المفاهيم والأدوات الأساسية ومسلمات ميكانيك الكم :

1- مقدمة :

إنّ إثبات الطبيعة المزدوجة (الموجية الجسيمية) للجسيمات يوجب علينا تقديم مفاهيم وأدوات جديدة تكوّن ما يسمى بميكانيك الكم، لقد اصطلح على أن تعتمد هذه المفاهيم والأدوات على شكل مسلمات.

إنّ المسلمات هي حوصلة مفاهيم وأدوات جديدة مختلفة عن المفاهيم والأدوات الكلاسيكية تكون الأساس لميكانيك الكم.

ما نريد الحصول عليه هو كيفية وصف حالة جملة فيزيائية كمية عند كل لحظة t والنتيجة التي نحصل عليها عند قياس كمية فيزيائية ما، وكذلك كيفية تطور حالة هذه الجملة الفيزيائية (الجسيم مثلا) مع الزمن.

2- الدالة الموجية ومعادلة شرودنغر :

من المعلوم أنه عند دراسة حركة جسيم كتلته m خاضع لقوة F كلاسيكيا تكون غايتنا تحديد موضع الجسيم عند كل لحظة t، لأنه بمعرفة موضع الجسيم عند كل لحظة يمكننا معرفة السرعة، الدفع الخطي، الطاقة، أو أي متغير ديناميكي آخر.

للحصول على الموضع الجسيم عند كل لحظة t نحتاج إلى تطبيق القانون الأساسي للتحريك (القانون الثاني لنيوتن $\vec{F}=m\vec{a}$) بالإضافة إلى معرفة الشروط الابتدائية (السرعة الابتدائية والموضع الابتدائي).

في ميكانيك الكم يكون الأمر مختلفا قليلا فبدل البحث عن موضع الجسيم كل لحظة سنبحث عن الدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ للجسيم (الجملة الفيزيائية) وذلك من خلال ما يسمى بمعادلة شرودنغر.

مسلمة :

توصف حالة الجسيم (الجملة الفيزيائية) عند كل لحظة t بدالة مركبة تسمى الدالة الموجية. تطور الدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ مع الزمن تتحكم

فيه معادلة شرودنغر التي تكتب :
$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec r,t)}{\partial t} = H\psi(\vec r,t)$$

- ملاحظات :

1- معادلة شرودنغر تلعب دوراً مماثلاً للدور الذي يلعبه القانون الأساسي للتحريك (القانون الثاني لنيوتن) ، فبمعرفة $\psi(\vec r,0)$ معادلة شرودنغر تحدد $\psi(\vec r,t)$ عند اللحظات الموالية.

2- كل المعلومات التي تخص الجملة الفيزيائية في اللحظة تستنتج من معرفة الدالة الموجية عند هذه اللحظة.

2-1- التفسير الإحصائي للدالة الموجية :

السؤال الذي يطرح الآن هو:
ماهي بالضبط الدالة الموجية وما الذي نقدمه عند الحصول عليها ؟

إن الجسم بطبيعته مركز في نقطة في حين أن الدالة الموجية ممتدة في الفضاء (دالة في الموضع عند كل لحظة t)،
إذن : كيف لدالة كهذه أن تصف حالة جسيم ؟

الإجابة على هذه الأسئلة قدمها بورن من خلال التفسير الإحصائي للدالة الموجية الذي ينص على ما يلي :
إن مربع طويلة الدالة الموجية $|\psi(\vec r,t)|^2$ يعطي احتمال الحصول على الجسيم عند الموضع $\vec r=(x,y,z)$ في اللحظة t.

بلغة أخرى أن احتمال الحصول على الجسيم بين الموضعين $a(x_a,y_a,z_a)$ و $b(x_b,y_b,z_b)$ يعطى بـ:
$$P_{ab} = \int_{a(x_a,y_a,z_a)}^{b(x_b,y_b,z_b)} |\psi(\vec r,t)|^2\, d^3 r$$

وبالتالي $|\psi(\vec r,t)|^2$ تمثل كثافة الإحتمال .

