عرّفنا $\alpha = \frac{3y-2x}{4}$ و $\beta = \frac{2x-y}{4}$ فصبح $w = \alpha u + \beta v$.

وعليه

$$(x,y,z) \in \text{vect}(u,v) \Leftrightarrow x + z = 2y$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

**التمرين 19.** ليكن $E=\mathbb{R}[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة. نعرّف

$$F=\left\{P\in E : \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t=0\right\}$$

أثبت أنّ $F$ فضاء شعاعي جزئي من $E$ وعيِّن فضاءً جزئيّاً $G$ من $E$ يُحقّق $E=F\oplus G$.

**الحل**

- نترك إثبات كون $F$ فضاءً جزئيّاً للقارئ نظراً إلى سهولته.
- ليكن $G=\mathbb{R}_1[X]$؛ أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة من الدرجة الأولى على الأكثر. ولنثبت أنّ

$$E=F\oplus G$$

- ليكن $P$ كثير حدود من $F\cap G$، عندئذ يُكتب $P$ بالشكل $aX+b$، وهو يُحقّق

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

أي $\frac{a}{2}+b=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=0$ وهذا يُكافئ

$$\begin{cases} a+2b=0\\ 2a+3b=0\end{cases}$$

وبالحلّ المشترك نجد أنّ $a=b=0$، أي $P=0$. فنكون قد أثبتنا أنّ $F\cap G=\{0\}$.

- لنتأمّل كثير حدود $P$ من $E$. ولنبحث عن عددين حقيقيين $a$ و $b$ يجعلان كثير الحدود $P(X)-aX-b$ عنصراً من $F$. فإذا افترضنا وجود هذين العددين كان

$$\int_0^1 (P(t)-at-b)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 t(P(t)-at-b)\,\mathrm{d}\,t=0$$

وهذا يُكافئ الجملة

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad \frac{a}{2}+b=\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

التي تُكافئ بدورها

$$b=2\int_0^1 (2-3t)P(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad a=6\int_0^1 (2t-1)P(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبت وحدانيّة الحلّ في حال وجوده.

وبالعكس، إذا كان $P$ عنصراً من $E$ وعرّفنا كثيري الحدود :

$$\begin{aligned} R(X) &= \left(6\int_0^1 (2t-1)P(t)\,\mathrm{d}\,t\right)X + 2\int_0^1 (2-3t)P(t)\,\mathrm{d}\,t \\ Q(X) &= P(X) - R(X) \end{aligned}$$

كان $P = Q + R$ حيث $Q \in F$ و $R \in G$. وهذا ما يثبتُ أنّ $E = F \oplus G$. ■

**التمرين 20.** ليكن $E$ فضاءً شعاعيّاً على حقلٍ $\mathbb{K}$، ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ جماعةً من عناصر $E\backslash\{0\}$. نفترض أنّه يوجد تطبيق خطّي $u$ من $\mathcal{L}(E)$ وجماعة $(\lambda_i)_{i\in I}$ من عناصر $\mathbb{K}$ تُحقّق $\forall i \in I,\ u(e_i) = \lambda_i e_i$، وأنّ التطبيق $i \mapsto \lambda_i$ متباينٌ. أثبت أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة.

**الحل**

لنتأمّل جماعة شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in I}$ من $\mathbb{K}^{(I)}$، ولنفترض أنّ $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$. عندئذ بتطبيق $u$ عدداً $k$ من المرّات على طرفي هذه المساواة نستنتج أنّه

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i\in I} \alpha_i \lambda_i^k e_i = 0$$

فإذا كان $P(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ كثير حدود ما من $\mathbb{K}[X]$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\sum_{i\in I} \alpha_i P(\lambda_i) e_i = \sum_{i\in I} \alpha_i \left(\sum_{k\geq 0} a_k \lambda_i^k\right) e_i = \sum_{k\geq 0} a_k \left(\sum_{i\in I} \alpha_i \lambda_i^k e_i\right) = 0$$

أي

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \sum_{i\in I} \alpha_i P(\lambda_i) e_i = 0 \qquad (*)$$

فإذا افترضنا أنّ الجماعة $(\alpha_i)_{i\in I}$ غير معدومة كانت المجموعة $J = \left\{i \in I : \alpha_i \neq 0\right\}$ مجموعة منتهية وغير خالية. وفي هذه الحالة نختار $k$ من $J$ ونعرّف كثير الحدود

$$P(X) = \prod_{j\in J\backslash\{k\}} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$$

مع الاصطلاح $\prod_{i\in\varnothing} z_i = 1$.

عندئذ نستنتج من $(*)$ أنّ $\alpha_k e_k = 0$ ، ولأنّ $e_k \neq 0$ ، وجب أن يكون $\alpha_k = 0$ وهذا يناقض انتماء $k$ إلى $J$ . إذن لا بُدّ أن تكون الجماعة $(\alpha_i)_{i\in I}$ معدومة، وهذا يثبت أنّ الجماعة $(e_i)_{i\in I}$ جماعة حرّة. ■