

Polycopié de

Résistance des Matériaux

RDM

2iem ST GM-EM

Réaliser Par

Mr : ZINE ALI

2016/2015

Table des Matières

INTREDUCTIONS ET GENERALITES

1. But de la résistance des matériaux :	4
2. Hypothèses générales :	4
2.1. Hypothèses sur le matériau :	4
2.2. Hypothèses sur les poutres :	4
1. Définition :	4
2.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs :	4
3. Modélisation des liaisons :	4
4. Les charges :	5
5. Les efforts intérieurs ou de cohésion :	5
6. Détermination du torseur de cohésion :	5
7. Etude de l'équilibre de la poutre :	6
8. Composantes du torseur de cohésion :	6
9. Notion de contrainte :	6
9.1. Vecteur contrainte :	6
10. Identification de la nature des sollicitations :	7

TRACTION ET COMPRESION

1-Définition : Traction/compression	9
2. Essai de traction.....	9
3-Caractéristiques mécaniques :	10
4-Etude des déformations :	10
6-Condition de résistance :	10

CISAILLEMENT

1-Définition :	12
2-Essai de cisaillement :	12
2-1- Diagramme effort- déformation :	12
2-2- Etude de déformation :	13
2-3 Contrainte de cisaillement :	13
2-4 Relation contrainte déformation :	13
3-Condition de résistance au cisaillement :	13
4- Applications :	14

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES

1- Introduction.....	15
2-Aire d'une section	15
3-Moment statique	15
4-Centre de gravité.....	16
5-Moment d'inertie	16
6-Moment d'inertie polaire	16
7-Variations des moments d'inertie	17
7-1-Translation des axes.....	17
7-2-Rotation des axes.....	17

TORSION

1- Introduction.....	19
2-Essai de torsion simple :.....	19
2-1 Principes :	19
2-2 Résultats.....	20
3-Etude des déformations et des contraintes :.....	20
4-Condition de résistance :.....	21
5-Condition de rigidité :.....	21

FLEXION

1- Introduction.....	22
2. Essai de flexion :.....	22
3-Contraintes normales en flexion plane.....	22
4-Calcul de résistance en flexion :	24
5-Déformation en flexion :.....	24
6-Condition de rigidité en flexion :.....	24
3-Etude des déformations et des contraintes :.....	20
4-Condition de résistance :.....	21
5-Condition de rigidité :.....	21

CHAPITRE I

INTREDUCTIONS ET GENERALITES

1. But de la résistance des matériaux :

La résistance des matériaux (RdM) étudie le comportement du solide déformable. Elle s'intéresse particulièrement au calcul des dimensions des systèmes mécaniques pour qu'ils soient en mesure de supporter les efforts qui leur sont appliqués pendant leur service dans les conditions de sécurité requise.

2. Hypothèses générales :

Ces hypothèses concernent essentiellement les matériaux utilisés, la forme des solides étudiés et le type d'action mécanique exercée.

2.1. Hypothèses sur le matériau :

1- L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau : On suppose que le matériau a les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions et que le matériau est assimilé à un milieu continu (pas de défaut macroscopique tels que fissures, criques)

2- L'élasticité et la linéarité du matériau : On suppose qu'en chaque point contraintes et déformation sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

2.2. Hypothèses sur les poutres :

1. Définition :

Nous appelons poutre un solide dont une des dimensions est grande vis-à-vis de deux autres et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir ou le déformer.

1- L'aire de la section (S) est appelée section droite ou section normale de la poutre.

2- La courbe (C) est appelée fibre moyenne de la poutre, si la fibre moyenne est une droite, la poutre est dite droite.

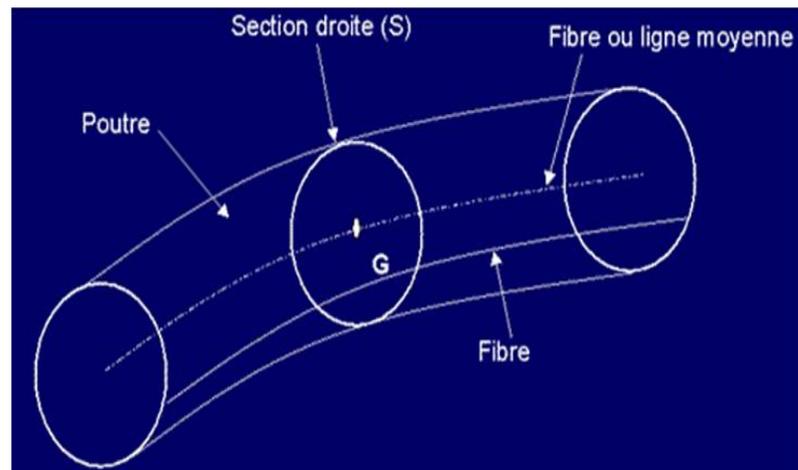


Fig.I.1 : la poutre

3- Le rayon de courbure de la fibre moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre.

2.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs :

1- Toute action mécanique est représentée par un torseur en un point. Ces actions peuvent être concentrées ou réparties, exercées à distance ou en contact.

2- Les efforts extérieurs sont situés dans le plan de symétrie de la poutre ou disposés symétriquement par rapport à ce plan.

3. Modélisation des liaisons :

Liaison encastrement : Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du Moment M perpendiculaire au plan moyen.

Liaison rotule (appui ou articulation) : L'articulation introduit 2 inconnues, par projection sur deux directions du plan moyen.

Liaison appui-simple : L'appui simple introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

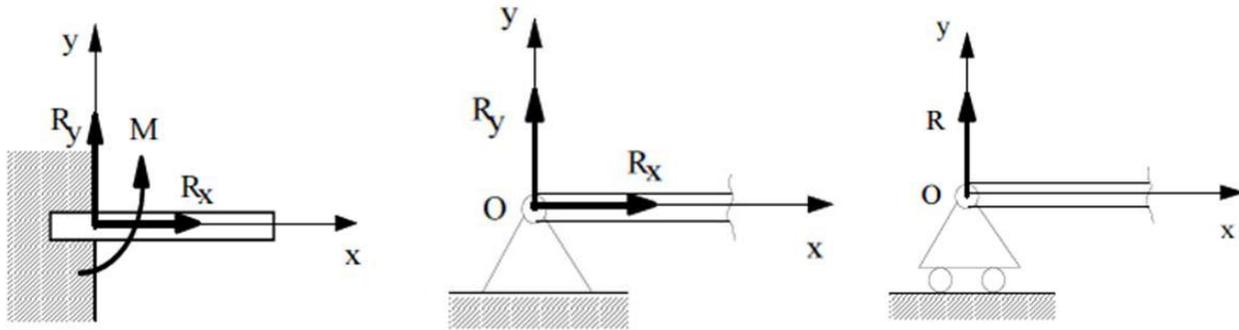


Fig I-2 : Symboles d'articulations : encastré ; rotule ; simple

4. Les charges :

1-Les **charges concentrées** qui s'appliquent en un point de la poutre et définie par un torseur en ce point d'application. . Si ce torseur se réduit à une résultante, on l'appelle **force concentrée**. Si ce torseur se réduit à un couple (ou un moment) on l'appelle **moment concentré**.

2-Les **charges réparties** qui sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre et sont représentées par un champs de vecteurs uniforme ou non.