2-2- التنظيم:

بما أن $|\psi(\vec{r},t)|^2$ تمثل كثافة الإحتمال وبما أن الجسيم موجود بالتأكيد في مكان ما من الفضاء فإن احتمال الحصول عليه في هذا الفضاء يجب أن يساوي الواحد، أي:

$$\int_{\text{كامل الفضاء}} |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = \int_{\text{كامل الفضاء}} |\psi(x,y,z,t)|^2 dx\,dy\,dz = 1$$

توضيح:

إذا كانت الدالة الموجية $\psi(x,t)$ تعطي ما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\,\psi(x,t)\,dx = |B|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\,\psi(x,t)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^*(x,t)}{B^*}\,\frac{\psi(x,t)}{B}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\psi(x,t)}{B}\right)^* \frac{\psi(x,t)}{B}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A\psi(x,t)\right)^* \left(A\psi(x,t)\right) dx = 1$$

← هذا يعني أنه إذا كان ناتج التكامل يختلف عن الواحد ويساوي عددا حقيقيا فإنه يمكن تعريف دالة $A\psi(\vec{r},t)$ تجعله يساوي الواحد لأن الدالة $\psi(\vec{r},t)$ تحقق معادلة شرودينغر وأيضا $A\psi(\vec{r},t)$ تحققها، وليس عندئذ هذا الشرط لشرط التنظيم.

← في بعض الحالات يكون التكامل السابق غير منته مما يجعل الحصول على أي قيمة لـ A غير ممكنة، في هذه الحالة مثل هذه الدوال لا يمكنها أن تصف جسيما.

مثال: الدالة الموجية $\psi(x,t)$ معرفة بـ:

$$\psi(x,t) = A e^{-i\omega t} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

1- عين إحتمال الحصول على الجسم عند الموضع x.

2- أحسب إحتمال الحصول على الجسم في المجال المعرف كما يلي: $x \in [0, +\infty[$ أو $x \in]-\infty, 0]$ بدلالة A.

3- جد قيمة A حتى تكون $\psi(x,t)$ منظمة.

الحل:

-1

$$P(x) = |\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\,\psi(x,t)$$

$$= A^* e^{+i\omega t} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} A e^{-i\omega t} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$= |A|^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$$

-2

$$P_1 = \int_0^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = |A|^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= |A|^2 \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{|A|^2}{2}\sqrt{a^2\pi} = \frac{|A|^2}{2} a\sqrt{\pi}$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{0} |\psi(x,t)|^2 dx = |A|^2 \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{|A|^2}{2} a\sqrt{\pi}.$$

-3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} |\psi(x,t)|^2 dx + \int_{0}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$$

$$= \frac{|A|^2}{2} a\sqrt{\pi} + \frac{|A|^2}{2} a\sqrt{\pi} = |A|^2 a\sqrt{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}.$$

2-2-1: معادلة إنحفاظ تيار الإحتمال:

لأن شرط التنظيم يضع قيداً كبيراً على الدالة الموجية ويجعلنا نطرح التساؤل على مدى توافق هذا الشرط ...

مع تطور الدالة الموجية في الزمن، أي هل يجعل هذا الشرط الدالة الموجية منظمة عند كل لحظة t.

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2 dx = ?$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]dx.$$

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \Rightarrow i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

$$-i\hbar\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H\psi^* \Rightarrow -i\hbar\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x,t) + V(x)\psi^*(x,t)$$

$$+i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]dx = +\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^* - \psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right]dx$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^* - \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]dx$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

بما أن $\psi(+\infty) = \psi(-\infty) = 0$ ينتج:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,t)|^2 dx = 0$$

وهذا يعني أن شرط التنظيم محققة في أي لحظة t.

3- القيمة المتوسطة والإنحراف المعياري للموضع

نقتصر على حساب القيمة المتوسطة للموضع في بعد واحد فقط.

بما أن كثافة الإحتمال هي $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ فإن:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x)\, dx$$

وبصفة عامة إذا كانت f دالة في المتغير x فإن:

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, P(x)\, dx .$$

فإذا كانت $f(x) = x^2$ فيمكن كتابة:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x)\, dx .$$

وعليه فإن الإنحراف المعياري (الإنحراف عن القيمة المتوسطة) هو:

$$\Delta x = x - \langle x\rangle \Rightarrow (\Delta x)^2 = (x - \langle x\rangle)^2$$

$$= x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2\rangle$$

$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle x\rangle + \langle x\rangle^2$$

$$= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 .$$

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}}$$

مثال:

$$\psi(x,t) = A e^{-i\omega t} e^{-x^2/2a^2}$$

أحسب $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، ثم σ_x .

