جامعة الوادي

كلية العلوم الدقيقة

الأستاذ: بقاص محمد

قسم الرياضيات

مقياس: تحليل عددي: ثانية

الفصل الأول:

الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

I تذكير:

لحل جملة معادلات خطية تعرضنا سابقا لطريقة كرامر والمصفوفة العكوس. سيتم التطرق لهما في الأعمال الموجهة أما في هذا الفصل فسوف نتعرف للطرق التالية:

1- طريقة غوص للحذف

2- طريقة التفكيك: LU

3- طريقة شولسكي

1 - طريقة غوص:

تعتمد طريقة غوص على تبديلات تخص الجملة الخطية ($AX = b$) حيث يتم في كل مرة حذف متغير من معادلة الى ان نصل الى جملة خطية تتحول من خلالها A الى مصفوفة علوية أو سفلية ثم يتم استنتاج الحلول بالتعويض.

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = y_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = y_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = y_3 & (3) \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

المرحلة الأولى: (الحذف)

أ) $a_{11} \neq 0$: نقوم بقسمة المعادلة (1) على a_{11}.

فنحصل على:

$$(1): \quad x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + a^1_{14}x_4 = y^1_1$$

$$a^1_{1j} = a_{1j}/a_{11} \quad ; \quad y^1_1 = y_1/a_{11} \quad j = 1,2,3,4$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_1 من المعادلات (2)، (3)، و (4) نجد:

$$(S^1)\begin{cases} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + a^1_{14}x_4 = y^1_1 & (1') \\ 0 + a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + a^1_{24}x_4 = y^1_2 & (2') \\ 0 + a^1_{32}x_2 + a^1_{33}x_3 + a^1_{34}x_4 = y^1_3 & (3') \\ 0 + a^1_{42}x_2 + a^1_{43}x_3 + a^1_{44}x_4 = y^1_4 & (4') \end{cases}$$

حيث:

$$a^1_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1}\, a^1_{1,j} \qquad \begin{matrix} 2 < i \leq 4 \\ 2 < j \leq 4 \end{matrix}$$

$$y^1_i = y_i - a_{i,1}\, y^1_1$$

ب) نكرر نفس العملية مع السطر الثاني بالقسمة على (a^1_{22}) على اعتبار أن: $(a^1_{22} \neq 0)$ فنحصل على:

$$(2^2):\quad x_2 + a^2_{23}x_3 + a^2_{24}x_4 = y^2_2$$

حيث:

$$a^2_{2,j} = a^1_{2,j} / a^1_{22} \qquad j = 3, 4$$

$$y^2_2 = y^1_2 / a^1_{22}$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من المعادلات (3^1) و (4^1) نجد :

$$(S^2)\begin{cases} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + a^1_{14}x_4 = y^1_1 & (1^1) \\ 0 + x_2 + a^2_{23}x_3 + a^2_{24}x_4 = y^2_2 & (2^2) \\ 0 + 0 + a^2_{33}x_3 + a^2_{34}x_4 = y^2_3 & (3^2) \\ 0 + 0 + a^2_{4,3}x_3 + a^2_{44}x_4 = y^2_4 & (4^2) \end{cases}$$

ج) نعتبر أن $(a^2_{33} \neq 0)$ ونقوم بعملية القسمة كما سبق. المعادلة (3^2) تصبح من الشكل :

$$(3^3) : \quad x_3 + a^3_{34}x_4 = y^3_3$$

حيث

$$a^3_{3,j} = a^2_{3j} / a^2_{33} \qquad j=4$$

$$y^3_3 = y^2_3 / a^2_{33}$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_3 من السطر الرابع فنجد :

$$
(S^3)\begin{cases}
x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + a_{14}^1 x_4 = y_1^1 \\
0 + x_2 + a_{23}^2 x_3 + a_{24}^2 x_4 = y_2^2 \\
0 + 0 + x_3 + a_{34}^3 x_4 = y_3^3 \\
0 + 0 + 0 + a_{44}^3 x_4 = y_4^3
\end{cases}
$$

ح) نقوم بقسمة السطر الرابع على (a_{44}^3)
على اعتبار أن $(a_{44}^3 \neq 0)$ فنحصل على :

$$y_4^4 = y_4^3 / a_{44}^3$$

$$a_{44}^4 = 1$$

أخيرا نحصل على شكل مصفوفي لمصفوفة
مثلثية يسهل حلها بالتراجع : $AX=b$

$$
\begin{bmatrix}
1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\
0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\
0 & 0 & 1 & a_{34}^3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^2 \\ y_3^3 \\ y_4^4 \end{bmatrix}
$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض) :

$$x_4 = y_4^4$$

$$x_3 = y_3^3 - a_{3,4}^3 x_4$$

$$x_2 = y_2^2 - a_{23}^2 x_3 - a_{24}^2 x_4$$

$$x_1 = y_1^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3 - a_{14}^1 x_4$$

مثال :

حل الجملة التالية بإستعمال

طريقة غوص للحذف : $AX=b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الأولى : الحذف $a_{11} = 2 \neq 0$

لتسهيل العملية سوف نحافظ على شكل

المصفوفة A مع إضافة الشعاع b

المصفوفة الموسعة $[A:b]$

أ) نقوم بقسمة السطر الأول على a_{11}.

$$L_1/a_{11} : L_1/2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 1 \\ 6 & 4 & 2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

نحذف x_1 من L_2 و L_3 نجد:

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 6L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -4 & : & 0 \\ 0 & -5 & -22 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ب) $(a_{22}^1 = -2 \neq 0)$ نقوم بقسمة السطر الثاني على (-2) ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من السطر L_3.

