Université HAMMA Lakher ELOUED D'Eloued.

Département de Mathématiques

Faculté de Sciences

Cours en Algèbre-4-

les applications bilinéaires

Definition1.1 Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$B : E \times F \to \mathbb{K}$$

est une forme bilinéaire si :

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall t, t' \in \mathbb{K}, B\left(tx + t'x', y\right) &= tB(x, y) + t'B\left(x', y\right) \\ B\left(x, ty + t'y'\right) &= tB(x, y) + t'B\left(x, y'\right) \end{aligned}$$

Definition1.2 Matrice d'une forme bilinéaire
Matrice d'une forme bilinéaire en dimension finie, si $e := (e_1, \ldots, e_m)$ est une base de E et $f := (f_1, \ldots, f_n)$ est une base de F, on note

$$A := Mat_{e,f}(B) := \left(B\left(e_i, f_j\right)\right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

c'est la matrice de B dans les bases e, f.
Définition 1.3. Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E.
1. On dit que φ est symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
2. On dit que φ est positive si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geqslant 0$.
3. On dit que φ est définie si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
Proposition 1.4. Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) φ est symétrique ;
(ii) Il existe une base de E telle que $Mat_B(\varphi)$ est une matrice symétrique
(iii) Pour tout base $\mathcal{B}$ de $E, Mat_B(\varphi)$ est une matrice symétrique.
Exemples
1. $\varphi : (x, y) \mapsto xy$ sur $\mathbb{R}$ est symétrique, définie, positive.
2. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est symétrique, défini, positif.
3. $\varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t sur \mathcal{C}^0([a, b])$ est symétrique, définie et positive.
Définition 1.4 Formes bilinéaires non dégénérées
On dit qu'une forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est régulière ou non dégénérée si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
i) $B(x, b) = 0$ pour tout $x \in E$ entraine $b = 0$;
ii) $B(a, y) = 0$ pour tout $y \in F$ entraine $a = 0$.
Exemples :
si $E = F = \mathbb{K}^n$ et si $B(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$
si $E = F^*$ et si $B(x, y) = \langle x, y \rangle$

Théorème 1.1
Supposons E, F de dimension finie. Si $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire régulière, alors

$\dim E=\dim F$ et pour chaque base $e_1,\ldots,e_n$ de E, il existe une unique famille $f_1,\ldots,f_n$ de F telle que :

$$(*)\forall 1\leq i,j\leq n, B\left(e_i,f_j\right)=\delta_{i,j}$$

de plus, les f_i forment une base de F. On dit que deux bases e, f de E et F qui vérifient $(*)$ sont duales l'une de l'autre. Exemple 1.1 Soit $A=\left(\begin{array}{lll}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{array}\right)$. Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de matrice A ans la base canonique. solution 1.1.Ona :

$$\begin{gathered}\varphi(x,y)={}^tXAY=\left(\begin{array}{lll}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\right)\left(\begin{array}{lll}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}y_1\\ y_2\\ y_3\end{array}\right)\\ =x_1\left(y_1+2y_2+3y_3\right)+x_2\left(2y_1+3y_2+4y_3\right)+x_3\left(3y_1+4y_2+5y_3\right)\end{gathered}$$

Exemple 1.2. Déterminer dans la base canonique $\mathcal{B}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ telle que pour $v_1=\left(\begin{array}{l}1\\ 2\\ 1\end{array}\right), v_2=\left(\begin{array}{c}-1\\ 2\\ 0\end{array}\right), v_3=\left(\begin{array}{l}1\\ 0\\ 1\end{array}\right)$, on ait

$$\begin{gathered}\varphi\left(v_1,v_1\right)=5,\varphi\left(v_1,v_2\right)=0,\varphi\left(v_1,v_3\right)=-1\\ \varphi\left(v_2,v_2\right)=1,\varphi\left(v_2,v_3\right)=4,\varphi\left(v_3,v_3\right)=0\end{gathered}$$

Solution 1.2 Comme :

$$\det\left(v_1,v_2,v_3\right)=\left|\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right|=2\neq 0$$

$\mathcal{B}'=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En désignant, pour tous vecteurs x,y dans $\mathbb{R}^3$, par $\left(x_j'\right)_{1\leq j\leq 3}$ et $\left(y_j'\right)_{1\leq 1\leq 3}$ les coordonnées de res vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$, on a (en supposant que φ existe) : ces vecteurs dans la base B', on a (en supposant que φ existe) :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &=\varphi\left(x_1'v_1+x_2'v_2+x_3'v_3, y_1'v_1+y_2'v_2+y_3'v_3\right)\\ &=x_1'y_1'\varphi\left(v_1,v_1\right)+x_2'y_2'\varphi\left(v_2,v_2\right)+x_3'y_3'\varphi\left(v_3,v_3\right)\\ &+\left(x_1'y_2'+x_2'y_1'\right)\varphi\left(v_1,v_2\right)+\left(x_1'y_3'+x_3'y_1'\right)\varphi\left(v_1,v_3\right)\\ &+\left(x_2'y_3'+x_3'y_2'\right)\varphi\left(v_2,v_3\right)\\ &=5x_1'y_1'+x_2'y_2'-\left(x_1'y_3'+x_3'y_1'\right)+4\left(x_2'y_3'+x_3'y_2'\right)\end{aligned}$$