الفصل الأول
تذكير بالفضاء المركب

1.1 الأعداد المركبة:

تعرف مجموعة الأعداد المركبة بـ:

$$\phi = \{x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

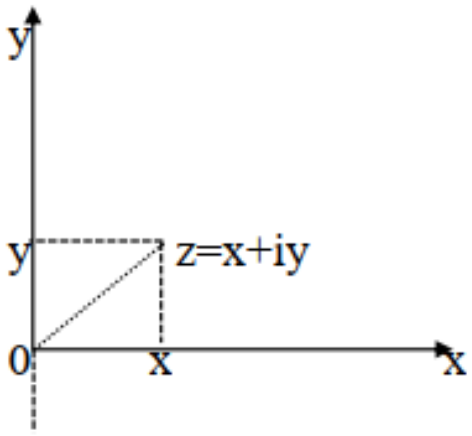
حيث هو i التخيلي الذي يمثل $i^2 = -1$

- يرمز للعدد المركب بـ: $w, z \cdots$
- $z = x + iy$ هو الشكل الجبري لأي عدد مركب حيث:

$x = Re(z)$ الجزء الحقيقي للعدد المركب z.

$y = Im(z)$ الجزء التخيلي للعدد المركب z.

- يمثل كل عدد مركب $z = x + iy$ بالثنائية (x, y) أي بنقطة في الفضاء المركب.
- طويلة عدد مركب أو قيمته المطلقة هي المسافة من النقطة (x, y) إلى المبدأ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$



2.1 خـواص:

إذا $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ و $\overline{z} = x - iy$

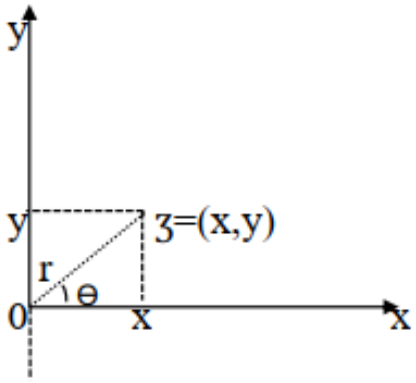
- $3_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + i\dfrac{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$

3.1 المرافق وخواصه:

- إذا كان $z = x + iy$ فإن مرافقه $\overline{z}$ معرف ب: $\overline{z} = x - iy$
- في الفضاء المركب $\overline{z}$ هو نظير z بالنسبة للمحرر (ox)
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z_1}^n = \overline{z_1}^n$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

4.1 الشكل القطبي لعدد مركب

$$\mathrm{x} = \mathrm{r}\cos\theta$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta$$
$$z = \mathrm{x} + \mathrm{iy} = \mathrm{r}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$



$k \in \{0, 1, \ldots..\}$

- $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ يمثل الشكل القطبي لأي عدد مركب.
- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ طويلة z.
- $\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ تمثل عمدة z.
- $\theta = \text{argument}(z)$
- $\theta = \arg(z)$

5.1 خصائص الشكل القطبي:

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) = r_1 e^{i(\theta_1+2k\pi)}$$
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) = r_2 e^{i(\theta_2+2k\pi)}$$

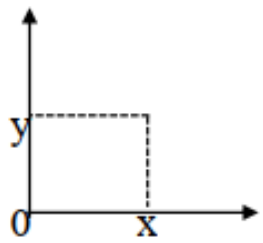
- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2+2k\pi)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2+2k\pi)}$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} (\cos\theta_1 - i \sin\theta_1) = \frac{1}{r_1} e^{-i(\theta_1+2k\pi)}$

6.1 عبارة موافر: (formule de Moivre)

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

7.1 الجذر النوني لعدد مركب:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{x} + \mathrm{iy} \\ &= \mathrm{r}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z &= re^{i(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$



• إذا كان w هو الجذر النوني لـ z أي $\mathrm{w} = \sqrt[n]{z}$ فإن:

$$\mathrm{k} = 0, 1 \ldots . \mathrm{n} - 1 \quad \cdot w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

8.1 عبارة أولر: (formule d'Euler)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots (1)$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z2}$$

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y\frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

9.1 المستو المركب:

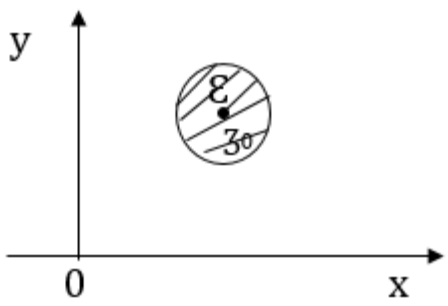
نقصد بالمستو المركب أنه مجموعة من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ أي مجموعة الثنائيات المرتبة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وهو المستوى الديكارتي ثنائي الأبعاد.
سوف نتطرق الآن إلى بعض الخصائص الطوبولوجية للنقاط وللمجموعات الجزئية لهذا المستوى والتي لا يمكن صياغتها بدون فكرة الجوار.