3 - القيمة المتوسطة والإنحراف المعياري للدفع الخطي

بصفة عامة بما أن $\langle x\rangle$ تتغير بتغير الزمن (بسبب تعلق الدالة الموجية بالزمن)، وبما أننا نريد معرفة سرعة التغير يمكن أن نكتب:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, |\psi(x,t)|^2\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \frac{\partial|\psi(x,t)|^2}{\partial t}\, dx .$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{1}{i\hbar}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi(x,t)\right] dx$$

نكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i\hbar}{2m}\left[x\left[\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi\right]dx\right]$$

$$= +\frac{i\hbar}{2m}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\,dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\,dx = \psi\psi^*\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx$$

$$= +\frac{i\hbar}{2m}\, 2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = \frac{i\hbar}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx$$

نكتب تعريف سرعة القيمة المتوسطة $\langle v\rangle$ (لا تمثل سرعة الجسيم التي لا تكمية حساحيكا) أي:

$$\langle v\rangle = \frac{d\langle x\rangle}{dt} \Longrightarrow m\langle v\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$$

$$\Rightarrow m\langle v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)\,dx$$

حيث

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

والتي تمثل القيمة المتوسطة للدفع الخطي في ميكانيك الكم.

بنفس الطريقة نجد أن الانحراف المعياري للدفع الخطي يعطى:

$$\sigma_p = \sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

مثال: م أحد المشاكل الأخيرة أجل الدفع الخطي.

4 - المؤثرات ونتائج القياس 1-4-5 القيم والأشعة الذاتية

الكميات الفيزيائية تمثل بمؤثرات في ميكانيك الكم والتي تحدد من خلالها معانيها.

مسلمة :

كل كمية فيزيائية A (موضع، طاقة، دفع خطي ...) تمثل بمؤثر $\hat{A}$ يؤثر في فضاء هيلبرت.
نتائج القياس الممكنة للكمية الفيزيائية A هي فقط القيم الذاتية للمؤثر $\hat{A}$.

1 - الجدول التالي يعطي المؤثرات الممثلة لبعض الكميات الفيزيائية :

العبارة الكمية	العبارة الكلاسيكية	الكمية الفيزيائية
$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.	$\vec{r} = (x, y, z)$	الموضع
$\hat{\vec{P}} = -i\hbar \vec{\nabla} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$	$\vec{P} = m\vec{v}$	الدفع الخطي
$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{P}} = -i\hbar \hat{\vec{r}} \times \vec{\nabla}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$	الدفع الزاوي
$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\hat{\vec{r}})$	$E = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r})$	الطاقة الكلية

2 - إن تأثير المؤثر $\hat{A}$ على دالة $\varphi(\vec{r})$ يعطي دالة جديدة $\Phi(\vec{r})$ حيث أن :

$$\hat{A}\varphi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})$$

إذا كانت الدالة $\Phi(\vec{r})$ متناسبة مع الدالة $\varphi(\vec{r})$ أي $\Phi = a\varphi$ فإن الدالة $\varphi(\vec{r})$ تحقق :

$$\hat{A}\varphi(\vec{r}) = a\,\varphi(\vec{r})$$

في هذه الحالة تسمى الدالة $\varphi(\vec{r})$ بالدالة الذاتية للمؤثر $\hat{A}$ ويسمى الثابت a بقيمته الذاتية.

3 - على العموم هناك سلسلة من الدوال الذاتية والقيم الذاتية، أي :

$$A\varphi_n(\vec{r}) = a_n\varphi_n(\vec{r}) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

إذا وافقت قيمة ذاتية معينة عدد من الدوال الذاتية فإننا نقول بأن هذه القيمة الذاتية منحلة.

4- إن القيم الذاتية للمؤثرة $\hat{A}$ الممثل للكمية الفيزيائية A يجب أن تكون حقيقية وبالتالي فإن المؤثرات الممثلة لكميات فيزيائية تكون هرميتية $\hat{A}^{+} = \hat{A}$.

5- المؤثر الهرميتي الممثل لكمية فيزيائية يطلق عليه اسم مدرك.

