الدوال الأصلية والتكاملات

1. الدوال الأصلية:

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.
نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة تقبل الدالة f مشتقة لها على المجال I.

بتعبير آخر:

$$\left(\text{دالة أصلية للدالة } f \text{ على المجال } I \;\; F\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{الدالة } F \text{ قابلة للاشتقاق على } I \\ \forall x\in I,\; F'(x)=f(x) \;\; \text{و}\end{array}\right)$$

أمثلة:

1) الدالة $x\mapsto c,\; c\in\mathbb{R}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto 0$ على $\mathbb{R}$
2) الدالة $x\mapsto 2x^2+1$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto 4x$ على $\mathbb{R}$
3) الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $]0,+\infty[$
4) الدالة $x\mapsto x-\cos x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto 1+\sin x$ على $\mathbb{R}$.

نظرية: كل دالة مستمرة على مجال تقبل، على الأقل، دالة أصلية على هذا المجال.

نتيجة: إذا كانت F دالة أصلية الدالة f على مجال I فإن كل دالة أصلية G للدالة f تكتب على الشكل: $G(x)=F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

مثال: الدالة $F:x\mapsto x^3-x^2$ هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto 3x^2-2x$ على $\mathbb{R}$، ومجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي مجموعة الدوال من الشكل $G:x\mapsto x^3-x^2+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$.
ونكتب في هذه الحالة: $\int(3x^2-2x)\,dx = x^3-x^2+c,\; c\in\mathbb{R}$

2- الحساب التكاملي:

تعريف: a و b عددان حقيقيان من المجال I.
f دالة عددية مستمرة على I و F دالة أصلية للدالة f في هذا المجال، يسمى العدد $F(b)-F(a)$ التكامل من a إلى b للدالة f
ونكتب:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال:
$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - (0) = \frac{2}{3}$$

خواص: f و g دالتان حقيقيتان مستمرتان على مجال I، ولتكن الأعداد a، b، c من I.

1) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

وكحالة خاصة:

• $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (نضع $a=b=c$)

• $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (نضع $a=c$)

2) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

3) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4) لتكن $a \leq b$.
• فإذا كانت f دالة موجبة على المجال $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
• وإذا كانت f دالة سالبة على المجال $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

5) لتكن $a \leq b$.
فإذا كان $(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x))$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

تطبيق 1: احسب $\int_1^3 |x-2|\,dx$.

الحل: لدينا $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x \leq 2 \end{cases}$، وبالتالي:

$$\begin{aligned}\int_1^3 |x-2|\,dx &= \int_1^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

تطبيق 2: عين حصرا للتكامل $\int_{-1}^{1}\frac{1}{8+x^3}dx$

الحل: بما أن $-1\leqslant x\leqslant 1$ فإن $-1\leqslant x^3\leqslant 1$ ومنه $7\leqslant 8+x^3\leqslant 9$

وبالتالي $\frac{1}{9}\leqslant \frac{1}{8+x^3}\leqslant \frac{1}{7}$ إذن $\int_{-1}^{1}\frac{1}{9}dx\leqslant \int_{-1}^{1}\frac{1}{8+x^3}dx\leqslant \int_{-1}^{1}\frac{1}{7}dx$

طرق حساب التكامل:

أ- تغيير المتغير: لحساب $\int_{a}^{b}f(x)dx$، يمكن وضع $x=g(t)$ والحصول على t بدلالة x مثلا $t=h(x)$

أو بوضع $t=h(x)$ والحصول على x بدلالة t مثلا $x=g(t)$

وبالتالي: $dx=g'(t)dt$ و $h(a)=\alpha$ ، $h(b)=\beta$

فيكون: $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(g(t))\,g'(t)\,dt$

دراسة مثال: لنحسب التكامل $I=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx$

في هذه الحالة نضع $t=1+x^3$ نجد $x=\sqrt[3]{t-1}=(t-1)^{\frac{1}{3}}$

ومنه $dx=\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}dt$

ومتى $x=0$ نجد $t=1$

ومتى $x=1$ نجد $t=2$

فالتكامل I يصبح: $I=\int_{1}^{2}\frac{(t-1)^{\frac{2}{3}}}{t^3}\times\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}dt$

$=\frac{1}{3}\int_{1}^{2}\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{3}\int_{1}^{2}t^{-3}dt=\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[t^{-2}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{8}$