5. Les efforts intérieurs ou de cohésion :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des poutres et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées. La connaissance de ces efforts de cohésion nous renseignera sur l'état de sollicitation de la poutre étudiée, et permettra d'évaluer sa résistance aux efforts qui lui sont appliqués.

6. Détermination du torseur de cohésion :

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau d'une section droite d'une poutre, nous effectuons une coupure imaginaire par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne. Ce plan définit une section S de barycentre G qui divise la poutre en deux tronçons fictifs (AG et GB). Chaque tronçon est en équilibre et l'application du principe fondamental de la statique, à l'un ou à l'autre, permet d'identifier et de calculer les efforts intérieurs exercés entre les deux tronçons au niveau de la coupure.

Les actions mécaniques entre les deux tronçons sont les efforts intérieurs à la poutre que l'on peut modéliser par un torseur appelé torseur de cohésion $\{\tau_{coh II/I}\}_G$ et dont les éléments de réduction au point G centre de surface sont : Une résultante R ; un moment résultant M_G

$$\{\tau_{coh II/I}\}_G = \{\tau_{Efforts interieures}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$$

Deux conventions d'écriture sont possibles :

1-Convention 1 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (2) sur la partie (1).

2- Convention 2 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (1) sur la partie (2).

7. Etude de l'équilibre de la poutre :

L'équilibre du tronçon I ou de la partie gauche se traduit par :

$$\{\tau_{coh}\}_G + \{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\vec{0}\};$$

avec $\{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\tau_{\vec{F}_{1 \rightarrow 1}}\}_G + \{\tau_{\vec{F}_{3 \rightarrow 1}}\}_G$;

c à d

$$\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_{actions\ meca\ à\ gauche}\}.$$

à l'équilibre de

$$poutre \{\tau_{acts\ mec\ à\ gauche}\}_G +$$

$$\{\tau_{acts\ mec\ à\ droit}\}_G = \{\vec{0}\}.$$

8. Composantes du torseur de cohésion :

$$\{\tau_{coh}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G \text{ tel que}$$

- N : Effort normal
- T_y : Effort tranchant suivant l'axe (GY)
- T_z : Effort tranchant suivant l'axe (GZ)
- M_t : Moment de torsion
- M_{fy} : moment de fléchissant suivant (GY)
- M_{fz} : moment de fléchissant suivant (GZ)

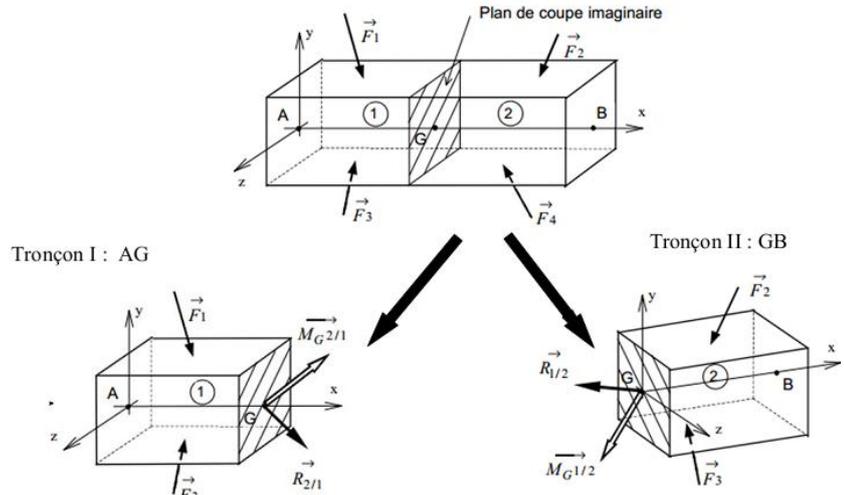


Fig I.3 : illustration de principe de coupe

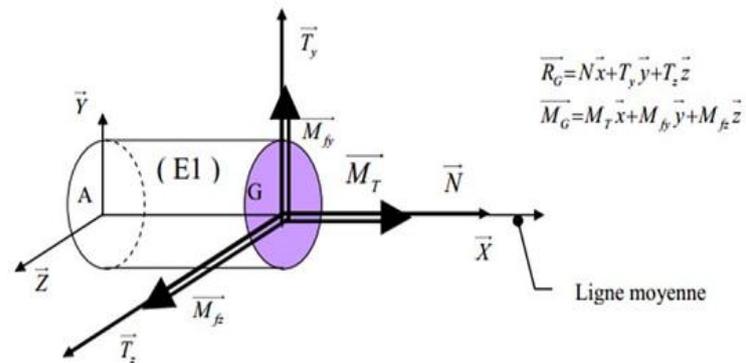


Fig.VI.4 : Les composantes du moment

9. Notion de contrainte :

9.1. Vecteur contrainte :

Pour représenter les actions mécaniques en chaque point de section droit de la poutre, on considère un point M de la surface S. Autour de ce point M, on considère un élément de surface dS de normale \vec{n} .

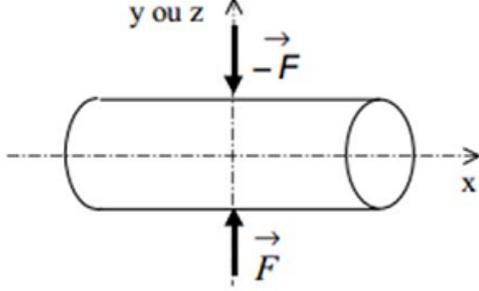
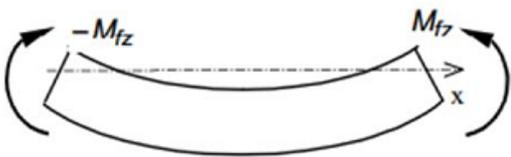
Les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface. Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte $\vec{C}(M, \vec{n})$.

Les actions mécaniques s'exerçant sur la surface sont donc $d\vec{F} = \vec{C}(M, \vec{n})dS$. L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par unité de surface soit N/m² ou Pa. La projection de \vec{C} sur \vec{n} est σ (contrainte normale) ; la projection de \vec{C} sur \vec{t} est τ (contrainte tangentielle).

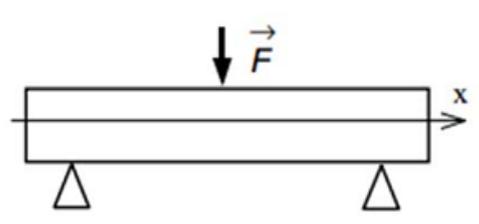
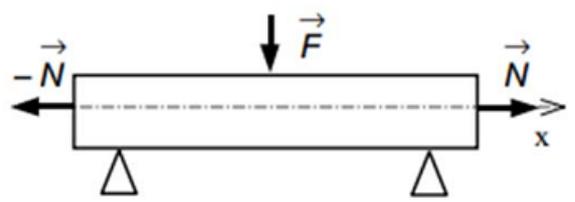
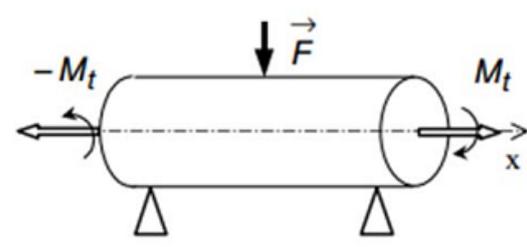
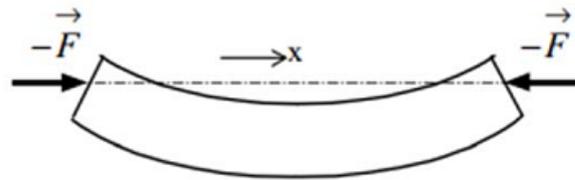
\vec{n} : vecteur normale à l'élément de surface dS; \vec{t} : vecteur tangent à l'élément de surface dS.