6- الدوال الذاتية $\{\varphi_n(\vec{r})\}$ للمؤثر الممثل لكمية فيزيائية تشكل أساسا تاما في فضاء هيلبرت، وفي اذن تحقق:

أ- علاقة التعامد والتجانس:

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = (\varphi_n(\vec{r}), \varphi_{n'}(\vec{r})) = \int \varphi_n^*(\vec{r})\, \varphi_{n'}(\vec{r})\, d^3r = \delta_{nn'}$$

حيث

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n' \end{cases}$$

ب- علاقة التمام:

$$\sum_n \varphi_n(\vec{r})\, \varphi_n(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

بما أن $\{\varphi_n(\vec{r})\}$ تشكل أساسا في فضاء هلبرت فإنه يمكننا اذن نشر الدالة الموجية على هذا الأساس كما يلي:

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n C_n(t)\, \varphi_n(\vec{r})$$

حيث

$$C_n(t) = (\varphi_n(\vec{r}), \psi(\vec{r},t)) = \langle\varphi_n|\psi\rangle$$

$$(\varphi_n(\vec{r}), \psi(\vec{r},t)) = \int \varphi_n^*(\vec{r})\, \psi(\vec{r},t)\, d^3r$$

$$= \int \varphi_n^*(\vec{r}) \sum_{n'} C_{n'}(t)\, \varphi_{n'}(\vec{r})\, d^3r$$

$$= \sum_{n'} C_{n'}(t) \int \varphi_n^*(\vec{r})\, \varphi_{n'}(\vec{r})\, d^3r$$

$$= \sum_{n'} C_{n'}(t)\, \delta_{nn'} = C_n(t)$$

مثال:

ليكن لدينا جسيم خاضع للكمون التالي:

$$V(x)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0\leq x\leq a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

إن الدالة الذاتية لأحد المؤثرات الممثلة للكميات الفيزيائية تعطى بـ :

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

1 - هل $\varphi_n(x)$ دالة ذاتية لمؤثر الطاقة H وهل هي أيضاً دالة ذاتية لمؤثر الدفع الخطي $\hat{P}_x$ ؟

2 - إذا كانت الإجابة بنعم فعين القيم الذاتية المرافقة.

3 - تأكد من علاقة التعامد والتجانس.

4 - إذا كانت $\psi(x,t)$ الدالة الموجية تكتب في اللحظة $t=0$:

$$\psi(x,t=0)=\psi(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$$

- تعيين كل من C_1 و C_2 بافتراض أن $C_1=C_2$.

الحل :

$2+1$:

A] $$\hat{H}\varphi_n(x)=\left(\frac{P_x^2}{2m}+\cancel{V(x)}^{\,0}\right)\varphi_n(x)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_n(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$=E_n\varphi_n(x)$$

إذن $\varphi_n(x)$ هي دالة ذاتية لمؤثر الطاقة H موافقة بقيمة ذاتية $E_n=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{a^2}$.

B] $$\hat{P}_x\varphi_n(x)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)$$

$$=\frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\neq \alpha_n\varphi_n(x)$$

إذن $\varphi_n(x)$ ليست دالة ذاتية لمؤثر الدفع الخطي $\hat{P}_x$

12

التأكد من علاقة التعامد والتجانس:

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = (\varphi_n(x), \varphi_{n'}(x)) = \int_0^a \left(\frac{2}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx$$

من المعلوم أن:

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$-(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$
$$= 2 \sin A \sin B$$

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = (\varphi_n(x), \varphi_{n'}(x)) = \frac{2}{a}\,\frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}(n-n')x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(n+n')x\right) dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{a}{\pi(n-n')}\sin\left(\frac{\pi}{a}(n-n')x\right) - \frac{a}{\pi(n+n')}\sin\left(\frac{\pi}{a}(n+n')x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi/a\,(n-n')x)}{n-n'} - \frac{\sin(\pi/a\,(n+n')x)}{n+n'}\right]$$

$$= \delta_{nn'} \Rightarrow \boxed{\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \delta_{nn'}}$$

بأن $\{\varphi_n(x)\}$ تحقق علاقة التعامد والتجانس.

