مقياس: تطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى

أمثلة بسيطة

لطلبة السنة الثانية ليسانس رياضيات

تشتمل على:

الجزء الأول:

عبارة عن وصف لاستخدامات الرياضيات في العصور القديمة وفي مخلف نواحي الحياة التي يحتاجها الإنسان تقدم في شكل وصفي (وفي الغالب دون استعمال صيغ ودساتير رياضية)

الجزء الثاني:

ويشتمل على أمثلة بسيطة ومنتقاة لتطبيقات الرياضيات في مختلف الاختصاصات الأخرى مثل :

الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والبيولوجيا وديناميكية المجتمعات والاعلام الآلي وحتى الرياضيات نفسه

مسؤول المقياس :د. الأمين قـــــــــده

السنة الجامعية 2021/2020

الجزء الأول : (عبارة عن وصف لاستخدامات الرياضيات دون استعمال صيغ ودساتير)

الرياضيات واستخداماتها عبر التاريخ:

مقدمة حول تطور علم الرياضيات وفروعه المختلفة حسب حاجة الإنسان:

ظهرت الرياضيات في البداية كحاجة للقيام بالحسابات في الأعمال التجارية، و لقياس المقادير، كالأطوال و المساحات، و لتوقع الأحداث الفلكية، يمكن اعتبار الحاجات الثلاث هذه البداية للأقسام العريضة الثلاث للرياضيات، و هي دراسة البنية، الفضاء، و المتغيرات. حيث بدأت دراسة البنى مع اكتشاف الأعداد، و كانت بداية بالأعداد الطبيعية ثم الأعداد الصحيحة و العمليات الحسابية عليها، و أدت الدراسات المعمقة على الأعداد إلى ظهور نظرية الأعداد. كما أن البحث عن طرق لحل المعادلات أدى إلى بروز علم الجبر ، كما أن الفكرة الفيزيائية للشعاع كممثل للقوة تم تعميمها إلى الفضاءات الشعاعية المختلفة فيما يطلق عليه تسمية الجبر الخطي.

ظهرت دراسة الفضاء مع الهندسة، وبدأت مع الهندسة الاقليدية و علم المثلثات، في الفضائين ثنائي و ثلاثي الأبعاد، ثم تم تعميم ذلك لاحقا إلى هندسات غير اقليدية، لتلعب دورا في النظرية النسبية العامة.

إن فهم و دراسة التغير في القيم القابلة للقياس هو ظاهرة عامة في العلوم الطبيعية، فظهر التحليل الرياضي كأداة مناسبة للقيام بهذه العمليات، حيث إن الفكرة العامة هي التعبير عن القيمة بتابع، و من ثم يمكن تحليل الكثير من الظواهر على أساس دراسة معدل تغير هذا التابع.

مع ظهور الحواسيب، ظهرت العديد من المفاهيم الرياضية الجديدة، كعلوم قابلية الحساب (فرع من المنطق الرياضي والاعلام الآلي النظري)، تعقيد الحساب، نظرية المعلومات و الخوارزميات. العديد من هذه المفاهيم هي حاليا جزء من علوم الحاسوب.

حقل آخر هام من حقول لرياضيات هو الإحصاء، الذي يستخدم نظرية الاحتمال في وصف و تحليل و توقع سلوك الظواهر في مختلف العلوم، بينما يوفر التحليل الرياضي طرقا فعالة في القيام بالعديد من العمليات الحسابية على الحاسوب، مع اخذ أخطاء التقريب بالاعتبار.

1. الرياضيات في التجارة والاقتصاد:

تطور المبادلات التجارية له ارتباط وثيق بعلم الحساب والأعداد وذلك منذ استحداث النقد المعدني حوالي سنة 700 ق.م بدلا عن نظام المقايضة (استبدال سلعة بأخرى) حيث توجد مشكلتا قياس القيم الحقيقية للسلع والبعد عن تحقيق التكافؤ في القيم المتبادلة.

وبشكل عام يتم توظيف الرياضيات في جميع المعاملات المتعلقة بالبيع والشراء (العمليات الأربعة) وفي حفظ السجلات والمعاملات كمستويات الأسهم ، وساعات عمل الموظفين و رواتبهم وفي حساب الأرباح . كما تساعد شركات التأمين في حساب نسبة المخاطرة وكذا الرسوم اللازمة لتغطية التأمين . ويستخدم المتعاملون مع المصارف والبنوك الرياضيات المالية لمعالجة واستثمار سيولتهم النقدية ...

2. الرياضيات في الزراعة وعلم الفلك:

وتظهر أهمية الرياضيات وفي حساب المثلثات خاصة في قياس المساحات الكبيرة والمسافات الطويلة بطريقة غير مباشرة كقياس ارتفاع جبل أو مئذنة ، البعد بين جبلين ، عرض نهر أو عمق بئر وغيرها حتى قياس طول السنة الشمسية الذي يعرف برصد ارتفاع الشمس. والانقلابان الربيعي والخريفي وحركات القمر وحسابها والنجوم الثابتة والمتحركة وتحديد جهة القبلة ومواقيت الصلاة التي تختلف من بلد لآخر . وقد كان البابليون يستعملون الحسابات في التنبؤ بمواعيد خسوف القمر و كسوف الشمس حيث كانت هذه المواعيد مرتبطة بعباداتهم.

3. الرياضيات في الهندسة والعمران:

تبين المخطوطات والوثائق أن المصريين القدامى قطعوا شوطا كبيرا في علوم الحساب و الأعداد والجبر حيث عرفوا النظام العشري لكتابة الأعداد وكذلك العمليات الأربعة والجذور التربيعية والتكعيبية واستخدموها كما عرفوا حساب المساحات والحجوم والكسور التي استخدموها في توزيع المحاصيل الزراعية وفي التجارة. أما علم الهندسة فقد كان له طابع عملي يتمثل في حساب قياسات الأشكال التي تصادفهم كمساحات الأراضي وحجوم المباني وقياسات زوايا ميلها مثل الأهرامات والمعابد . وقد توصلوا الى حساب مساحات المستطيل والمثلث وشبه المنحرف كما تمكنوا من إيجاد قيمة تقريبية لمساحة الدائرة ق.ق.3.16 و عرفوا أيضا قياس حجم الهرم والاسطوانة.

قول ابن خلدون في وصفه الهندسة

”واعلم أن الهندسة تفيد صاحبها إضاءة في عقله واستقامة في فكره، لأن براهينها كلها بينة الانتظام جلية الترتيب، لا يكاد الغلط يدخل أقيستها لترتيبها وانتظامها، فيبعد الفكر بممارستها عن الخطأ وينشأ لصاحبها عقل على ذلك المهيع. وقد زعموا أنه كان مكتوباً على باب أفلاطون: “من لم يكن مهندساً، فلا يدخلن منزلنا”. وكان شيوخنا رحمهم الله يقولون: “ممارسة علم الهندسة للفكر، بمثابة الصابون للثوب الذي يغسل منه الأقذار وينقيه من الأوضار والأدران”

4. الرياضيات والعلوم الفيزيائية:

الفيزياء علم يبحث في الظواهر المختلفة (المادة- الطاقة وتحولاتها – الحركة) ويحاول تفسيرها من خلال الرياضيات وما تقدمه من أدوات (معادلات حساب تكامل وتفاضل ..) . تعبر الرياضيات عن الظواهر الفيزيائية بدساتير وقواعد رياضية يتدخل فيها متغيرات وتوابع مختلفة يتم دراستها باستخدام التحليل الرياضي لكن الرياضيات لا تكتشف الظواهر ولكن تتنبأ بها. فاللغة الرياضية توفر للقوانين الفيزيائية مزيدا من الدقة مثل سرعة الرياح شدة الزلازل قياس الضغط الجوي...

وفي التاريخ بداية من منتصف القرن الثامن عشر شهدت أوربا ثورة صناعية شملت ميادين كثيرة حيث ظهر المنهج التجريبي في الفيزياء وتم معالجة العديد من المسائل المتعلقة بالزمن وهي عبارة عن معادلات تفاضلية عادية أو بمشتقات جزئية .

5. المنهج التجريدي للرياضيات عند الاغريق

يعد علماء الإغريق أول من اكتشف الرياضيات البحتة بمعزل عن المسائل العملية . فقد قام الإغريق بعدما نقلوا الرياضيات الفرعونية استطاع تاليس (طاليس) في القرن السابع ق.م. أن يجعل الرياضيات نظريات بحتة حيث بين أن قطر الدائرة يقسمها لنصفين متساويين في المساحة والمثلث المتساوي الضلعين به زاويتين متساويتين. وتوصل بعده فيثاغورث إلى أن في المثلث مربع ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر. وفي الإسكندرية ظهر إقليدس بالقرن الثالث ق.م. و وضع أسس الهندسة التي عرفت بالإقليدية والتي مازالت نظرياتها تتبع اليوم. ثم ظهر أرخميدس (287 ق.م. – 212ق.م.) باليونان حيث عين الكثافة النوعية.