10. Identification de la nature des sollicitations :

Si une seule composante N, T, M_t , ou M_f existe, les autres sont nulles on dit que l'on a une sollicitation simple.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	<p>TRACTION (pour la compression, les vecteurs forces sont en sens inverse)</p>	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ <p>ou</p> $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$	<p>CISAILLEMENT</p>	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	<p>TORSION</p>	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ <p>ou</p> $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	<p>FLEXION PURE</p>	

Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION PLANE SIMPLE	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION + TRACTION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION + TORSION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLAMBAGE	

CHAPITRE II

TRACTION ET COMPRESSION

1-Définition : Traction/compression

On dit qu'une poutre (E) travaille en extension simple (ou en compression simple) quand elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{matrix} N > 0 \text{ traction} \\ N < 0 \text{ compression} \end{matrix}$$

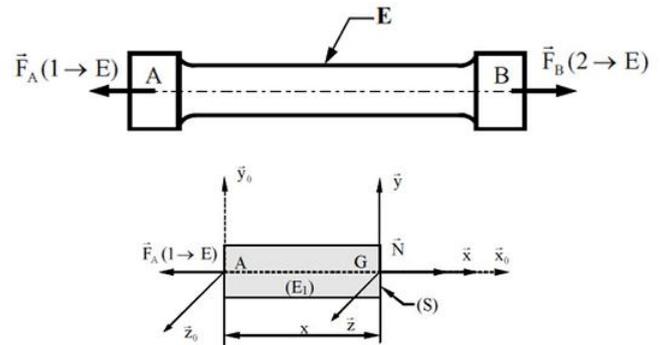


Fig.II.1 : poutre sollicitée en traction

2. Essai de traction.

Il permet de déterminer la Limite élastique et la Résistance à la rupture des différents matériaux. Il permet de définir les caractéristiques de résistance des matériaux.

Cet essai consiste à soumettre à 20°C une « éprouvette » de longueur l à un effort de traction, progressivement croissant, généralement jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

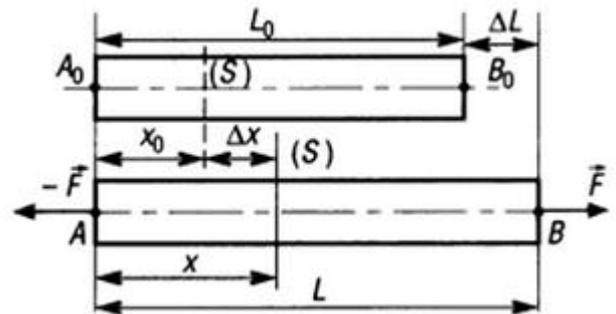


Fig.II.2 : Essai de traction

Dans la fig II.3 $\sigma = \frac{F}{S_0}$ Contrainte de traction [MPa].

F : effort de traction.

S₀ : Section initiale de l'éprouvette [mm²].

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. La pente Ede la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la loi de Hooke : $\sigma = E\varepsilon$

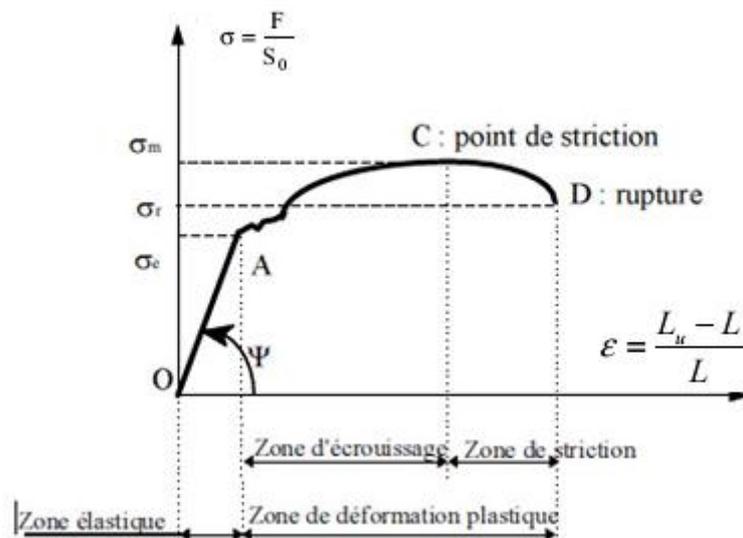


Fig II.3 : Courbe contrainte déformation <traction>

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale.

3-Caractéristiques mécaniques :

Les caractéristiques mécaniques tirées de l'essai sont :

- 1- Limite élastique : Elle peut être apparente (R_e ou σ_e) ou conventionnelle ($R_{e0,2}$)
- 2- Module d'élasticité longitudinale ou module de Young : E.
- 3- Résistance à la rupture : σ_r ou R_r .
- 4- Contrainte maximale : σ_m ou R_m .
- 5- Allongement : $A\% = \frac{L_f - L_i}{L_i} \%$.

4-Etude des déformations :

L'allongement Δx est le même pour tous les points d'une section droite (S) repérée par x.

Il s'en suit que l'allongement unitaire $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$ (sans unité) est le même en tout point de section.

En général, on néglige la variation de la section, c'est à dire la déformation transversale (striction) : $\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$, ν étant le coefficient de Poisson caractérisant le rapport entre

l'allongement relatif de la poutre ϵ_x et la contraction latérale (raccourcissement) ϵ_y . Compris entre 0.3 et 0.5 pour les aciers.

5-Contraintes en traction-compression :

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où : $\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{x}$ et comme $N = \iint \sigma dS \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S}$, $N[N]$, $S[mm^2]$, $\sigma[MPa]$. Si $\sigma > 0$ traction ; sinon compression.

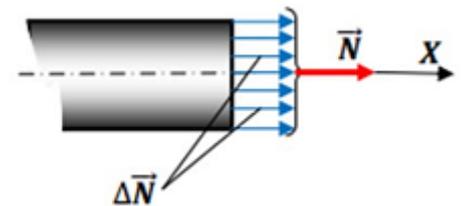


Fig.II.4 : Répartition uniforme de contrainte

6-Condition de résistance :

Les contraintes développées dans les poutres doivent rester dans le domaine élastique. En général, on adopte un coefficient de sécurité s. La condition de résistance pour une contrainte normale d'extension est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{\sigma_e}{s} \quad \text{tel que } R_{pe} \text{ contrainte pratique à la traction.}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pc} = \frac{\sigma_c}{s} \quad \text{tel que } R_{pc} \text{ contrainte pratique à la compression.}$$

7-Loi de déformation élastique

On considère une barre de longueur initiale L soumise à un effort normal N. Une portion de longueur dx de la barre subit une variation de longueur $du = \Delta(dx)$ (Fig.II.5).