4- تعيين C_1 و C_2:

$$\langle\psi|\psi\rangle = (\psi(x,0), \psi(x,0)) = (C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)$$

$$= |C_1|^2 \underbrace{(\varphi_1, \varphi_1)}_{1} + C_1^* C_2 \cancel{(\varphi_1, \varphi_2)}^{0}$$

$$+ C_2^* C_1 \underbrace{\cancel{(\varphi_2, \varphi_1)}}_{0} + |C_2|^2 \underbrace{(\varphi_2, \varphi_2)}_{1}$$

$$= |C_1|^2 + |C_2|^2 = 2|C_1|^2 = 1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2(x).$$

4-2- نتيجة القياس:

حتى هذه اللحظة كل ما نعرفه هو أنه عند القيام بقياسات على الكمية الفيزيائية A للجملة الفيزيائية سنجد أحد القيم الذاتية، أي أنه لا نعرف حتى الآن إلا القيم الممكنة للقياس.

لما كانت حالة الجملة الفيزيائية تصفها الدالة $\psi(\vec{r},t)$ فما هي نتيجة القياس التي سنحصل عليها؟

مسلمة:

إذا كانت حالة الجملة الفيزيائية تصفها الدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)=\sum_n C_n(t)\varphi_n(\vec{r})$ فإن احتمال أن تكون نتيجة قياس الكمية الفيزيائية A عند اللحظة t هي a_n هو:

$$P_n = P(a_n) = \left|\left(\varphi_n(\vec{r}),\psi(\vec{r},t)\right)\right|^2 = |C_n(t)|^2$$

توضيح: تشير هذه المسلمة أيضا إلى نتيجة قياس الكمية الفيزيائية A للجملة ستكون أحد القيم الذاتية ولكن يمكن توقع هذه النتيجة باحتمال يعرف بـ $|C_n|^2$.

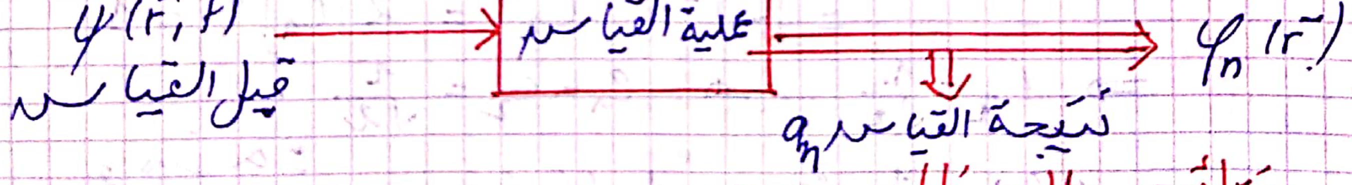
4-2-1- القياسات المتتالية:

السؤال الذي يطرح هنا هو: ماهي نتيجة القياس الجديد للكمية الفيزيائية A مباشرة بعد القياس الأول؟

إن الإجابة على هذا السؤال تكمن في نص المسلمة التالية:

مسلمة:

إذا كانت نتيجة قياس الكمية الفيزيائية A، عند لحظة t، هي a_n فإن الدالة التي تصف حالة الجملة الفيزيائية مباشرة بعد القياس هي $\varphi_n(\vec{r})$ وليست $\psi(\vec{r},t)$.



نتائج وملاحظات:

تتضمن هذه المسلمة ما يلي:

1- إذا قمنا بقياس ثان للكمية الفيزيائية A مباشرة بعد القياس الأول فإننا سنحصل بالتأكيد على نتيجة القياس الأول والتي هي أحد القيم الذاتية.

2- إذا قمنا بإعادة الجملة الفيزيائية بعد كل قياس إلى الحالة التي تصفها الدالة $\psi(\vec{r},t_0)$ (هذا الأخير ام متشابه لتحضير عدة جمل فيزيائية متماثلة وبنفس الشروط الابتدائية). فإننا نتحصل على نتائج مختلفة لقياس الكمية الفيزيائية A والتي تكون قيم من القيم الذاتية.