أو بالكيفية التالية: بوضع $t=1+x^3$ نجد $dt=3x^2dx$

أي $dx=\frac{dt}{3x^2}$

ومن أجل $x=0$ فإن $t=1$ ومن أجل $x=1$ فإن $t=2$

ومنه: $I=\int_{1}^{2}\frac{1}{3}\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{3}\int_{1}^{2}\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{8}$

ب - المكاملة بالتجزئة:

نظرية: إذا كانت f و g دالتان قابلتان للاشتقاق باستمرار على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

ملاحظة: إذا كان التكامل غير محدود، فنكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)\times g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

مثال: لتعيين الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ بمعنى نحسب التكامل التالي: $\int x\ln x\,dx$

نضع:

$$u=\ln x \longrightarrow u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=x \longrightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

ثم نطبق المكاملة بالتجزئة: $\int uv' = uv - \int u'v$

ليصبح:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,\quad C\in\mathbb{R}$$

تطبيق: نعتبر الدالة $x\mapsto x\cos x$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

أوجد الدالة الأصلية التي تنعدم من أجل القيمة π.

الحل: نحسب أولاً التكامل $\int x\cos x\,dx$ بالتجزئة.

فنضع:

$$u=x \longrightarrow u'=1$$
$$v'=\cos x \longrightarrow v=\sin x$$

وبالتالي:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C,\quad C\in\mathbb{R}$$

لنضع: $F(x) = x\sin x + \cos x + C$

ثم نجعل $F(\pi)=0$ ومنه $\pi\sin\pi + \cos\pi + C = 0$ لنجد $C=1$

فالدالة الأصلية المطلوبة: $G(x) = x\sin x + \cos x + 1$.

هـ - تكامل الدوال الناطقة:

لحساب التكامل من الشكل $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود، لدينا الحالات التالية:

الحالة 1: إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $g(x)$، نجري القسمة الإقليدية لـ $f(x)$ على $g(x)$ فنجد $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{f_1(x)}{g(x)}$

حيث $h(x)$ هو حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$ و $f_1(x)$ باقي هذه القسمة، وهو كثير حدود درجته أصغر أو تساوي درجة $g(x)$.

الحالة 2: نفكك $g(x)$ (إن أمكن) إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى والثانية من الشكل $(ax+b)^n$ و $(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m$ ونكتب عندئذ (على سبيل المثال):

$$\frac{f_1(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{(ax+b)^n(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m} = \frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$
$$+ \frac{b_1x+c_1}{\alpha x^2+\beta x+\delta} + \frac{b_2x+c_2}{(\alpha x^2+\beta x+\delta)^2} + \cdots + \frac{b_mx+c_m}{(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m}$$

حيث a، b، α، β، δ، a_i مع $1\leq i\leq n$، b_j و c_j مع $1\leq j\leq m$ ثوابت حقيقية (يمكن تعيينها بعد توحيد المقامات ومطابقة الطرفين)، وبذلك نكون قد حصلنا على تفكيك للكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ثم تكامل الطرف الثاني لنجد $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

ملاحظة: يمكن كتابة العامل $\alpha x^2+\beta x+\delta$ بالشكل النموذجي إذا لزم للحل في حساب التكامل.

أمثلة:

1- لنحسب التكامل $I = \int \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1}\,dx$

لدينا: $\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

ولدينا التفكيك التالي: $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد: $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$

ومنه:
$$I = \int x^2\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c, \quad c\in\mathbb{R}$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

2)- لنحسب التكامل $J = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

لدينا مميز المقام $\Delta = -3 < 0$ وبالتالي $x^2+x+1 > 0$ فلا يمكن تحليله، في هذه الحالة نكتبه على الشكل النموذجي.

وبالتالي: $J = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

لتغيير المتغير $t = x + \frac{1}{2}$ نجد $dt = dx$

ومنه: $J = \int \frac{dt}{t^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

(هو من الشكل $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + c$ مع $a \neq 0$)

$$J = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ومنه: $J = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}(x + \frac{1}{2}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

د- طريقة حساب تكامل دالة تُرَدّ إلى دالة ناطقة:

لتكن R كسراً ناطقاً.