أدخل الإغريق الاستنتاج المنطقي والبرهان، وأحرزوا بذلك تقدمًا مهمًا من أجل الوصول إلى بناء نظرية رياضية منظمة. وتقليديًا يعد الفيلسوف طاليس أول من استخدم الاستنتاج في البرهان، وانصبَّ جل اهتمامه على الهندسة حوالي 600 ق.م. اكتشف الفيلسوف الإغريقي فيثاغورس، الذي عاش حوالي 550 ق.م.، طبيعة الأعداد، واعتقد أن كل شيء يمكن فهمه بلغة الأعداد الكلية أو نسبها. بيد أنه في حوالي العام 400 ق.م. اكتشف الإغريق الأعداد غير القياسية (وهي الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها كنسبة لعددين كليين)، وأدركوا أن أفكار فيثاغورس لم تكن متكاملة. وفي حوالي 370 ق.م. صاغ الفلكي الإغريقي يودوكسوس نظرية بالأعداد غير القياسية وطوّر طريقة الاستنفاد، وهي طريقة لتحديد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات، مهدت لحساب التكامل. وفي حوالي 300 ق.م قام إقليدس ـ أحد أبرز علماء الرياضيات الإغريق ـ بتأليف كتاب العناصر، إذ أقام نظامًا للهندسة مبنيًا على التعاريف التجريدية والاستنتاج الرياضي. وخلال القرن الثالث قبل الميلاد عمَّم عالم الرياضيات الإغريقي أرخميدس طريقة الاستنفاد، مستخدمًا مضلعًا من 96 ضلعًا لتعريف الدائرة، حيث أوجد قيمة عالية الدقة للنسبة التقريبية باي (وهي النسبة بين محيط الدائرة وقطرها). وفي حوالي العام 150 ق.م. استخدم الفلكي الإغريقي بطليموس الهندسة وحساب المثلثات في الفلك لدراسة حركة الكواكب، وتمّ هذا في أعماله المكونة من 13 جزءًا.

(أي أن الرياضيات عند الاغريق ساهمت في تطوير نفسها).

مثال عن تطبيقات الرياضيات عند المسلمين

علم الفرائض : هو علم يعرف به من يرث ومن لا يرث و نصيب كل وارث. وفيه يتم تطبيق العمليات على الكسور في تقسيم تركة الميت على ورثته المحددين شرعا وفق نسب دقيقة ذكرها الله عز وجل في محكم تنزيله ولجميع الحالات .

مثال: مات زوج وترك زوجة وابنين وأخا شقيقا وخلف تركة قدرها 60.000 **د.ج** ، جهز ب1.000 **د.ج** ، وكان عليه دين قدره : 11.000 د.ج . أنجز الفريضة مبينا نصيب كل وارث بالدينار الجزائري بعد تصفية التركة.

تصفية التركة : 60.000 د.ج
1- التجهيز 1.000 د.ج الباقي = 59.000 د.ج
2- الدين 11.000 د.ج الباقي 48.000 د.ج
3- حقوق الورثة 48.000 د.ج
قيمة السهم: 3.000 د.ج

الورثة	نصيبهم	سهمهم من أصل الفريضة 8	التصحيح $8 \times 2 = 16$	نصيبهم بالدينار الجزائري
الزوجة	1/8	1	$1\times 2 = 2$	$2\times 3.000= 6.000$
ابنين	التعصيب	7	$7\times 2= 14$	$14\times 3.000= 42.000$
أخ شقيق	الحجب	لا شيء		

كما أن زكاة الأموال وغيرها ومعرفة النصاب وتحديد جهة القبلة والأهلة وبخاصة هلال رمضان كلها تحتاج إلى حسابات خاصة وطرق متناهية في الدقة ولا يتأتى ذلك إلا بالرياضيات وقد فاق المسلمون أقرانهم من الهنود واليونان في معرفة كل ما يتعلق بالشهور ومطالع الأهلة.

الجزء الثاني (ويشمل أمثلة بسيطة لتطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى)

A. تطبيقات الرياضيات في مسائل فيزيائية بسيطة : (مسائل في الميكانيكا الكلاسيكية)

حسب المبدأ الأساسي في التحريك (قانون نيوتن الثاني) فإن : $\sum \overrightarrow{F_i} = m.\vec{a}$ حيث $\overrightarrow{F_i}$ هي مجموعة القوى المؤثرة على المتحرك M

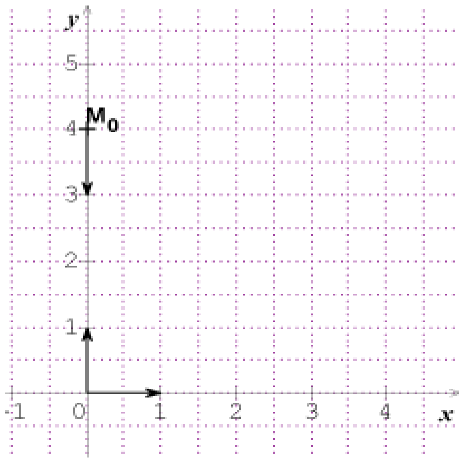
في المستوي ، m هي كتلة المتحرك و $\vec{a}$ شعاع تسارع حركته.

إذا أعطيت$(x(t); y(t))$ احداثيات المتحرك M بدلالة الزمن t فيكون لدينا :

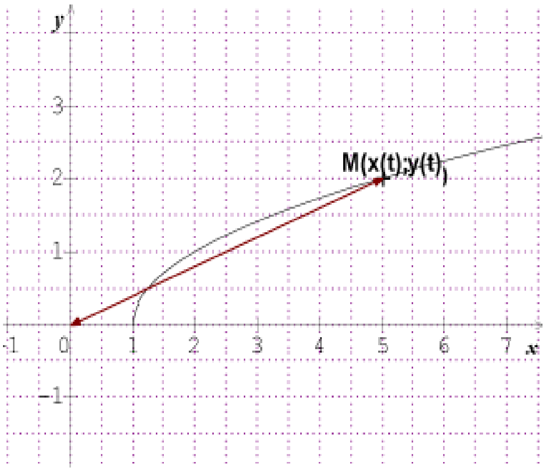
شعاع الموضع (أو الانتقال) : $\vec{P}(t) = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$

شعاع التسارع : $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath}$

شعاع التسارع: $\vec{a}(t) = x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath}$



(الشكل 2)



(الشكل 1)

المسألة الأولى : جسم M في سقوط حر (بدون مقاومة هواء) ينطلق من نقطة M_0 . ماهي سرعته عند ارتطامه بالأرض؟

القوة الوحيدة التي تؤثر على المتحرك M هي ثقله $\overrightarrow{W}$ الناجم عن الجاذبية الأرضية (الشكل 2).

$$\overrightarrow{W} = -mg\vec{\jmath} = m(x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath})$$

و منه : $x''(t) = 0$ و $y''(t) = -g$ نلاحظ أن الحركة لا تتعلق بالكتلة m للجسم . بحل جملة المعادلتين التفاضليتين

نجد: $x(t) = at + b$ و$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$ حيث a, b, c, d ثوابت حقيقية تتعلق بالشروط الابتدائية للمسألة.

بفرض أن السرعة الابتدائية للمتحرك هي: $\vec{v}(0) = -v_0\vec{\jmath}$ والوضعية الابتدائية للمتحرك هي النقطة $M_0(0; h)$ ومنه:

$x(0) = b = 0$ ، $y(0) = d = h$ ، $x'(0) = a = 0$ و $y'(0) = c = -v_0$

بالتالي تصبح حركة الجسم معرفة بالجملة التالية:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 - v_0 t + h \end{cases}$$

لنستعمل ذلك لحساب سرعة المتحرك عندما يرتطم بالأرض . نجد الزمن t اللازم لذلك

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2-v_0t+h=0$$

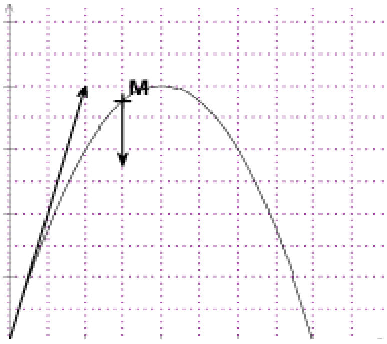
$$\Delta=v_0{}^2+2gh>0,\quad t_1=\frac{-v_0-\sqrt{v_0{}^2+2gh}}{g}<0\,,\quad t_2=\frac{-v_0+\sqrt{v_0{}^2+2gh}}{g}>0$$

ومنه $t=t_2$ لأن $t>0$ اذن سرعة الجسم حينها تكون

$$V=|-gt_2-v_0|=\left|v_0-\sqrt{v_0{}^2+2gh}-v_0\right|=\sqrt{v_0{}^2+2gh}$$

ونلاحظ أن V هي تابع (دالة) لـ h.

المسألة الثانية : حركة قذيفة (بدون مقاومة هواء).



