الفصل الثاني

الدوال المركبة :

1/ تعريف :

بالمطابقة مع الدوال للمتغيرات الحقيقية $y = f(x)$ ،
دالة لمتغير مركب نرمز لها بـ : $W = f(z)$ ترفق بكل
متغير مركب $z = x+iy$ من المجموعة M بالمستوي المركب $\mathbb{C}$ مجموعة النقاط W
$W = u+iv$ تنتمي أيضا إلى المستوي المركب $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad , \qquad \mathbb{M}, \mathbb{N} \subset \mathbb{C}.$$
$$z \longrightarrow f(z).$$

- إذا كانت W نقطة واحدة نسمي الدالة f دالة وحيدة القيمة (univalente).
- إذا كانت W في $f(z)$ ترفق بكل نقطة z مجموعة من النقاط W تسمى $f(z)$ دالة متعددة القيم (multivalente).

مثال :

1/ $f(z) = z^2$
دالة وحيدة القيمة

$$z = x+iy \longrightarrow f(z) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i\,(2xy).$$
$$= u(x,y) + i\,v(x,y).$$

2/ $f(z) = \sqrt{z}$ دالة متعددة القيم .

٢) نهايات ومشتقات الدوال المركبة:

١) النهايات:

تعريف النهايات والاستمرارية والاشتقاقية لدالة مركبة هي نفسها بالنسبة للدوال الحقيقية:

• الدالة $f(z)$ تكون لها نهاية عندما $z \to z_0$ إذا كان.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + i v_0 .$$

٢) الاستمرارية:

الدالة $f(z)$ تكون مستمرة في z_0 إذا كانت معرفة بجوار النقطة z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) .$$

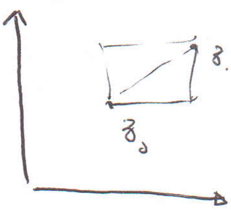
٣) اشتقاق دالة مركبة:

$$f(z) : M \longrightarrow \mathbb{C}$$

اشتقاق دالة مركبة.

إذا كانت $f(z)$ دالة مركبة، نقول أن $f(z)$ قابلة للاشتقاق في z_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة مهما كان المسلك المتبع.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$



4) الدوال الهولومورفية — les fonction holomorphe.

$f(z)$, $M \subset \mathbb{C}$

إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق على M حيث M ~~مجموعة~~ مفتوحة فإن $f(z)$ دالة هولومورفية.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) + i\,v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)] - [u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)]}{x_0+\Delta x + i(y_0+\Delta y) - (x_0+iy_0)}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + i\,v(x_0+\Delta x, y_0) - [u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

بنفس الطريقة.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$f'(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

شرطي اشتقاق دالة مركبة.

وتسمى شرطي كوشي - ريمان .

نسمي دالة مركبة دالة هولومورفية
(holomorphe, régulière, Analytique) .
إذا كانت تحقق شرطيه كوشي ريمان .

5) الدوال التوافقية : les fonctions harmonique.

• إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة مركبة هولومورفية هذا يعني .

$$f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0 \Rightarrow \Delta U = 0.$$

بنفس الطريقة :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$

أي أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لدالة هولومورفية هي دوال توافقية .

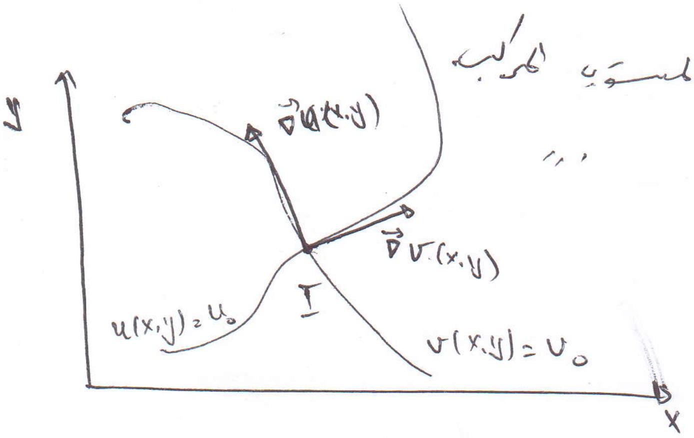
• عكسية ؟ حتى إذا كانت لدينا دالة توافقية $U(x,y)$ نستطيع إيجاد الموافق التوافقي لها أي الدالة التي تحقق معها شرطي كوشي ريمان .
أي فتكون من دالة توافقية $U(x,y)$ وموافقها التوافقي $V(x,y)$ دالة مركبة هولومورفية أو تحليلية $f(z) = U + iV$.

6/ خاصية :

يجب الإشارة إلى خاصية مهمة للمركبات التوافقية لدالة مركبة تحليلية إذا كانت :

(u تابعين) و $u(x,y) = u_0$ معادلة منحنى في المستوي المركب

$v(x,y) = v_0$ " " " "



• عند نقطة تقاطع I المنحنيين متعامدين .

$$du(x,y) = du_0 = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \vec{\nabla} u(x,y)\cdot d\vec{M}.$$

$\vec{\nabla}(u(x,y))$ شعاع عمودي على المنحنى $u(x,y) = u_0$.

نفس الشيء بالنسبة للمنحنى $v(x,y) = v_0$

$$dv(x,y) = \vec{\nabla} v(x,y)\cdot d\vec{M}.$$

$$\vec{\nabla}_I u(x,y)\cdot\vec{\nabla}_I v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

من خلال شرطي كوشي ريمان .

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

إذن $\vec{\nabla} u(x,y)$ و $\vec{\nabla} v(x,y)$ متعامدين أي أن المنحنيين متعامدين

• المركبات الحقيقية والتخيلية لدالة مركبة تحليلية تكون مجموعة من المنحنيات المتعامدة.

7/ ~~ملاحظة~~ خواص الدوال التحليلية.

1- إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 نقول أن الدالة $f(z)$ هولومورفية عند النقطة z_0.

2- نقول أن الدالة $f(z)$ تحليلية Analytic عند النقطة z_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق ليس فقط عند z_0 بل عند كل نقطة في جوار للنقطة z_0.

3- نقول كذلك أن الدالة $f(z)$ تحليلية في مجموعة مفتوحة D إذا كانت تحليلية على كل نقطة من نقاط D. وإذا كانت D مغلقة فإن الدالة تكون تحليلية في D إذا كانت في مجموعة مفتوحة تحتوي على D.

4- إذا كانت الدالة تحليلية على كل المستوي المركب فإنها تسمى دالة كلية (Entire).

5- إذا كانت الدالة ليست تحليلية عند النقطة z_0 ولكنها تحليلية عند نقطة واحدة على الأقل في كل جوار للنقطة z_0 فإن النقطة z_0 تسمى نقطة منفردة (أو شاذة) (Singular point) للدالة.

أمثلة:

1) $f(z)=z^3$ دالة تحليلية على كل الأعداد المركبة لأن $f'(z)=3z^2$ معرفة وموجودة لكل عدد مركب.

ومنه $f(z)=z^3$ دالة كلية