1- التكامل من الشكل $I_1 = \int R(\cos x, \sin x)\, dx$:

في هذه الحالة نستعمل تغيير المتغير $t = \tan\frac{x}{2}$ لنجد:

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

وبالتالي: $I_1 = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$

أمثلة: 1)-

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \times 2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2)-

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \times 2 \frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{-dt}{1-t}$$

$$= \ln|1+t| - \ln|1-t| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2- التكامل من الشكل $I_2 = \int R(\sin x) \cos x\, dx$:

في هذه الحالة نضع $t = \sin x$ لنجد $dt = \cos x\, dx$

وبالتالي: $I_2 = \int R(t)\, dt$.

مثال: لنحسب $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$. نضع $t = \sin x$ لنجد $dt = \cos x\, dx$

وبالتالي:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$$
$$= \arctan(\sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3- التكامل من الشكل $I_3=\int R(\cos x)\sin x\,dx$:

في هذه الحالة نضع $t=\cos x$ لنجد $dt=-\sin x\,dx$

وبالتالي:
$$I_3=-\int R(t)\,dt$$

مثال: لحساب التكامل $\int \cos^5 x\sin x\,dx$ ، نضع $t=\cos x$ لنجد $dt=-\sin x\,dx$

وبالتالي:
$$\int \cos^5 x\sin x\,dx=-\int t^5\,dt=-\frac{t^6}{6}+c$$
$$=-\frac{\cos^6 x}{6}+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

4- التكامل من الشكل $I_4=\int R(e^{\alpha x})\,dx$ حيث $\alpha\in\mathbb{Z}$:

في هذه الحالة نضع $t=e^x$ لنجد $dt=e^x\,dx$

مثال: لحساب التكامل $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$ ، نضع $t=e^x$ لنجد $dt=e^x\,dx$

وبالتالي:
$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx=\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{1}{1+t}+c$$
$$=-\frac{1}{1+e^x}+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

5- التكامل من الشكل $I_5=\int R(\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)\,dx$:

في هذه الحالة نضع $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ لنجد:

$dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ ، $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$ و $\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$.

وبالتالي:
$$I_5=\int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2}$$

مثال: لحساب التكامل $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}$ ، نضع $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ لنجد $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ و $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$

وبالتالي:
$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\int\frac{1-t^2}{2t}\times\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c$$
$$=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

ملاحظة: تبقى الحالتين $\int R(\operatorname{sh}x)\operatorname{ch}x\,dx$ و $\int R(\operatorname{ch}x)\operatorname{sh}x\,dx$ ، يمكن إتباع نفس طريقة مكاملة الشكلين (2) و (3) ، كما لو كان $\operatorname{ch}x$ هو $\cos x$ و $\operatorname{sh}x$ هو $\sin x$.

مثال: لحساب التكامل $\int\frac{\operatorname{ch}^3x\,dx}{\operatorname{sh}^2x}$ ، نضع $t=\operatorname{sh}x$ لنجد $dt=\operatorname{ch}x\,dx$

وبالتالي:
$$\int\frac{\operatorname{ch}^3x\,dx}{\operatorname{sh}^2x}=\int\frac{1+\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{sh}^2x}\operatorname{ch}x\,dx=\int\frac{1+t^2}{t^2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{t}+t+c$$
$$=-\frac{1}{\operatorname{sh}x}+\operatorname{sh}x+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

6- التكامل من الشكل: $I_6=\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right)dx$ حيث $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2},\dots$ أعداد كسرية غير قابلة للاختزال:

في هذه الحالة نضع $t=x^{\frac{1}{n}}$ (أو $x=t^n$) حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات $q_1, q_2,\dots$

مثال: المطلوب حساب التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

لدينا: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx$، فنضع $t=x^{\frac{1}{6}}$ أي $x=t^6$ لنجد $dx=6t^5dt$

ومنه:

$$\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

7- التكامل من الشكل: $I_7=\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right)dx$ حيث $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2},\dots$ أعداد كسرية غير قابلة للاختزال:

في هذه الحالة نضع $t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ (أو $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$) حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات $q_1, q_2,\dots$

مثال: المطلوب حساب التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$!

نضع $t=(2x-1)^{\frac{1}{4}}$ أي $2x-1=t^4$ لنجد $x=\frac{t^4+1}{2}$ فنحصل على $dx=2t^3dt$

وبالتالي:

$$\int\frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}dx=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}$$

$$=2\int\frac{t^2}{t-1}dt$$

$$=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=t^2+2t+2\ln|t-1|+c$$

$$=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1|+c$$

$$=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+c,\quad c\in\mathbb{R}$$