On appelle déformation longitudinale dans la section d'abscisse x la quantité dimensionnelle :

$$\epsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} \Rightarrow \Delta(dx) = \epsilon dx . \text{ d' autre part } \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} \quad \text{ainsi}$$

$$\Delta(dx) \text{ vaut } \Delta(dx) = \frac{N dx}{ES}$$

et la déformation totale de la barre est donc

$$\Delta L = \int_0^L \Delta(dx) = \int_0^L \frac{N}{ES} dx .$$

Cas particulier

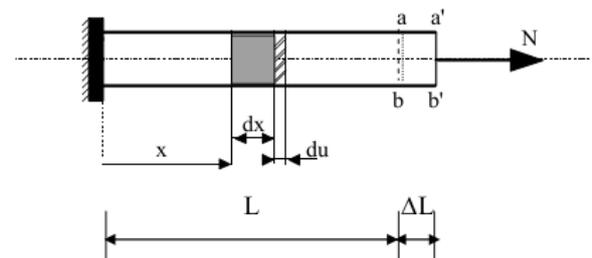


Fig.II.5 : Déformation linéaire

Pour une barre homogène de section constante, si N est constant l'allongement absolu s'écrit:

$\Delta L = \frac{NL}{ES}$ donc $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{ES}$ tel que ΔL = l'allongement absolu, ε allongement (déformation) relative.

Exemple

Déterminer l'allongement total de la barre métallique, sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. La section de la barre est constante et vaut 5 cm^2 .

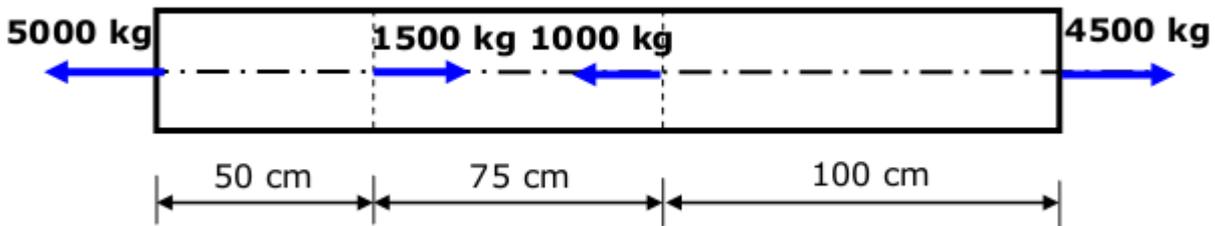


Fig.II.6

$$\Delta L = \int_0^{50} \frac{Ndx}{ES} + \int_{50}^{125} \frac{Ndx}{ES} + \int_{125}^{225} \frac{Ndx}{ES}$$

CHAPITRE III

CISAILLEMENT

1-Définition :

Une poutre est sollicitée au cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, perpendiculaire à la ligne moyenne, et qui tendent la cisailer ; ou lorsque le torseur de cohésion peut se réduire en G barycentre de la section droite S, à une résultante contenue dans le plan de cette section.

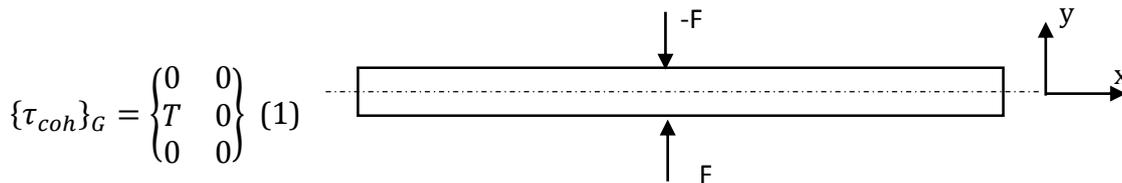


Fig .III.1 :Poutre en cisaillement

2-Essai de cisaillement :

L'essai de cisaillement consiste à soumettre une éprouvette de section rectangulaire à deux charges F et -F distance Δx . l'éprouvette se déforme comme l'indique la fig.III.2 les encastremets en (A_1, B_1) et (A_2, B_2) empêchent la rotation des section droites. On augmente F et en relève la valeur du déplacement Δy correspondant.

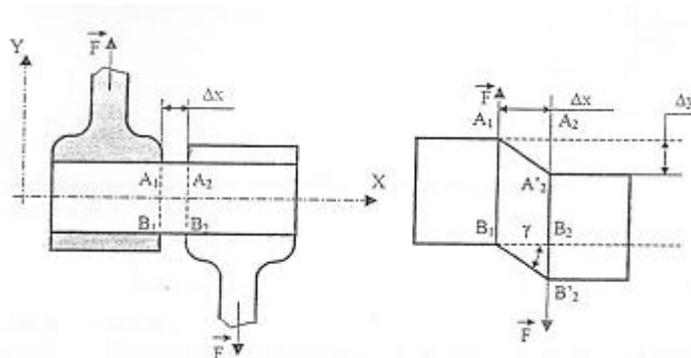


Fig.III.2 : Essai de cisaillement

2-1- Diagramme effort- déformation :

Zone OA déformation élastique. Le glissement est proportionnel avec la charge.

Zone AD déformation plastique.

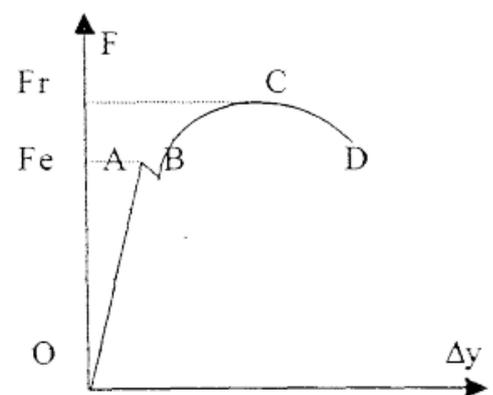


Fig.III.3 : courbe effort-déformation

2-2- Etude de déformation :

On considère la section cisillée dans la fig.III.2 et on montre par la fig.III.4 que La section A_2 , B_2 glisse par rapport à la section A_1 , B_1 . La déviation donner par.

$$tg\gamma = \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ en [rad ou dég]} \quad (III-2)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta y \cos 45^\circ}{\Delta x / \sin 45^\circ} = \frac{\Delta y}{2\Delta x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\gamma}{2} \quad (III-3)$$

2-3 Contrainte de cisaillement :

Considérons le cas d'un tronçon de poutre à deux forces comme le montre la fig.III.5 ;

Nous avons l'effort tranchant :

$$T=F ; \quad (III-4)$$

Et la relation entre l'effort tranchant et la contrainte tangentielle agissant sur la face de la section s'écrit :

$$T = \iint \tau_{moi} ds \Rightarrow T = \tau_{moi} S \Leftrightarrow \tau_{moi} = \frac{T}{S} \text{ avec } T=F \text{ donc } \tau_{moi} = \frac{F}{S}. \quad (III-5)$$