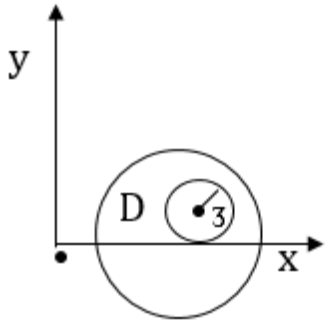
10.1 جوار نقطة وخصائص المجموعات:

جوار نقطة هو مجموعة النقاط في المستوى المركب والتي تحقق:

$$N(z) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \varepsilon) \, \exists \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0$$

أي هو مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة: $|z - z_0| < \varepsilon$
وتسمى جوار مفتوح. (نقاط داخل الدائرة مركزها z_0 ونصف قطرها ε





فإذا كانت $\mathcal{D}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ و $z_0 \in \mathcal{D}$ فإن النقطة z_0 تسمى نقطة داخلية للمجموعة $\mathcal{D}$ إذا وجد عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ بحيث: $\mathrm{N}(z_0, 2) \subset \mathcal{D}$

11.1 المجموعات في المستو المركب:

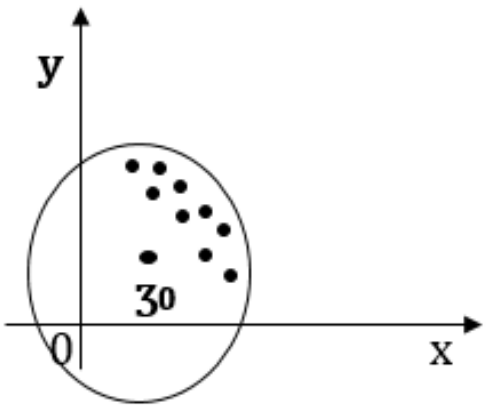
وتسمى $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة إذا تحقق الشرط: لكل z_0 في $\mathcal{D}$ يوجد بحيث $\mathrm{N}(z_0, 2) \subset \mathcal{D}$

$\Leftarrow$ إذا كانت كل نقطة من نقاط المجموعة $\mathcal{D}$ نقطة داخلية.

$\Leftarrow$ لا تحتوي على نقاط حدودية.

مثال: القرص:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathrm{q} : |z - z_0| < \mathrm{r}\}$$

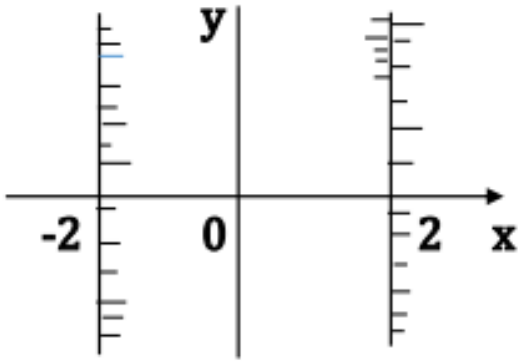


• تسمى نقطة z_0 للمجموعة $\mathcal{D}$ ، إذا كانت z_0 نقطة داخلية مكملة $\mathcal{D}$ أي $\mathcal{D}^c = \mathbb{C} - \mathcal{D}$ أما إذا كانت z_0 لا تمثل لا نقطة داخلية ولا خارجية للمجموعة $\mathcal{D}$ فإنها تسمى نقطة حدودية للمجموعة $\mathcal{D}$.

• تكون المجموعة $\mathcal{D}$ مغلقة إذا احتوت جميع النقاط الداخلية والحدودية لنفسها. أي مغلقة إذا كانت $\mathcal{D}^c$ مفتوحة.

مثال:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 2\}$$



الشريحة اللانهائية

- تسمى $\mathcal{D}$ مجموعة مترابطة Connected إذا تحقق الشرط: لكل نقطتين z_0 و z من $\mathcal{D}$ يوجد خط مضلع ينتمي إلى $\mathcal{D}$ يصل بين النقطتين z و z_0 وخط وضلع بين نقطتين z و z_0 هو مجموعة منتهية من القطع المستقيمة المتصلة مع بعضها بدءًا من z_0 إلى z.
- إذا كانت مكملة $\mathcal{D}$ مترابطة نسمي $\mathcal{D}$ مترابطة ترابطًا بسيطًا.
- إذا كانت مكملة $\mathcal{D}$ ليست مترابطة نسمي $\mathcal{D}$ مترابطة ترابطًا مضاعفا.