نرمي قذيفة في الهواء بسرعة ابتدائية شعاعها : $\vec{v}(0)=v_0(cos\theta\vec{\imath}+sin\theta\vec{\jmath})$ حيث θ هي زاوية الرمي .

كما في الحالة السابقة القوة الوحيدة المؤثرة الجسم المتحرك هي ثقله :

$$\vec{W}=-mg\vec{\jmath}=m(x''(t)\vec{\imath}+y''(t)\vec{\jmath})$$

ومنه وبعد اختصار m وبالمطابقة نجد : $x''(t)=0$ و $y''(t)=-g$ وبحل الجملة نجد :

$x(t)=at+b$ و $y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+ct+d$.

لدينا : $x(0)=b=0$ ، $y(0)=d=0$ ، $x'(0)=a=v_0cos\theta$ و $y'(0)=c=v_0sin\theta$

وبالتالي تكون حركة الجسم معرفة وسيطيا بـ:

$$\begin{cases} x(t)=v_0cos\theta\ t \\ y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0sin\theta\ t \end{cases}$$

المسافة الأفقية المقطوعة من طرف القذيفة إلى غاية سقوطها على الأرض مرة أخرى تسمى المدى ويكون ذلك بعد زمن $t\neq 0$

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0sin\theta\ t=0\Leftrightarrow(t=0)\vee\left(t=\frac{2v_0sin\theta}{g}\right)$$

ومنه المدى هو

$$d=x\left(\frac{2v_0sin\theta}{g}\right)=v_0cos\theta\left(\frac{2v_0sin\theta}{g}\right)=\frac{v_0{}^2}{g}sin2\theta$$

ويبلغ المدى قيمته العظمى من أجل $\theta=\frac{\pi}{4}$ حيث $d=\frac{v_0{}^2}{g}$ ويأخذ أصغر وهي 0 من أجل $\theta=\frac{\pi}{2}$.

لإيجاد معادلة مسار القذيفة الديكارتية نكتب y بدلالة x

لدينا من المعادلة الأولى نجد $t=\frac{x}{v_0cos\theta}$ نعوض في الثانية فنجد :

$$y(t)=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0cos\theta}\right)^2+v_0sin\theta\ \frac{x}{v_0cos\theta}=-\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0cos\theta)^2}x^2+tg\theta.x$$

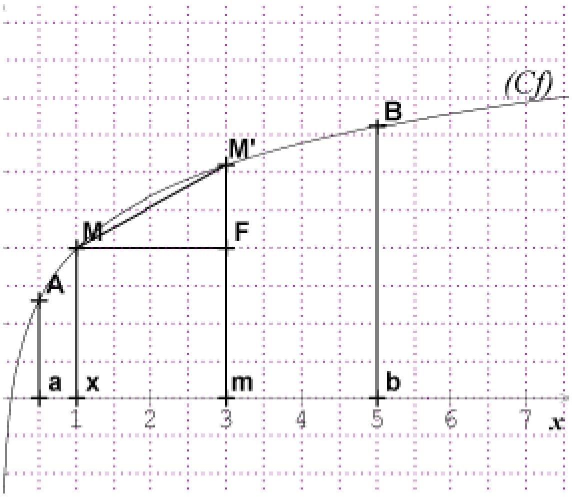
ومنه مسار القذيفة هو قطع مكافئ.

وبصفة عامة : يكون مسار القذيفة قطعا مخروطيا

1. قطعا ناقصا اذا كانت v_0 كبيرة بقدر كاف ليصل الجسم المتحرك لنقطة تنعدم فيها الجاذبية الأرضية.
2. قطعا مكافئا اذا كانت v_0 صغيرة بحيث يبقى الجسم المتحرك في مجال الجاذبية.
3. قطعا زائدا اذا كانت v_0 كبيرة جدا بحيث يخرج الجسم من مجال الجاذبية الأرضية.

طول قوس من منحني:

-1 لتكن $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال $[a;b]$ أي $f\in C^1([a;b])$ وليكن (C_f) يرمز لتمثيلها البياني بالنسبة لمعلم متعامد ومتجانس. M نقطة فاصلتها x من (C_f). وليكن طول القوس $\widehat{AM}=S(x)$



نلاحظ أن S هو دالة للمتغير x وأن كل تغير Δx في هذا الأخير يقابله تغير ΔS لــ S حيث طول القوس $\Delta S=\widehat{MM'}$.

في الشكل المقابل وحسب نظرية فيثاغورس في المثلث القائم MFM' فإن

$$\mathrm{MM}'^2 = MF^2 + FM'^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

حيث $\Delta x = m - x;\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ومنه :

$$\left(\frac{MM'}{\Delta S}\right)^2\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

عندما $\Delta x\to 0$ فإن $M\to M'$ و $\Delta S\to MM'$ و $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{dy}{dx}=y'(x)=f'(x)$ و $\frac{\Delta S}{\Delta x}\to S'=\frac{ds}{dx}$.

ومنه $\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ اذا

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$

وبحساب تكامل الطرفين من a إلى b نجد طول قوس المنحنى $\widehat{AB}$ هو

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

2- إذا كان المنحني معرفا وسيطيا أي أن (C) هو مجموعة نقط المستوي $M(x(t); y(t))$ حيث $t \in [\alpha; \beta]$.

من العلاقة (1) السابقة نجد $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ حيث $dx = x'(t)dt$ و $dy = y'(t)dt$ إذا

$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$ و منه طول القوس الذي طرفاه $M(x(\alpha); y(\alpha))$ و $M'(x(\beta); y(\beta))$ هو

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

3- طول قوس منحني معرفا بإحداثيات قطبية

ليكن $r = r(\theta)$ معادلة المحني (C) حيث $(r; \theta)$ هي الإحداثيات القطبية للنقطة $M(x; y)$ من المستوي أي أن

$x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$. ومنه يمكن التعبير عن (C) وسيطيا بالشكل $x = f(\theta)cos\theta$ و $y = f(\theta)sin\theta$.

لدينا $\frac{dx}{d\theta} = r'(\theta)cos\theta - r(\theta)sin\theta$ و $\frac{dy}{d\theta} = r'(\theta)sin\theta + r(\theta)cos\theta$ ومنه

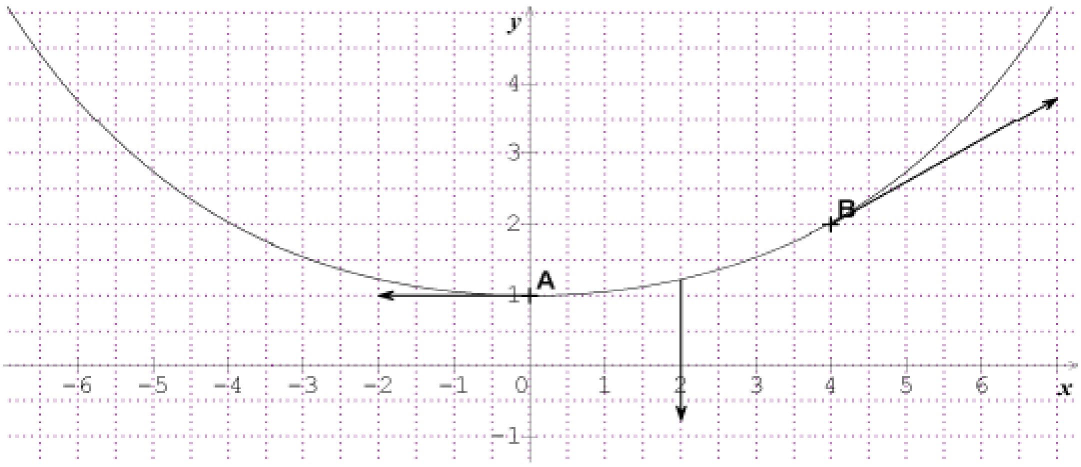
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (r')^2 + (r)^2$$

ومنه طول القوس الذي طرفاه $M(r(\theta_1); \theta_1)$ و $M(r(\theta_2); \theta_2)$ هو

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r')^2 + (r)^2}d\theta$$

تطبيق : باستخدام طول الدائرة ذات نصف القطر R باستخدام الثلاث طرق المذكورة .

المسألة الثالثة: المطلوب هو إيجاد المعادلة الديكارتية $y = f(x)$ للشكل الذي يأخذه حبل مثبت الطرفين و غير ممتط . نعتبر الجزء منه المحصور بين الفاصلتين 0 و x القوس $\widehat{AB}$ في الشكل المقابل



القوى المؤثرة على هذا الجزء من الحبل هي:

توتر الحبل في $A(0;1)$ أدنى نقطة منه $\overrightarrow{H_0} = -H_0\vec{i}$

توتر الحبل في النقطة $B(x;f(x))$ $\vec{T} = T(cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}$ حيث θ هي الزاوية $(\vec{i};\vec{v})$ و $\vec{v}$ هو شعاع توجيه للمماس في B.

ثقل هذا الجزء من الحبل $\vec{W} = -mg\,\vec{j} = -\mu lg\vec{j}$ حيث μ هي الكثافة الخطية للحبل و l هو طول القوس $\widehat{AB}$.