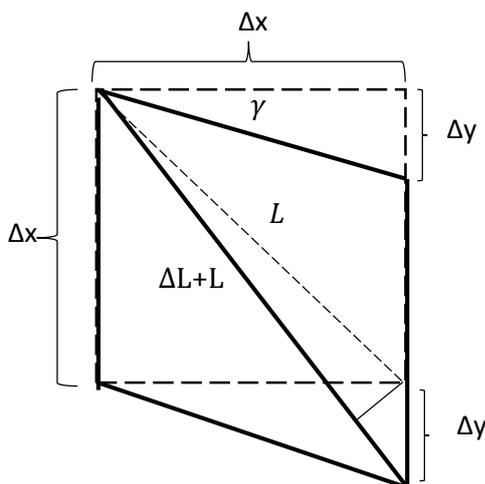


Fig.III.4 : Déformation de cisaillement

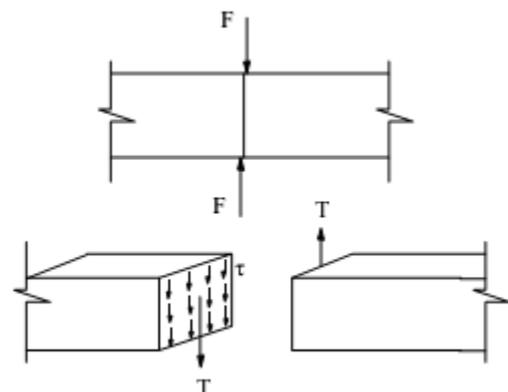


Fig.III.5 : Distribution de contrainte de cisaillement

2-4 Relation contrainte déformation :

Pour beaucoup de matériaux, la déformation de cisaillement est linéairement proportionnelle à la contrainte de cisaillement dans certaines limites (glissement faible). Cette dépendance linéaire est semblable au cas de la traction et de la compression directe. Dans les limites de la proportionnalité, on a :

$$\tau = G\gamma ; \quad (III-6)$$

Le coefficient de proportionnalité G est appelé module d'élasticité transversale ou de cisaillement.

La relation (6) s'appelle la loi de HOOKE pour le cisaillement.

3-Condition de résistance au cisaillement :

Pour qu'une pièce sollicitée en cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte de cisaillement ne dépasse pas une valeur critique $[\tau]$ appelée contrainte admissible en cisaillement ou contrainte pratique en cisaillement :

$$\tau \leq [\tau] = \tau_p = \frac{\tau_e}{n} \quad (\text{III-7})$$

Tel que n est le coefficient de sécurité ; τ_e est la limite élastique en cisaillement ; τ_p est la contrainte pratique.

4- Applications :

En pratique, un bon nombre d'éléments de structure travaille principalement sous cisaillement. Le cisaillement peut être utilisé dans le dimensionnement de pièces travaillant en cisaillement. Les exemples les plus simples sont les assemblages par boulons ou par rivets, ou encore les assemblages par soudure.

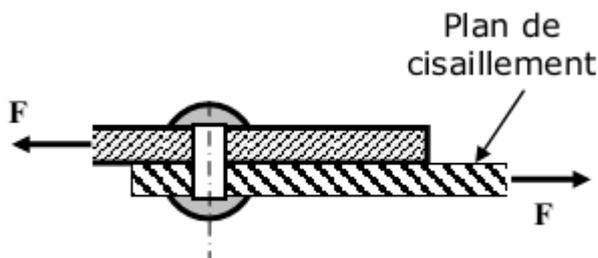


Fig.III.6 : Assemblage par rivet

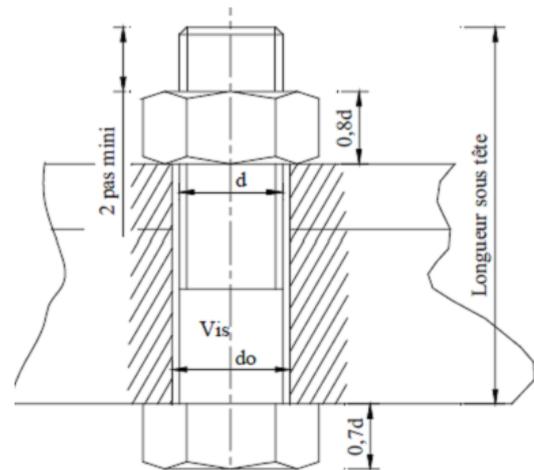


Fig.III.7 : Assemblage par boulon

CHAPITRE IV

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES

1- Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section.
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe).
- Centre de gravité.
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe).

2-Aire d'une section

Par définition l'aire A d'une section est définie par l'intégrale :

$$A = \iint dA \quad (\text{IV-1})$$

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme :

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (\text{IV-2})$$

3-Moment statique

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe ox ou oy (Fig. IV.1) est donné par l'une des expressions suivantes :

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (\text{IV-3})$$

Si on procède à des translations parallèlement aux axes ox et oy , les moments statiques changent. Soit la section montrée par la (Fig.IV.2) telle que S_x, S_y et A sont connus et on se propose de déterminer $S_{x'}$ et $S_{y'}$.

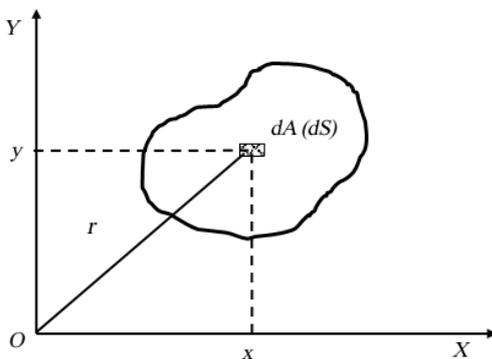


Fig. IV.1 : coordonnées de dS

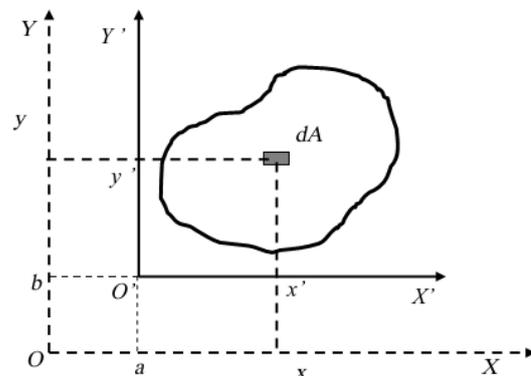


Fig.IV.2 :Translation des axes

De la Fig.IV.2 on a

$$x' = x - a, \quad \text{et} \quad y' = y - b \quad (\text{IV-4})$$

Par définition

$$S_{x'} = \int_A y' dA = \int_A (y - b) dA \quad (IV-5)$$

$$S_{y'} = \int_A x' dA = \int_A (x - a) dA \quad (IV-6)$$

D'où

$$S_{x'} = S_x - bA \quad , \quad S_{y'} = S_y - aA \quad (IV-7)$$

4-Centre de gravité

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

On peut choisir a et b de sorte que $S_{x'}$ et $S_{y'}$ soient nuls, c-à-d :

$$S_{x'} = S_x - bA = 0 \Rightarrow y_G = b = S_x/A \quad , \quad S_{y'} = S_y - aA = 0 \Rightarrow x_G = a = S_y/A \quad (IV-8)$$

Remarque

Pour une section composée, les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions :

$$S_x = \sum_{i=1}^{n(\text{nombre se section})} y_{Gi} A_i \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^n x_{Gi} A_i \quad (IV-9)$$

5-Moment d'inertie

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le degré de résistance de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

Par définition, l'intégrale

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (IV-10)$$

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe. Il est toujours positif et s'exprime en m^4 (cm^4 , mm^4).
Fig.IV.3

L'intégrale :

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (IV-11)$$

S'appelle moment centrifuge ou produit d'inertie de la section A par rapport au système xoy.

