

سلسلة تمارين رقم 02 (الدوال الأصلية و التكاملات)

التمرين 1: باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi} (x^2 + x + 1) \sin x \, dx \quad (1) \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx \quad (2) \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \, dx \quad (3)$$

$$\int x^2 e^x \, dx \quad (*4) \quad \int \ln(1+x^2) \, dx \quad (*5) \quad \int \arctan x \, dx \quad (*6)$$

التمرين 2: باستعمال تبديل مناسب للمتغير، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} \quad (1) \quad \int \frac{dx}{x^2+6x+10} \quad (2) \quad \int \frac{dx}{2+\cos x} \quad (3)$$

$$\int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{3x^2+1}} \quad (*4) \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} \quad (*5) \quad \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^4} \, dx \quad (*6)$$

التمرين 3: باستخدام تفكيك الدوال الناطقة إلى كسور ناطقة بسيطة، احسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} \quad (3) \quad \int \frac{dx}{x^3+2x^2+x} \quad (2) \quad \int \frac{3x^3-2x^2+2x+2}{x^2-x+1} \, dx \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^4-16} \quad (*7) \quad \int \frac{2x+1}{x^3-3x^2-4x} \, dx \quad (*6) \quad \int \frac{dx}{x^2(x+3)} \quad (*5) \quad \int \frac{x^2-5x+2}{x^2-5x+6} \, dx \quad (*4)$$

التمرين 4: احسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} \, dx \quad (1) \quad \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}} \quad (*3) \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} \, dx \quad (*4) \quad \int \frac{2\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3-8x}} \, dx \quad (*5)$$

***التمرين 5:** ليكن $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$ من أجل كل عدد طبيعي n .1. احسب كل من I_0 و I_1 .2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد علاقة بين I_n و I_{n+1} ، ثم استنتج كل من I_2 و I_3 .

ملحق: جدول الدوال الأصلية لدوال مألوقة، حيث c عدد حقيقي ثابت

الدالة: $x \mapsto f(x) =$	الدالة الأصلية: $x \mapsto \int f(x) dx =$
$x^n, (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c, (x \in \mathbb{R}^*)$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + c, \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
$u'(x)u^n(x) (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$\frac{u'(x)}{u^n(x)} (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + c, u(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c, u(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c, u(x) > 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c, x \in]-1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c, x > 1$