بما أن جزء الحبل $\widehat{AB}$ في حالة سكون فإن $\overrightarrow{H_0} + \vec{T} + \vec{W} = \vec{0}$ أي أن $(Tcos\theta - H_0)\vec{i} + (Tsin\theta - \mu lg)\vec{j} = \vec{0}$ ومنه

$$Tsin\theta = \mu lg \quad \text{و} \quad Tcos\theta = H_0$$

بالقسمة نجد: $tg\theta = \frac{\mu g}{H_0}.l$: ومن جهة أخرى نعلم أن $tg\theta$ هو معامل توجيه المماس للمنحني في B اذا : $tg\theta = y' = f'(x)$ ومنه

نستنتج أن $y' = \frac{\mu g}{H_0}.l$ أي أن $y'' = \frac{\mu g}{H_0}.l'$.

وبما أن طول القوس $\widehat{AB}$ هو : $l(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$ فإن $l'(x) = \sqrt{1+y'^2}$ بالتعويض نجد المعادلة التفاضلية

$$y'' = \frac{\mu g}{H_0}.\sqrt{1+y'^2}$$

بوضع $\frac{\mu g}{H_0} = k$ و باستعمال المجهول المساعد $y' = u$ تأخذ المعادلة السابقة الشكل : $u' = k\sqrt{1+u^2}$ ومنه $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = k.dx$

وبحساب تكامل الطرفين نجد: $ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = kx + c$: حيث c ثابت حقيقي. اذا

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^{kx+c} = C.e^{kx} \Leftrightarrow \sqrt{1+u^2} = C.e^{kx} - u, C = e^c > 0$$

بعد تربيع الطرفين والاختصار نجد: $C^2.e^{2kx} - 2Cue^{kx} - 1 = 0$ ومنه

$$u(x) = \frac{C^2.e^{2kx} - 1}{2Ce^{kx}} = \frac{C^2.e^{kx} - e^{-kx}}{2C} = y'(x)$$

لدينا المماس عند $A(0;1)$ مواز لمحور الفواصل أي أن $u(0) = y'(0) = 0$ ومنه: $\frac{C^2-1}{2C} = 0$ اذا $C = 1$ اذا.

$y'^{(x)} = \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2} = sh(kx)$ ومنه $y(x) = \frac{ch(kx)}{k} = \frac{H_0}{\mu g}ch\left(\frac{\mu g}{H_0}x\right)$.

.B تطبيق الرياضيات في الكيمياء:

1) PH محلول يعطى بالعلاقة $\mathrm{PH} = -\log([\mathrm{H}+])$ حيث log تمثل دالة اللوغاريتم العشري و $[\mathrm{H}+]$ هو تركيز شاردة الهيدروجين في المحلول مقدرة بـ $\mathrm{mole/litre}$. والغرض من حسابه هو التعرف على طبيعة المحلول.

$PH < 7$ ← محلول حمضي ، $\mathrm{PH} > 7$ ← محلول قاعدي ، $\mathrm{PH} = 7$ ← محلول متعادل.

2) مدة حياة عنصر أو ظاهرة:

مقدمة: الهدف هو التنبؤ بمدة حياة عنصر أو ظاهرة وذلك بدراسة احتمال أن يكون هذا العنصر لم يعد نشطا أو أن الظاهرة قد توقفت. هذه المدة لا تتعلق بالوقت الذي انقضى فعلا فهي منمذجة بقانون مدة حياة بدون ذاكرة معناها أن :

احتمال أن تستغرق الظاهرة أو مدة حياة العنصر $s+t$ (وحدة زمن) على الأقل علما أنها استغرقت بالفعل t (وحدة زمن) هو نفسه احتمال أن تستغرق s (وحدة زمن) انطلاقا من بداية ظهورها .نعبر عن ذلك اختصارا بـ:

$$P_{X\geq t}(X \geq s+t) = P(X \geq s)$$

حيث : X متغير عشوائي = مدة حياة عنصر أو ظاهرة. مثلا هذا القانون يسمح بنمذجة مدة حياة عنصر مشع أو المدة الزمنية الفاصلة بين مكالمتين هاتفيتين في مكتب استقبال .

تعريف: نقول أن متغيرا عشوائيا X يتبع قانونا أسيا وسيطه $\mu > 0$ اذا كانت كثافة احتماله هي الدالة

$$\varphi: [0; +\infty[\to \mathbb{R};\ \varphi(x) = \mu e^{-\mu x}$$

خاصية : قانون مدة حياة بدون ذاكرة يتبع قانونا أسيا.

الاثبات: ليكن X قانون مدة حياة بدون ذاكرة s, t عددان موجبان. لدينا حسب تعريف الاحتمال الشرطي والخاصية المميزة ل قانون مدة حياة بدون ذاكرة

$$P_{X\geq t}(X \geq s+t) = \frac{P\big((X \geq s+t) \cap (X \geq t)\big)}{P(X \geq t)}$$
$$= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s)$$

ومنه : $P(X \geq s+t) = P(X \geq s).P(X \geq t)$. لتكن الدالة F حيث $F(x) = P(X \geq x);\ \ x \geq 0$

وجدنا أنها تحقق: $F(s+t) = F(s).F(t)$ وهي الخاصية المميزة للدالة الأسية*اذا*: $F(t) = e^{\alpha t}$ حيث $\alpha < 0$ لأن $F(t) \leq 1$

نضع : $\mu > 0$;$\alpha = -\mu$. من جهة أخرى $F(x) = e^{-\mu x} = 1 - P(X < x) = 1 - \int_0^x f(t)dt$ (حسب خاصية الحادثة العكسية) ومنه $\int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\mu x}$ وباشتقاق الطرفين نجد *:* $\mathrm{f}(x) = \mu e^{-\mu x}$ ومنه X يتبع قانونا أسيا.

تطبيق: 1- ما هو احتمال أن تكون مدة حياة العنصر t *أسبوعا* . 2- *أحسب قيمة الوسيط* μ اذ علمت أن $P(X < 200) = 0.5$.

3- ما هو احتمال أن تكون مدة حياة هذا العنصر تفوق أو تساوي 300أسبوع.

4- ماهي مدة الحياة المتوسطة لهذا العنصر.

C. بعض تطبيقات الرياضيات في الاقتصاد

بعض المفاهيم والمصطلحات :

دوال التكلفة :

1. التكلفة المتغيرة C_v : هي مجموع التكاليف التي تتغير بما يتناسب هع نشاط الأعمال التجارية عند انتاج السلع والخدمات مثل تكاليف الطاقة المستخدمة في الانتاج – النقل – المواد الخام – العمالة ....
2. التكلفة الثابتة F : وهي مجموع التكاليف المستقلة عن الكمية المنتجة وتشمل المدخلات التي لا تتغير على المدى القصير مثل : المباني و الآلات وتكاليف التأمين ...
3. التكلفة الاجمالية (الكلية) C_t: وهي دالة متزايدة لكمية الانتاج q وهي تساوي مجموع التكاليف الثابتة والمتغيرة أي
$$C_t(q) = C_v(q) + F$$
4. التكلفة الهامشية (الحدية) C_{mar} وهي تمثل مقدار التغير في التكلفة الكلية بإنتاج وحدة إضافية أي : $C_{mar}(q) \cong C_t(q) - C_t(q-1)$ ونظريا فهي تمثل مشتق دالة التكلفة الاجمالية أي
$$C_{mar}(q) = \frac{d}{dq}C_t(q)$$
5. التكلفة المتوسطة C_{moy}: وهي متوسط تكلفة إنتاج وحدة أي $C_{moy}(q) = \frac{C_{moy}(q)}{q}$

دوال الدخل والفائدة:

1. الدخل الاجمالي R : اذا كان A هو ثمن بيع الوحدة الواحدة فإن الدخل الاجمالي هو
$$R(q) = Aq$$
.
2. الفائدة(الربح) B هي الدالة التي تعطينا ما يجنيه المنتج من أرباح عندما يبيع q وحدة إنتاج
$$B(q) = R(q) - C_t(q)$$

تطبيق 1: تنتج مؤسسة q (ألف وحدة) من سلعة ما حيث : $0 \le q \le 15$.الكلفة الهامشية بالدينار لهذا المنتوج هي :

$$C_{mar}(q) = 3q^2 - 36q + 750$$

1. فأحسب التكلفة الاجمالية إذا علمت أن التكاليف الثابتة هي في حدود 200 دينار.
2. أحسب التكلفة المتوسطة .
3. عين كمية الانتاج q حتى تكون التكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن.
4. ماهي كمية الانتاج q التي من أجلها تتساوى التكلفة الهامشية والمتوسطة.