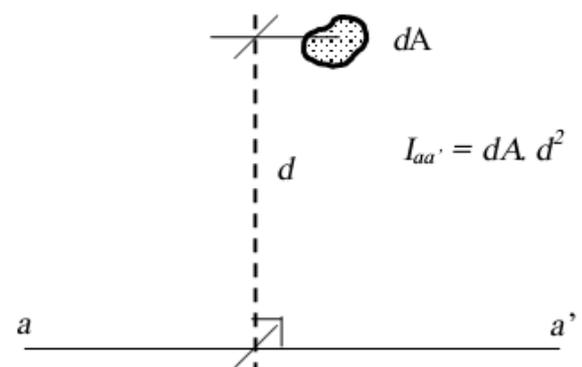


Fig.IV.3 : Moment d'inertie /un axe

6-Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (IV-12)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (IV-13)$$

$$I_p = I_x + I_y \quad (IV-14)$$

7-Variations des moments d'inertie

7-1-Translation des axes

Soit une section A, ses moments d'inertie dans le système xoy: I_x , I_y , I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système $x'o'y'$ en procédant aux translations des axes ox et oy conformément à la Fig.IV.4 .

$$\begin{aligned} x' = x + a \text{ et } y' = y + b &\Rightarrow I_{x'} = \int_A y'^2 dA \Leftrightarrow I_{x'} \\ &= \int_A (y + b)^2 dA \Leftrightarrow I_{x'} = \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + \int_A b^2 dA \\ &= I_x + 2bS_x + b^2 A \end{aligned} \quad (15)$$

On suit le même raisonnement pour $I_{y'}$ et $I_{x'y'}$.

Si O coïncide avec G S_x et S_y deviennent nuls donc

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \quad (IV-16)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \quad (IV-17)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \quad (IV-18)$$

7-2-Rotation des axes

Les moments d'inertie de la section A dans le système uov qui fait un angle θ avec le système xoy Fig.IV.4 .

D'après Fig.IV.4

$$\begin{aligned} u &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (IV-19)$$

On

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA = \cos^2 \theta \iint y^2 dA + \sin^2 \theta \iint x^2 dA - \\ &2 \sin \theta \cos \theta \iint xy dA = \cos^2 \theta I_x + \sin^2 \theta I_y - 2 \cos \theta \sin \theta I_{xy}. \end{aligned} \quad (IV-20)$$

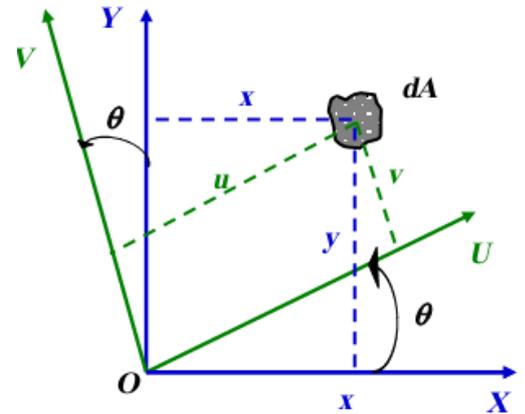


Fig.IV.4 : Rotation des axes

En utilisant les relations trigonométriques :

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad ; \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

L'expression ci-dessus devient :

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \quad (IV-21)$$

En suivant le même raisonnement on obtient :

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos(2\theta) + I_{xy} \sin(2\theta) \quad (IV-22)$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x + I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos(2\theta) \quad (IV-23)$$

On remarque que

$$I_x + I_y = I_u + I_v$$

Pour déterminer ($I_1=I_{max}$) et ($I_2=I_{min}$), on peut utiliser le cercle de Mohr. Pour tracer le cercle de Mohr, on suit les étapes suivantes :

- 1- tracer un repère orthogonal et orthonormé (O, I_Q, I_{QR}) (Fig. IV.5) :
- 2- placer les points $A(I_x, I_{xy})$ et $B(I_y, -I_{xy})$ dans ce repère ;
- 3- déduire le point C, point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses ;
- 4- déduire du cercle de Mohr I_{max} (I_1) et I_{min} (I_2):

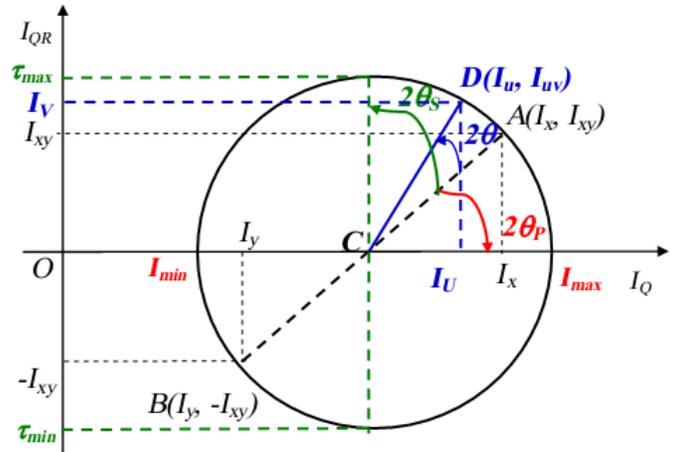


Fig.IV.5 : cercle de Mohr

On a

$$\begin{cases} I_{max} = \overline{OC} + R \\ I_{min} = \overline{OC} - R \end{cases} \quad (IV-24)$$

D'où

$$\begin{cases} I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \\ I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \end{cases} \quad (IV-25)$$

CHAPITRE V

TORSION

1- Introduction

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

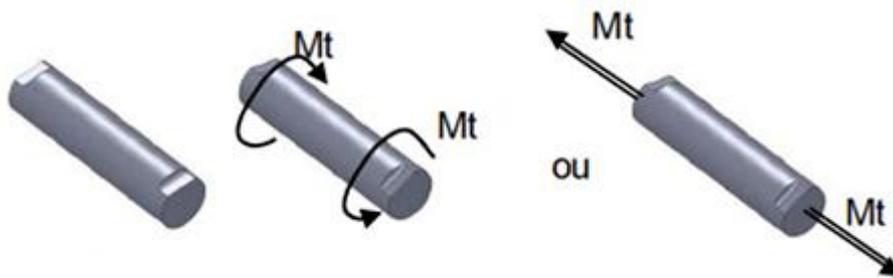


Fig.V.1 : Moments des actions extérieures appliqués à de la poutre.

La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé. Le torseur des efforts de cohésion à la section droite (S) de centre de surface G est défini par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G \quad (V-1)$$

2-Essai de torsion simple :

2-1 Principes :

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastree à son extrémité (S1) de centre de gravité G1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un torseur « couple » :

$$\{\tau\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{Bmatrix}_{G_2} \quad (V-3)$$

En faisant croître $\vec{M}_{G_2} = M_{G_2} \vec{x}$, on mesure les déformations de la poutre.

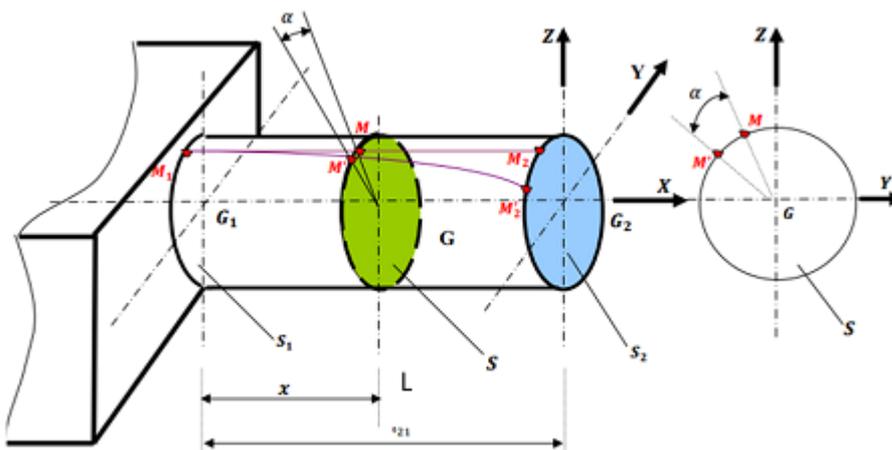


Fig.V.2 : illustration l'essai de torsion simple

2-2 Résultats

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1).