4-2-2- القيمة المتوسطة:

إذا وصفت حالة الجملة الفيزيائية بالدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ وليست الدالة الذاتية للكمية الفيزيائية A، فإنه لا يمكن الحديث عن قيمة محددة للكمية الفيزيائية A ولكن من الانسب التحدث القيمة المتوسطة لـ A على الدالة $\psi(\vec{r},t)$ والتي تعرف بـ:

$$\langle A\rangle = \frac{(\psi(\vec{r},t),\hat{A}\psi(\vec{r},t))}{(\psi(\vec{r},t),\psi(\vec{r},t))} = \frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\int\psi^*(\vec{r},t)\hat{A}\psi(\vec{r},t)\,d^3r}{\int\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)\,d^3r}$$

- إذا كان الأساس الذي تنشر عليه الدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ هو الأساس المكون من الدوال الذاتية للكمية الفيزيائية A فإن القيمة المتوسطة تكتب:

$$\langle A\rangle = \frac{\int\sum_n C_n^*(t)\varphi_n^*(\vec{r})\hat{A}\sum_{n'}C_{n'}(t)\varphi_{n'}(\vec{r})\,d^3r}{\int\sum_n C_n^*(t)\varphi_n^*(\vec{r})\sum_{n'}C_{n'}(t)\varphi_{n'}(\vec{r})\,d^3r}$$

$$= \frac{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\int\varphi_n^*(\vec{r})\hat{A}\varphi_{n'}(\vec{r})\,d^3r}{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\int\varphi_n^*(\vec{r})\varphi_{n'}(\vec{r})\,d^3r}$$

$$= \frac{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\langle\varphi_n|\hat{A}|\varphi_{n'}\rangle}{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle}$$

$$= \frac{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\,a_n\,\cancel{\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle}^{\,\delta_{nn'}}}{\sum_{nn'}C_n^*(t)C_{n'}(t)\,\delta_{nn'}}$$

$$= \frac{\sum_n |C_n(t)|^2 a_n}{\sum_n |C_n(t)|^2} = \frac{\sum_n P_n a_n}{\sum_n P_n}$$

* هذه النتيجة شبيهة بعبارة المتوسطات التي تقوم بحسابها للقياسات فيزيائية تجريبيا في المخبر، أي:

$$\langle A \rangle = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_k a_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i a_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i a_i$$

حيث $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

ب - إذا كانت الكمية الفيزيائية المقاسة هي موضع الجسم الذي يتحرك في بعد واحد فإن:

$$\langle x \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\, \hat{x}\, \psi(x,t)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\, \psi(x,t)\, dx}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x,t)\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)\, dt}$$

الملاحظ هو أن الدالة الموجية $\psi(x,t)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{x}$.

مثال: إذا كانت الدالة الموجية التي تصف حالة الجملة معرفة بـ:

$$\psi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_2(x)$$

حيث φ_1 و φ_2 هما دالتان ذاتيتان لمؤثر الطاقة $\hat{H}$.

1 - أحسب القيمة المتوسطة للطاقة

الحل:

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_{1}} = |C_1|^2 \int \varphi_1^* \hat{H} \varphi_1\, dx$$

$$+ C_1^* C_2 \int \varphi_1^* \hat{H} \varphi_2\, dx + C_2^* C_1 \int \varphi_2^* \hat{H} \varphi_1\, dx$$

$$+ |C_2|^2 \int \varphi_2^* \hat{H} \varphi_2\, dx.$$

نعلم أن:
$$H\varphi_1 = E_1\varphi_1 \quad / \quad H\varphi_2 = E\varphi_2$$

$$\langle H\rangle = |C_1|^2 E_1 \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + C_1^* C_2 E_2 \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle + C_2^* C_1 E_1 \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle + |C_2|^2 E_2 \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle$$
$$= |C_1|^2 E_1 + |C_2|^2 E_2 = \frac{1}{2}E_1 + 1/2\, E_2 .$$

5- مبدأ الارتياب:

يعتبر مبدأ الارتياب لهايزنبرغ من أهم العلاقات في ميكانيك الكم، سنقتصر هنا على تقديم العلاقتين الأساسيتين مباشرة (نترك البرهان على العلاقة العامة لوقت لاحق):

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1)$$

$$\Delta t\, \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (2)$$

تتضمن العلاقة عدم تحديد وبدقة الدفع الخطي والموضع في آن واحد.

تتضمن العلاقة الثانية عدم تحديد وبدقة الزمن والطاقة في آن واحد.