الحل:

1) بما أن $C_{mar}(q) = \frac{d}{dq}C_t(q)$ فإن $C_{mar}(x)dx = dC_t(x)$ بحساب تكامل الطرفين من 0 إلى q نجد

$$C_t(q) - C_t(0) = \int_0^q (3x^2 - 36x + 750)dx = [x^3 - 18x^2 + 750x]_0^q = q^3 - 18q^2 + 750q$$

وبما أن $C_t(0) = F = 200$ إذا

$$C_t(q) = q^3 - 18q^2 + 750q + 200$$

(2

$$C_{moy}(q) = \frac{C_{moy}(q)}{q} = q^2 - 18q + 750 + \frac{200}{q}$$

3) لدينا

من جهة لدينا $C'_{moy}(q) = 2q - 18 - \frac{200}{q^2} = \frac{2(q^3-9q^2-100)}{q^2}$ و نلاحظ أن $C'_{moy}(10) = 0$ ومنه يمكن تحليل مشتق التكلفة المتوسطة كما يلي : $C'_{moy}(q) = \frac{2(q-10)(q^2+q+10)}{q^2}$ وعليه يمكن ملاحظة أن دالة التكلفة المتوسطة متناقصة على المجال $[0; 10[$ ومتزايدة تماما على المجال $]10; 15]$ ومنه تكون التكلفة الهامشية أصغر ما يمكن من أجل $q = 10$ وعندها تكون $C_{moy}(10) = 690$.

4) بحل المعادلة $C_{mar}(q) = C_{moy}(q)$ نجد $q = 10$.

تطبيق 2)

1) مصفوفة طلبيات

نفرض مثلا أن 03 زبائن يمكنهم شراء 04 منتجات . لتكن المصفوفة من الرتبة 4×3 التالية

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

الأسطر تمثل الزبائن الثلاثة والأعمدة تمثل المنتجات الأربعة المقتناة من طرفهم مثلا نقرأ :

الزبون الأول اقتنى 5 وحدات من المنتج الأول ووحدتين من الثاني و 4 وحدات من المنتج الثالث ووحدة واحدة من المنتج الرابع...وهكذا.

من أجل مضاعفة الطلبية يكفي ضرب المصفوفة A بعدد المرات $2A$, $3A$, كذلك يمكن جمع طلبيتين $A_1 + A_2$.

2) مصفوفة الأسعار

نهتم بسعر الوحدة لكل من المنتجات الأربعة المذكورة والتي يمكن تجميعها في مصفوفة جديدة أسطرها تمثل هذه المنتجات العمود الأول يمثل سعر الوحدة لكل منها والعمود الثاني نفقات نقل الوحدة

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0.2 \\ 2 & 0.1 \\ 4 & 0.3 \\ 5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

P هي مصفوفة الأسعار.

ومنه تكون الفاتورة الاجمالية التي يسددها الزبائن الثلاثة ممثلة في المصفوفة حاصل ضرب المصفوفتين A و P بهذا الترتيب

$$F = A.P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0.2 \\ 2 & 0.1 \\ 4 & 0.3 \\ 5 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 2.5 \\ 35 & 1.5 \\ 30 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه المجموع الذي يسدده كل زبون يعطى في المصفوفة العمود التالية

$$. F . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.5 \\ 36.5 \\ 32 \end{pmatrix}$$

D. مسائل البرمجة الخطية (أمثلة بسيطة)

وهي مسائل تتطلب إيجاد أكبر وأصغر قيمة لدالة هدف (وهي دالة خطية بمتغيرين أو أكثر) ضمن شروط خطية .

وفي الواقع تتمثل عملية البرمجة في إيجاد التوزيع الأمثل للموارد المحدودة (عمالة-مواد-مكائن-أموال – وقت-...) لتحقيق أهداف معينة (تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح).

يستوجب استخدام البرمجة الخطية توفر الشروط الاتية:

1. تحديد دالة الهدف : اي تحديد هدف المشكلة قيد الدراسة بصورة واضحة ودقيقة.

أما الهدف فانه قد يكون:

- تعظيم ارباح وعندها تكون دالة الهدف من نوع التعظيم (Max. Z).
- أو تخفيض تكاليف (تقليل خسائر) وعندها تكون دالة الهدف من نوع التقليل (Min. Z).

2. محدودية الموارد البشرية والمادية الخاضعة للبرمجة الخطية والتي تستلزم بالضرورة تحقيق الاستخدام الامثل للموارد المتاحة.
3. توافر استخدامات متنافسة للموارد المادية والبشرية ذات العلاقة.
4. وجود قيود تحد من حرية استخدام الموارد والإمكانات المتاحة لدى المنظمة ، كساعات العمل ، او كميات المواد الاولية ، او ساعات تشغيل المكائن او طاقاتها الانتاجية.
5. امكانية التعبير عن المتغيرات موضوعة البرمجة بصورة رقمية .مثلا يشار للطاقة الانتاجية بعدد ساعات العمل المتاحة للمكائن والعاملين اسبوعيا، وهكذا.
6. يجب ان تكون العلاقة بين جميع العوامل والمتغيرات علاقة خطية ويمكن التعبير عنها كميا.
7. تفترض البرمجة الخطية ثبات اسعار المستلزمات والمنتجات بمعنى عدم تأثرها بأية سياسة قد تتخذها المنظمة لزيادة او خفض انتاجها .اي ان الاسعار يقرها السوق وهو خارج نطاق سيطرة المنظمة وتأثيرها.
8. ينبغي توافر الدقة المتناهية والثقة المطلقة بالمعلومات والبيانات التي يتم اعتمادها لغرض تحقيق الهدف الذي تسعى الادارة لتحقيقه.

مثال: تنتج شركة 03 منتجات B, A و C . قدرت الشركة بأن ربح كل وحدة منها هي 150. 120 و 90(دينار) على الترتيب وتمر المنتجات بثلاث مراحل التصنيع والتركيب واختبار الجودة والجدول التالي يبين عدد الساعات اللازمة لكل لإنتاج وحدة من كل منتج والمدة المتاحة لكل مرحلة.

المنتج	مرحلة التصنيع	مرحلة التركيب	مرحلة اختبار الجودة
A	2	3	1
B	3	2	0.75
C	4	2	0.75
المدة المتاحة	450	370	200

وضع المسألة في الصورة العامة للبرمجة الخطية يعني إيجاد دالة الهدف وهي هنا الربح ثم تحديد القيود أي الشروط.

المتغيرات هي : x_3, x_2, x_1 وتمثل الكميات المنتجة من B, A و C على الترتيب.

دالة الهدف : $z = 150x_1 + 120x_2 + 90x_3$ الفائدة التي تجنيها الشركة من بيع الكميات المذكورة من المنتجات الثلاثة (وهي كما نرى دالة خطية للمتغيرات).

القيود أو الشروط :

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 450$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 370$$

$$x_1 + 0.75x_2 + 0.75x_3 \leq 200$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

فمثلا الشرط الأول يعني أن مجموع الساعات المخصص لتصنيع x_1 وحدة من A و x_2 وحدة من B و x_3 وحدة من C لا يتعدى 450 ساعة

الشرط الأخير يسمى شرط عدم السالبية.

والمطلوب هنا هو البحث عن قيم x_3, x_2, x_1 لكي نحصل تعظيم الربح ضمن هذه الشروط أي $\max z$

مثال بسيط عن حل مسألة برمجة خطية بمتغيرين:

في ورشة يتم صنع طاولات ومكاتب كل طاولة تتطلب 2.5 ساعة للتركيب و 3 ساعات للتلميع و 1 ساعة للتغليف والتعبئة بينما يتطلب صنع مكتب :1ساعة للتركيب , 3ساعات للتلميع وساعتان للتغليف والتعبئة.

الورشة لا يمكنها رصد أكثر من 10 ساعات للتركيب , 15 ساعة للتلميع و 8 ساعات للتغليف والتعبئة. علما أنها تجني ربحا قدره 30(و.ن) على كل طاولة و 40(و.ن) على كل مكتب. ما هو عدد الطاولات والمكاتب التي يجب انتاجها للحصول على أكبر ربح؟

وضع المسألة في الصورة العامة للبرمجة الخطية

يمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالي:

المنتج	التركيب	التلميع	التغليف والتعبئة
طاولة	2.5	3	1
مكتب	1	3	2
المدة المتاحة	10	15	8

المتغيران

x= عدد الطاولات المنتجة أسبوعيا y= عدد المكاتب المنتجة أسبوعيا.

دالة الهدف: (الفائدة الأسبوعية) $z = 30x + 40y$.