On obtient une courbe illustrée à la Fig.VI.3 semblable à celle de l'essai de traction :

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

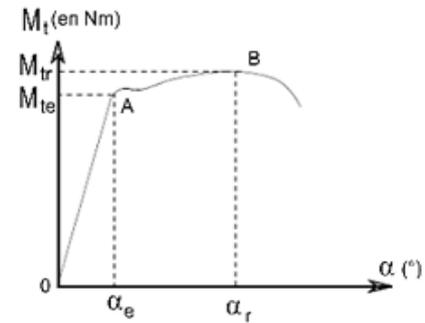


Fig.V.3 : courbe $M_t=f(\alpha)$

3-Etude des déformations et des contraintes :

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

De plus, une ligne longitudinale sur la surface de la barre a-b tourne d'un petit angle vers la position a-b', On constate qu'un élément rectangulaire infinitésimal sur la surface de la barre de longueur dx se déforme en parallélogramme. L'angle de la déformation γ est appelé : distorsion exprimé par :

$$tg\gamma = \gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (1) \quad \text{avec } bb' = r d\alpha \quad (2) \quad \text{et } ab = dx \quad (V-3)$$

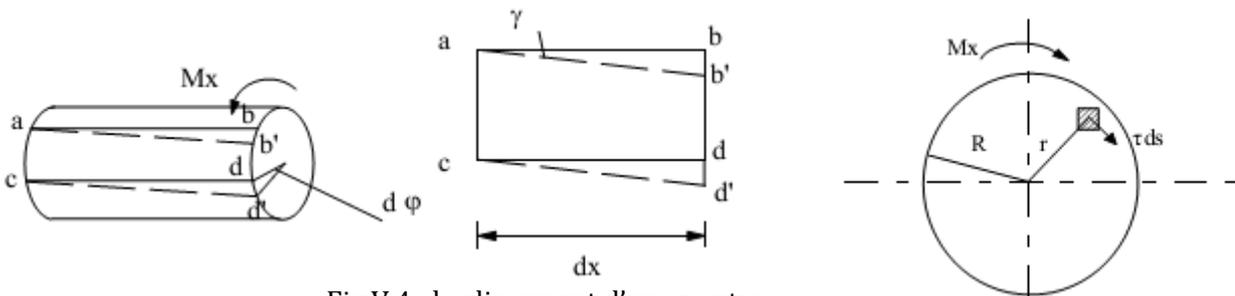


Fig.V.4 : le glissement d'une poutre

Donc $\gamma = r \frac{d\alpha}{dx}$ (V-4) ; tel que $\frac{d\alpha}{dx} \left[\frac{rad}{mm} \right]$ (V-5) ; est la rotation relative. Analogue à $\frac{\Delta L}{L}$ déformation relative longitudinale. D'après la loi de Hooke au cisaillement $\tau = G\gamma \Rightarrow Gr \frac{d\alpha}{dx}$ (V-6)

La relation entre le moment de torsion et l'angle α peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles τ réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_x .

$$M_x = \iint r \tau ds \quad (V-7) ; \text{ en substituant } \tau \text{ par son expression (6) en trouve } M_x = \iint r^2 G \frac{d\alpha}{dx} ds \quad (V-8) \text{ finalement la relation entre le moment de torsion et l'angle } \alpha \text{ est } M_x = G \frac{d\alpha}{dx} \iint r^2 ds \quad (V-9)$$

D'où l'expression de déformation angulaire relative :

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\tau}{Gr} \quad (10) ; \text{ donc } \tau = \frac{M_x}{I_p} r \quad (V-11)$$

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures Fig.VI.5 :

Pour $r=R$ $\tau_{max} = \frac{M_x R}{I_p}$ (V-12) ; et la quantité $W_p = \frac{I_p}{R}$ (V-13) ; est appelée module de torsion.

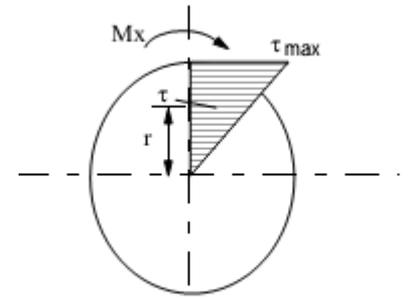


Fig.V.5 : Distribution de contrainte tangentielle

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenu par (10) ; $\alpha = \int_0^L \frac{M_x}{GI_p} dx$ (V-14)

Si la section de la barre rectangulaire on :

$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_t}$ (V-15) ; avec $W_t = \varphi hb^2$ (V-16) ; et $\tau' = \beta \tau_{max}$ (V-17) ; l'angle de rotation $\alpha = \frac{M_x L}{GI_t}$ (V-18) ; ; $I_t = \eta hb^3$ (V-19) ;

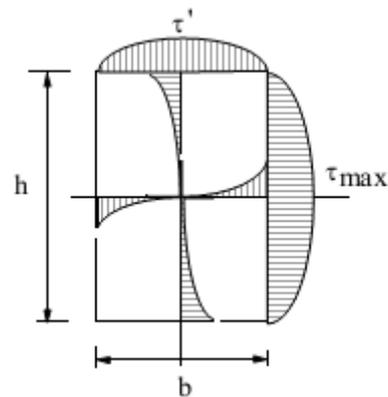


Fig.V.6 : Distribution de τ l'une section rectangulaire

Les coefficients φ , β et η sont donnés en fonction du rapport h/b dans le tableau suivant :

h/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
ω	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267
β	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753
η	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263

4-Condition de résistance :

D'où la condition de résistance d'une pièce en torsion :

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau_e}{n} \quad (V-20)$$

τ_e limite élastique en torsion ; n : coefficient de sécurité ; $[\tau]$: contrainte admissible à la torsion.

5-Condition de rigidité :

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{lim} . D'où la condition de rigidité d'une pièce en

$$\text{torsion } \frac{M_t}{GI_p} \leq \theta_{lim} \quad (V-21)$$

CHAPITRE VI

FLEXION

1- Introduction

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces appliquées à la poutre que ce soient les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

Au cours de la déformation, les sections droites (constantes) restent planes et normales à la ligne moyenne. La ligne moyenne de la poutre est rectiligne et confondue avec l'axe (o,x) . Le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à une résultante contenue dans le plan de la section et à un moment perpendiculaire à cette dernière.