نجد:

$$\begin{matrix} L_2/-2 \\ \text{و} \\ L_3 + 5L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -12 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ج) نقوم بقسمة السطر الثالث على (-12) نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/6 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 - 2x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 = \frac{1}{3}$$

حلول الجملة هي:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

1) العدد (a_{ii}^{k}) يسمى محور.

2) إذا كان $(a_{ii}^{k} = 0)$ نقوم بعملية تبديل الأسطر أو الأعمدة لكي نحصل على محور غير معدوم

(2) يمكن الحصول على مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية حسب الانطلاق من الأعلى إلى الأسفل أو العكس ونحصل على نفس النتيجة.

(3) طريقة غوص-جوردان:
نتبع نفس الخطوات السابقة لطريقة غوص وعند الحصول على مصفوفة مثلثية نواصل العملية للحصول على مصفوفة قطرية A (عناصر قطرها تساوي 1)

(4) تستعمل طريقة غوص-جوردان أيضا في إيجاد المصفوفة العكسية للمصفوفة A. بإتباع نفس الخطوات حيث تكون المصفوفة الموسعة من الشكل: $[A : I]$

$$[A : I] \longrightarrow [I , A^{-1}]$$

(سيتم التعرض لها في الأعمال الموجهة)

2) طريقة التفكيك : LU (Lower - Upper)

لحل الجملة : $AX = b$ حيث A مصفوفة قابلة للقلب نقوم بإيجاد مصفوفتين مثلثتين : L : مصفوفة سفلية

U : مصفوفة علوية

حيث $A = L \times U$

نتيجة: يوجد تفكيك وحيد لـ A إذا وفقط إذا كانت كل المحددات الصغرى لـ A غير معدومة.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية الجداء $(L \times U)$ ومساواتها بـ A نجد :

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

تطبيق:

حل الجملة $AX=b$ حيث:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

المرحلة الأولى: التفكيك:

A مصفوفة قابلة للقلب، وكل المحددات الصغرى غير معدومة.

نضع: $A = LU$ أي:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

إذن:

- $l_{11} = 1 \; ; \; l_{21} = 3 \; ; \; l_{31} = 2$
- $(l_{11} u_{12} = 1) \Rightarrow u_{12} = 1$
- $(l_{11} u_{13} + 0 \times u_{23} = 1) \Rightarrow u_{13} = 1$

• $(l_{11} u_{12} = a_{12}) \Rightarrow u_{12} = a_{12} / l_{11}$

• $(l_{11} u_{13} = a_{13}) \Rightarrow u_{13} = a_{13} / l_{11}$

• $(l_{21} \cdot u_{12} + l_{22}) = a_{22} \Rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12}$

• $(l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} = a_{32}) \Rightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}$

ثم :

• $l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23} = a_{23}$

و منه :

$$u_{23} = [a_{23} - l_{21} u_{13}] / l_{22}$$

• $l_{31} u_{13} + l_{31} u_{23} + l_{33} = a_{33}$

و منه :

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$

بعد الحصول على L و U نقوم بحل الجملة على مرحلتين حيث :

$$AX = b : LUX = b$$

نضع : $UX = Z$ ثم نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases}$$

ثم :

• $(l_{21}u_{12}+l_{22}=9) \Rightarrow l_{22}=6$

• $(l_{31}u_{12}+l_{32}=4) \Rightarrow l_{32}=2$

• $(l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=27) \Rightarrow u_{23}=4$

أخيرا

• $(l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=2) \Rightarrow l_{33}=-2$

ومنه نجد :

$$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&6&0\\2&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية :

نضع $UX=Z$ ونقوم بحل

الجملة : $LZ=b$ أي :

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&6&0\\2&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}14\\120\\50\end{Bmatrix}$$

نجد :

$z_1=14$

$z_2=(120-3\times14)/6=13$

$z_3=(50-2\times14-2\times13)/-2=2$

إذن حل الجملة $LZ=b$ هو: $Z=\begin{pmatrix}14\\13\\2\end{pmatrix}$

نقوم الآن بحل الجملة الثانية لإيجاد X

أي: $UX=Z$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\13\\2\end{bmatrix}$$

نجد:

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 13-4x_2 = 13-8=5$$

$$x_1 = 14-5-2=7$$

حلول الجملة $Ax=b$ هي:

$$X=\begin{pmatrix}7\\5\\2\end{pmatrix}$$

3) طريقة شولسكي:

نظرية: إذا كانت A مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة فيمكن تفكيكها على الشكل التالي: $A=L^t.L$ حيث L^t مصفوفة حقيقية مثلثية.

مثال: $A = L^t L$ أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

تطبيق نفس العمل في تفكيك (LU) مع الأخذ بالإعتبار أن:

$l_{i,j} = l_{j,i}$ $\forall i, \forall j$ ومنه:

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $l_{12} = a_{21} / l_{11}$
- $l_{1,3} = a_{31} / l_{11}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{12})^2}$
- $l_{23} = [a_{23} - l_{12} \cdot l_{13}] / l_{22}$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{13})^2 - (l_{23})^2}$

حل الجملة تكون على الشكل:

$$\begin{cases} L^t Z = b \\ L X = Z \end{cases}$$