القيود (الشروط):

$$\begin{cases} 2.5x + y \leq 10 \\ 3x + 3y \leq 15 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

الطريقة البيانية :

خاصية: بصفة عامة المستقيم (Δ) ذو المعادلة الديكارتية $ax + by + c = 0$ يقسم المستوي إلى نصفي مستوي (π_1) و (π_2) بحيث يكون لدينا: للمقدار $ax + by + c$ إشارة ثابتة عندما تتغير النقطة $M(x;y)$ في كل منهما

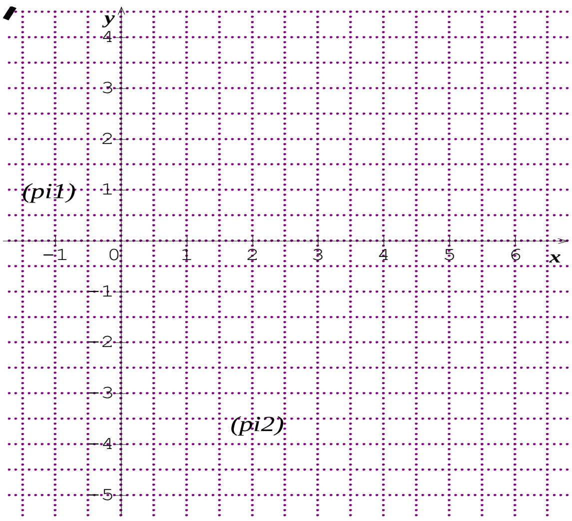
إما

$$\forall M(x,y) \in (\pi_1); ax + by + c < 0 \text{ و } \forall M(x,y) \in (\pi_2); \quad ax + by + c > 0$$

أو

$$\forall M(x,y) \in (\pi_1); ax + by + c > 0 \text{ و } \forall M(x,y) \in (\pi_2); \quad ax + by + c < 0$$

ومنه الحل البياني للمتراجحة $ax + by + c < 0$ هو أحد نصفي مستوي (π_1) أو (π_2) ولمعرفة أي منهما نأخذ نقطة $M(x_0, y_0)$ من (π_1) مثلا ونحدد لإشارة $ax_0 + by_0 + c$ فإذا كانت سالبة فالحل البياني هو (π_1) وفي حالة العكس فإن الحل هو (π_2) .



نرسم المستقيمات التي معادلاتهما تنتج باستبدال رمز المتباينة في القيود بالمساواة أي : المستقيمات

$$(D): 2.5x + y - 10 = 0$$

$$(H): 3x + 3y - 15 = 0$$

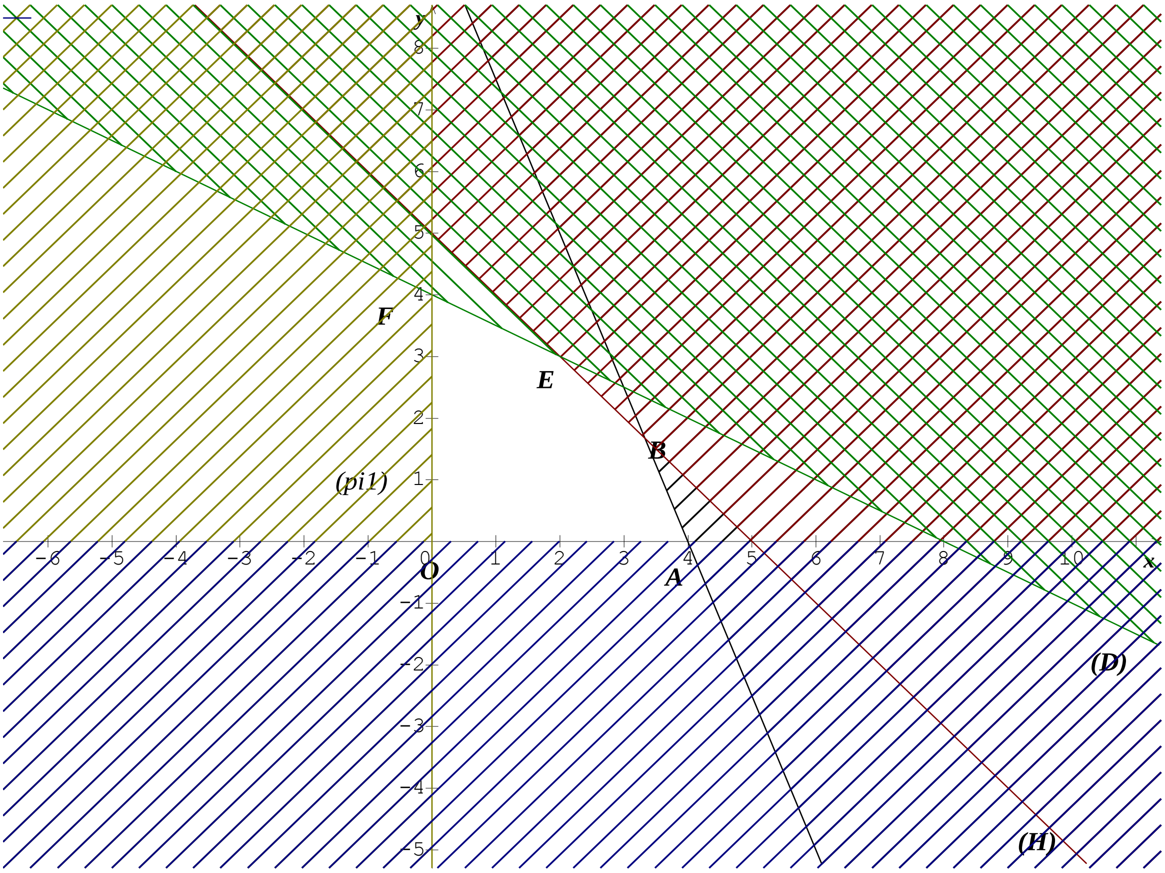
$$(G): x + 2y - 8 = 0$$

$$x = 0, y = 0$$

وباستخدام الخاصية السابقة نحل بيانيا جملة المتراجحات بمجهولين (القيود) وذلك بملاحظة أنه بتعويض $O(0,0)$ في العبارات $2.5x +$ $y-10$, $3x+3y-15$ و $x+2y-8$ نجد نواتج سالبة في كل الحالات ومنه نحدد المنطقة المسموحة لحلول المسألة وهي مجموعة النقط التالية

$$C=\{M(x,y); x,y \text{ تحقق الشروط}\}$$

وهي المنطقة غير المظللة في الشكل



المنطقة المسموحة للحلول هي مجموعة النقطة المحصورة بالمضلع $OABEF$ حيث :

$$A(4,0)=(G)\cap(xOx')$$

$$B\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)=(G)\cap(H)$$

$$A(2,3)=(H)\cap(D)$$

$$A(0,4)=(D)\cap(yOy')$$

ـاخذ دالة الهدف قيمها المثلى (الصغرى والكبرى) من أجل إحداثيات رؤوس أو أركان المنطقة المسموحة أي المضلع السابق

إحداثيات الرؤوس	$(4,0)$	$\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$	$(2,3)$	$(0,4)$
قيمة دالة الهدف	30.4=120	$30.\frac{10}{3}+40.\frac{5}{3}=\frac{230}{3}$	30.2+40.3=180	40.4=160

ومنه أكبر فائدة وهي 180 تكون عند بيع طاولتين و 3 مكاتب.

طريقة ثانية للحل (طريقة التبسيط) :

1) نحول القيود من متراجحات إلى معادلات وذلك باستحداث متغيرات جديدة فتصبح المسألة السابقة بالشكل :

$$s = 10 - 2.5x - y \qquad (1)$$
$$r = 15 - 3x - 3y \qquad (2)$$
$$\mathrm{w} = 8 - \mathrm{x} - 2\mathrm{y} \qquad (3)$$

$$z = 30x + 40y + 0s + 0r + 0w \qquad (4)$$

تسمى s ، r و w متغيرات الطاقة العاطلة (أو الراكدة).

المطلوب هو إيجاد x و y التي تحقق $\max z$ تحت الشروط : $x, y, s, r, w \geq 0$.

من أجل : $x = y = 0$ نجد $s = 10, r = 15, w = 8$ و $z = 0$.

الحل الابتدائي هو : $x = y = 0$ ، $s = 10, r = 15, w = 8$ في هذه المرحلة

s, r, w تشكل قاعدة الحل (متغيرات أساسية) و x, y متغيرات خارج قاعدة الحل (متغيرات غير أساسية).

2) لتحسين الحل علينا استبدال أحد المتغيرات الأساسية بأحد المتغيرات غير الأساسية أي x أو y من أجل ذلك نأخذ **المتغير ذو المعامل الموجب الأكبر في دالة الهدف** (وهو y في هذا المثال)

عندما نأخذ $s = 0$ نجد $y \leq 10$

عندما نأخذ $r = 0$ نجد $y \leq 5$

عندما نأخذ $w = 0$ نجد $y \leq 4$ (و هو الشرط الأكثر قوة)

ومنه الحل الجديد للمسألة هو $y = 4$, $x = w = 0$, $r = 3$, $s = 6$, $z = 160$.

و هو أحسن من الحل الأول.

نعيد صياغة المسألة بإدخال y في قاعدة الحل بدلا من w .