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$$

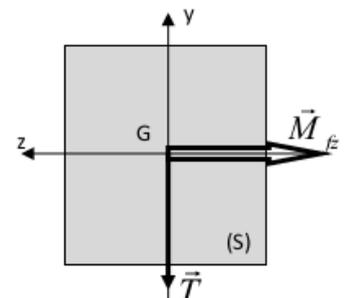
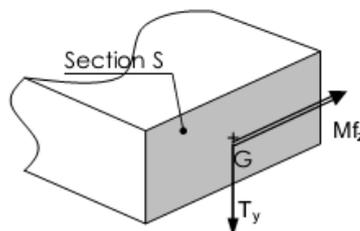


Fig.VI.1 : Résultante et moment de flexion d'une poutre est sollicitée en flexion

2. Essai de flexion :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumis à une charge concentrée verticale (Fig. VI.2).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre. Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

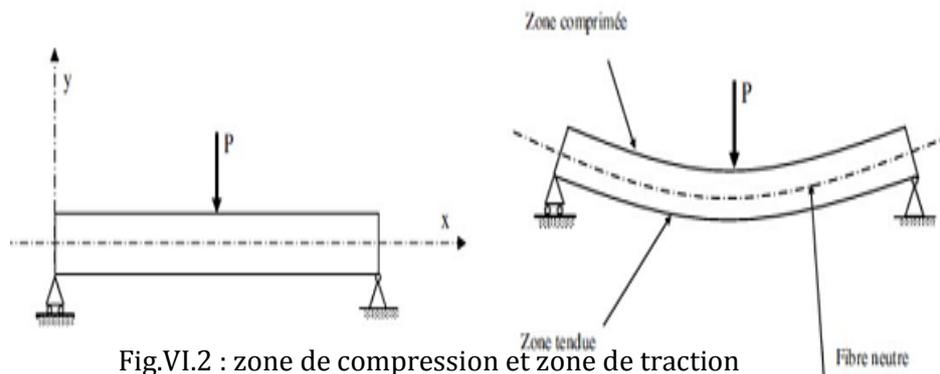


Fig.VI.2 : zone de compression et zone de traction d'une poutre en flexion

3-Contraintes normales en flexion plane

Lorsque la poutre fléchit (FigVI.3), la section droite pivote d'un angle dθ Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes :

$$\varepsilon = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(R + y)d\theta - dx}{dx} \quad (VI - 1)$$

Avec $dx = R d\theta \Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \Rightarrow \sigma = \frac{E}{R} y \quad (VI - 2)$

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$M = \iint \sigma y ds \Rightarrow M = \iint \frac{E}{R} y^2 ds \Rightarrow M = \frac{E}{R} \iint y^2 ds \Leftrightarrow M = \frac{EI_z}{R} \quad (VI-3)$$

Avec $\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (VI-4)$

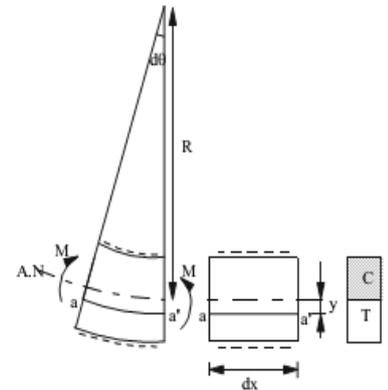
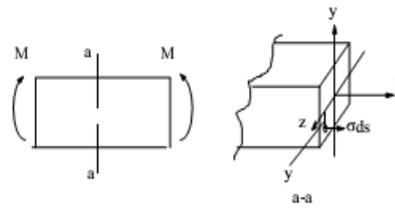


Fig.VI.3 : contrainte normale en flexion

L'équation (4) est appelée formule de Navier dont on note que :

- ✓ Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie I.
- ✓ Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.
- ✓ La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on ne considérera que les cas particuliers suivants :

a- Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :

$$y_{max}^- = y_{max}^+ \Rightarrow |\sigma_{max}^-| = |\sigma_{max}^+| = \sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z} \quad (VI-5)$$

σ_{max} : contrainte normale maximal ;

$W_y = \frac{y_{max}}{I_z}$ module résistant de la section ;

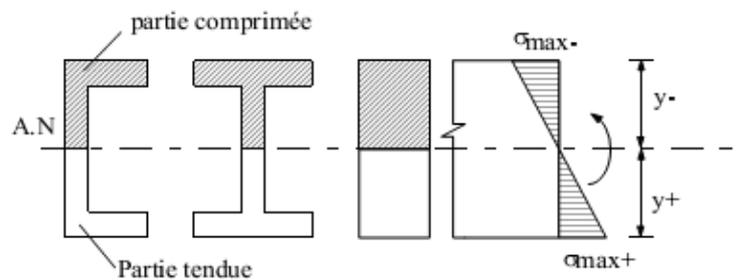


Fig.VI.4 : Sections symétriques

b- Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes.

$$|\sigma_{max}^-| = \frac{|My_{max}^-|}{|I_z|} \Rightarrow W_y^- = \frac{y_{max}^-}{I_z} \quad (VI-6)$$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{My_{max}^+}{I_z} \Rightarrow W_y^+ = \frac{y_{max}^+}{I_z} \quad (VI-7)$$

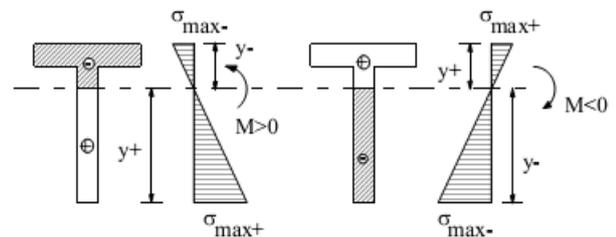


Fig.VI.5 : Sections non symétriques

σ_{max}^- : contrainte de compression max; σ_{max}^+ : contrainte de traction max; d'où en distinguant 2 modules de résistant de la section $\frac{y_{max}^-}{I_z}$; $\frac{y_{max}^+}{I_z}$.

4-Calcul de résistance en flexion :

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

a-Pour une section symétrique :

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{My_{\max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma^-], [\sigma^+]) \quad (VI-8)$$

b-Pour une section non symétrique

$$\text{si } [\sigma^-] = [\sigma^+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{\max}^-|, |\sigma_{\max}^+|) \leq [\sigma] \text{ sino } |\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma^-], |\sigma_{\max}^+| \leq [\sigma^+]. \quad (VI-9)$$

5-Déformation en flexion :

On appelle déformée, la courbe de la ligne moyenne de la poutre après déformation. L'équation de la déformée est : $y=f(x)$.

y est la flèche au point d'abscisse x .

Les dérivées première et seconde sont notées y' et y'' .

Relation entre flèche et moment fléchissant :

$$EI_z y'' = -M_{fz} \quad (VI-10)$$

6-Condition de rigidité en flexion :

On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite f_{lim} : $y_{\max} \leq f_{lim}$. (VI-11)

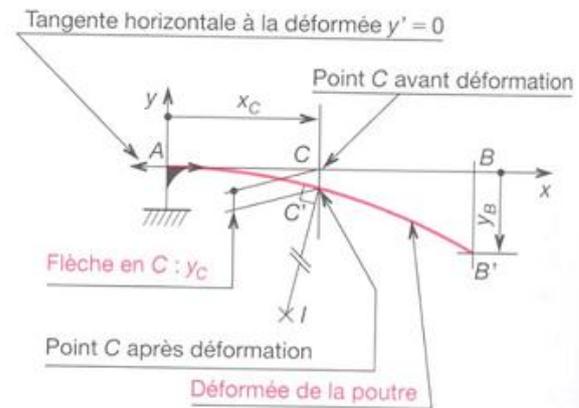


Fig.VI.7 : La flèche d'une poutre