لدينا من (3) : $y = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}w$ نعوض عن y في (1), (2) و (4) فنجد الشكل الجديد للمسألة

$$s = 6 - 2x + \frac{1}{2}w \qquad (1')$$
$$r = 3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}w \qquad (2')$$
$$y = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}w \qquad (3')$$

$$z = 160 + 10x - 20w \qquad (4')$$

3) بنفس الطريقة ولتحسين الحل ندخل x إلى قاعدة الحل (لأنه المتغير ذو المعامل الموجب الأكبر في دالة الهدف) . من $(2')$ نجد : $x = 2 - \frac{2}{3}r + w$ ثم نعوض عن x في $(1')$ و $(3')$ و $(4')$ فنجد بعد التبسيط الجديد للمسألة

$$s = 2 - \frac{4}{3}r + \frac{3}{2}w \qquad (1'')$$

$$x = 2 - \frac{2}{3}r + w \qquad (2'')$$

$$y = 3 - \frac{1}{3}r - w \qquad (3'')$$

$$z = 180 - \frac{20}{3}r - 10w \qquad (4'')$$

ومنه $z \leq 180$ أي أن $\max z = 180$ ويتحقق ذلك في $(4'')$ من أجل $r = w = 0$ بالتعويض في $(2'')$ و $(3'')$ نجد $x = 2$ و $y = 3$.

ملاحظة : في هذه الطريقة نتوقف عن سلسلة التغييرات عندما تكون جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف سالبة أو معدومة.

تطبيق آخر للحل: يريد مزارع مزج أنواع من الأسمدة للحصول على سماد محسن يحوي على الأقل على 15 وحدة من البوتاس , 20 وحدة من النترات و 30 وحدة من الفوسفات.

اشترى نوعين من الأسمدة : النوع الأول يوفر 3 وحدات بوتاس , وحدة نترات واحدة و 3 وحدات فوسفات ويكلف 120 دينار . النوع الثاني يوفر وحدة بوتاس , 5 وحدات نترات و2 وحدة فوسفات ويكلف 60دينار. باستعمال برمجة خطية أو جد تشكيلة الأسمدة (مزيج من النوعين) التي تحقق الشروط السابقة بأقل تكلفة (استخدم الطريقة البيانية).

E. ديناميكية مجتمعات (systèmes dynamiques) بعض النماذج

تم وضع العديد من النماذج الرياضية التي تصف تزايد عدد أفراد مجتمع (بشري-نوع حيواني – بكتيريا –فيروسات- عناصر كيمائية مشعة ....)من بين هذه النماذج نذكر على سبيل المثال وليس الحصر

1. **نموذج مالتوس (Malthus 1798)** وهو من أكثر النماذج بساطة ويقول بأنه في كل لحظة زمنية t فإن العدد $N(t)$ لأفراد مجتمع ما يحقق المعادلة التفاضلية التالية

   $N'(t) = (b-d)N(t)$ مع $N(0) = N_0$.

   حيث b هي نسبة الولادات و d نسبة الوفيات في هذا المجتمع .

في حالة $b = 0$ هذه المعادلة تمثل قانون الاضمحلال الأسي لعنصر مشع حيث d يمثل معامل الانشطار.

إذا كان $d < b$ فلا شيء يمكنه إيقاف تزايد عدد أفراد هذا المجتمع أي أنه يتزايد بشكل أسي وذلك غير منطقي لأنه في هذه الحالة لا يمكن لمكان أن يسعه أو لغذاء أن يكفيه وهو ما يعاب على هذ النموذج.

2. **نموذج فيرهيلست (Verhulst 1836)** وهو غير خطي (modèle logistique) ويقول بأن تزايد عدد أفراد مجتمع يحقق المعادلة التفاضلية

   $(*)$ $N'(t) = \alpha N(t)\left(1-\frac{N(t)}{N_1}\right)$ مع $N(0) = N_0$

   حيث N_1 و α ثوابت حقيقية موجبة .

في هذا النموذج لا يوجد حلول تؤدي إلى انقراض المجتمع أو انفجاره (تزايد أسي). وهو ما يميزه عن النموذج السابق.

الجزء غير الخطي من المعادلة التفاضلية السابقة أي ($-\alpha\left(\frac{N^2(t)}{N_1}\right)$) يؤدي إلى استقرار عدد أفراد المجتمع عند $N = N_1$. أما الحل المعدوم $N = 0$ فهو غير مستقر أي يتأثر بالتغييرات الطفيفة على N_0.

تمرين: حل المسألة $(*)$ (مساعدة استخدم المجهول المساعد: $z(t) = \frac{1}{N(t)}$).

F. تطبيق الرياضيات في علم الأحياء (البيولوجيا)

اختبار الفحص عن مرض ما: الهدف هو معرفة قيمة الفحص من حيث التنبؤ بوجود المرض أي احتمال أن يكون شخص أظهر اختبارا إيجابيا مصابا فعلا.

تطبيق: مخبر تحاليل يقترح اختبار فحص حول مرض معين .يتميز هذا الاختبار بالخصائص التقنية التالية :

احتمال أن يظهر شخص مصاب بهذا لامنة المرض اختبارا إيجابيا هو $p = 0.95$

احتمال أن يظهر شخص غير مصاب بهذا المرض اختبارا سلبيا هو $s = 0.95$

نختار شخصا بصفة عشوائية ونعتبر الحوادث التالية:

M : الشخص مصاب بالمرض موضوع الدراسة . T : الاختبار المنجز على الشخص إيجابي.

نعتبر مجتمعا احصائيا ونرمز بـ x *لنسبة المصابين بهذا المرض . نسمي القيمة التنبؤية للاختبار* *valeur prédictible* */احتمال* أن يكون شخص أظهر اختبارا إيجابيا مصابا بالمرض. لنحسب هذه القيمة .

القيمة التنبؤية للاختبار هي $P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)}$ ولحساب $P(T)$ نطبق نظرية الاحتمالات الكلية

$$P(T) = P(M).P_M(T) + P(\bar{M}).P_{\bar{M}}(T) = x.0.95 + (1-x)(1-0.95) = 0.05 - 0.90x$$

$$P(M \cap T) = P(M).P_M(T) = 0.95x$$

ومنه, $P_T(M) = \frac{0.95x}{0.05-0.90x}$.

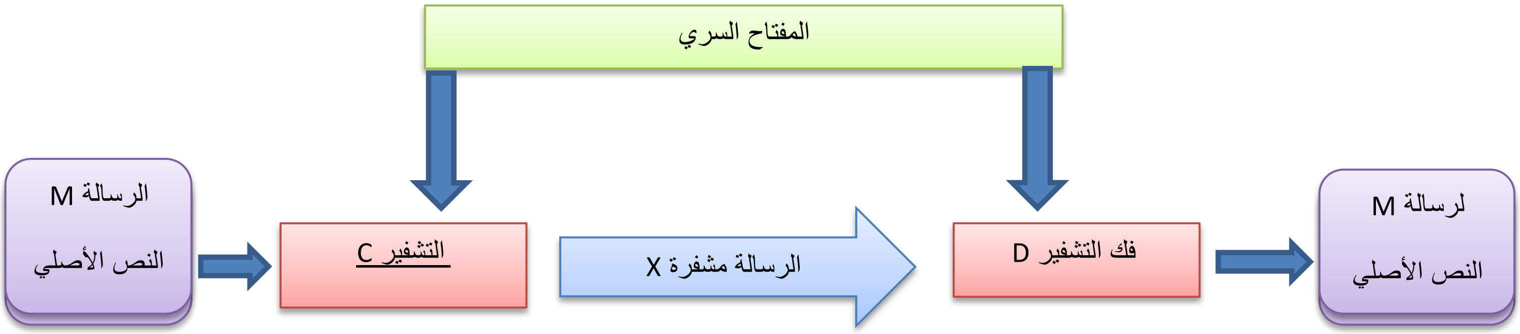
G. تطبيق الرياضيات في الاعلام الآلي :

مثال : أنظمة التشفير والرياضيات

تشفير رسالة : التشفير هو علم يستخدم الرياضيات وخاصة الحساب في عمليات تشفير وفك تشفير بيانات ورسائل بغرض تخزينها أو نقلها عبر الشبكات غير الآمنة وبالتالي المحافظة على سريتها .

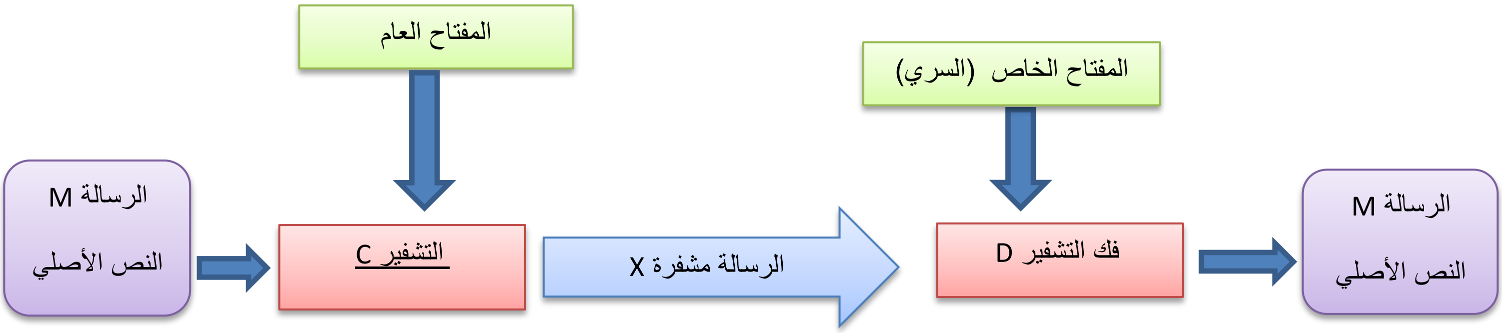
أنواع التشفير :

1. **التشفير المتماثل**: ويستخدم مفتاح واحد للتشفير وفكه. مثل شفرة قيصر المفتاح 3) أي أن كل حرف يراد تشفيره يعوض بالحرف الثالث الذي يليه .



2. **التشفير ذو المفتاح العام**: *cryptographie à clé public*

ويستخدم فيه مفتاح عام لتشفير الرسائل (في متناول الجميع) ومفتاح آخر خاص لفك التشفير يملكه مستقبل الرسائل فقط.



تطبيق : نظام التشفير RSA (ظهر سنة 1977 عن طريق Rivest و Shamir و Adliman)

بعض المفاهيم الرياضية المستخدمة في مفاتيح هذا النظام :

1. تذكر : علاقة الموافقة بترديد عدد طبيعي $n > 1$ في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وخواص هذه العلاقة.

اذا كانت a, b أعداد صحيحة و $n > 1$ عدد طبيعي معلوم فإن:

التعريف

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ a - b = kn$$

$\Leftrightarrow$ $a - b$ مضاعف لـ n

$\Leftrightarrow$ باقي قسمة a على n = باقي قسمة b على n

الخواص:

≡ علاقة تكافؤ متلائمة الجمع ومع الضرب في $\mathbb{Z}$ وكذلك مع الرفع إلى نفس القوة الطبيعية.

2. نظرية فيرما (الصغيرة) : اذا كان p عددا أوليا فإن : $\forall a \in \mathbb{Z};\ \ a^p \equiv a[p]$

واذا كا ن a ليس مضاعفا لــ p فإن : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

3. ليكن p, q عددان أوليان مختلفان . نضع $n = p.q$ و $\varphi(n) = (p-1).(q-1)$

يمكن إثبات أن:

I. اذا كان $a \in \mathbb{Z}$ وأولي مع n فإن : $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ (تعميم نظرية فيرما).

II. من أجل كل عدد طبيعي e حيث $1 < e < \varphi(n)$ و أولي مع $\varphi(n)$ يوجد عدد طبيعي <u>وحيد</u> d يحقق $1 < e < \varphi(n)$ و $ed \equiv 1[\varphi(n)]$ نقول أن d هو مقلوب e بترديد $\varphi(n)$.

III. اذا كان d هو مقلوب e بترديد $\varphi(n)$ فإن:

$$x \equiv a^e[n] \Leftrightarrow a \equiv x^d[n]$$

مبدأ نظام التشفير RSA:

لتشفير رسالة (بطاقة بنكية ، انترنيت ...) وفق هذا النظام

- نختار عددين طبيعيين أوليين كبيرين جدا p, q ثم نحسب $n = p.q$ و $\varphi(n) = (p-1).(q-1)$.
- نختار عدد طبيعي e حيث $1 < e < \varphi(n)$ و أولي مع $\varphi(n)$.
- نبحث عن العدد الطبيعي d مقلوب e بترديد $\varphi(n)$.

مثال : 1) من أجل $p = 5,\ q = 17$ نجد $n = p.q = 5 \times 17 = 85$ و $\varphi(n) = (p-1).(q-1) = 4 \times 16 = 64$

(حساب $\varphi(n)$ لا يكون ممكنا الا اذا عرف التحليل $= n = p.q$).

2) $p = 101,\ q = 103$, $n = p.q = 101 \times 103 = 10403$, $\varphi(n) = 100 \times 102 = 10200$.

في المثال الأول : يمكن أن نأخذ القوة $e = 7$ مثلا حيث $1 < 7 < \varphi(n) = 64$ و 7 أولي مع 64 لنبحث عن d مقلوب $e = 7$ بترديد 64

لدينا : $64 = 9 \times 7 + 1$ ومنه $64 - 9 \times 7 = 1$ اذا $7(-9) + 64(1) = 1$ ومنه $7(-9) \equiv 1[64]$

لكن $-9 \equiv 55[64]$ لأن $-9 - 55 = -64 = (-1)64$. اذا $7 \times 55 \equiv 1[64]$ ولدينا كذلك 55 و 64 أوليان فيما بينهما ومنه $d = 55$.

في المثال الثاني نختار القوة $e = 103$ نلاحظ أن : $1 < 103 < \varphi(n) = 10200$ و 103 أولي مع 10200. نبحث عن d. لدينا

$$\begin{cases} 10200 = 99 \times 103 + 3 \\ 103 = 34 \times 3 + 1 \end{cases}$$

ومنه $10200 - 99 \times 103 = 3$ و $103 - 34 \times 3 = 1$ نعوض في العبارة الأخيرة عن 3 فنجد

$103 - 34 \times (10200 - 99 \times 103) = 1$ ومنه $103 - 34 \times 10200 + 34 \times 99 \times 103 = 1$ اذا

$$103(3367) + 10200(-34) = 1$$

وبالتالي $103(3367) \equiv 1[10200]$ وبما أن 3367 10200 أوليان فيما بينهما فإن $d = 3367$.

في نظام التشفير $\boldsymbol{RSA}$ الرسائل $\boldsymbol{x}$ ستكون عبارة عن أعداد طبيعية محصورة بين 0 و $n-1$. وتشفير رسالة هو عبارة عن y باقي قسمة x^e على n أي التطبيق

$$f: [0; n-1] \to [0; n-1];\ \ x \longmapsto y;\ \ x^e \equiv y[n]$$

أما فك تشفير الرسالة y فهو عبارة عن x باقي قسمة y^d على n . أي

$$g: [0; n-1] \to [0; n-1] \quad y \longmapsto x;\ \ y^d \equiv x[n]$$

الثنائية $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e})$ تسمى المفتاح العام و العدد $\boldsymbol{d}$ يسمى المفتاح الخاص أو السري.

استخدام نظام التشفير $\boldsymbol{RSA}$:

مثال : شخصان A و B يتواصلان سريا. A يستخدم نظام $\boldsymbol{RSA}$ حيث اختار $p = 13,\ q = 17$ ومنه $n = 221$ و

$\varphi(n) = 192$ يختار $e = 7$ فيجد $d = 55$. كيف يرسل B الرسالة « bravo » إلى A مشفرة .

الحل: احرف الأبجدية الفرنسية مرقمة من 01 إلى 26 ففي البداية يعبر عن الرسالة bravo على سلسلة أعداد من رقمين كل عدد يمثل رقم الحرف فنجد $\underbrace{02}_{x_1}\ \underbrace{18}_{x_2}\ \underbrace{01}_{x_3}\ \underbrace{22}_{x_4}\ \underbrace{15}_{x_5}$ أي أنها مشكلة من خمس رسائل جزئية من رقمين . يقوم بتشفير كل منها أي: $x_i{}^e \equiv ?\,[n]$

لدينا : $2^7 \equiv \mathbf{128}[221]$ و $18^2 \equiv 103[221]$ و $18^6 \equiv 103^3 \equiv 103[221]$ وبالتالي $18^7 \equiv 103 \times 18 \equiv \mathbf{86}[221]$

$1^7 \equiv \mathbf{1}[221]$ و $22^2 \equiv 42[221]$ و $22^6 \equiv 42^3 \equiv 53[221]$ ومنه $22^7 \equiv 22 \times 53 \equiv \mathbf{61}[221]$

$15^2 \equiv 4[221]$ ومنه $15^6 \equiv 4^3 \equiv 64[221]$ اذا $15^7 \equiv 15 \times 64 \equiv \mathbf{76}[221]$

ومنه الرسالة bravo مشفرة : 76 61 01 86 128.

هذه الرسالة لا يمكن لأحد تشفيرها الا من طرف المستقبل A الذي يملك المفتاح الخاص $d = 55$

مثلا لفك شفرة الرسالة$128^{55} \equiv ?\,[221]$ حسب تعميم نظرية فيرما 2 و 221 اذا $2^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ أي

$2^{192} = (128)^{27} \times 8 \equiv 1[221]$ ومنه $(128)^{54} \times 8^2 \equiv 1[221]$ وأخيرا $(128)^{54} \times 8^2 \times 2 = 128^{55} \equiv 2[221]$

الحرف الأول من الرسالة هو الحرف ذو الرتبة 2 .

نموذج من امتحانات المقياس للسنوات السابقة :

امتحان الدورة العادية في مقياس تطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى (دورة 2019)

ملاحظة: الدقة ووضوح الإجابة ونظافة الورقة تؤخذ بعين الاعتبار كما أن مزج الصحيح بالخطإ أو بما هو غير مطلوب يعتبر في حكم الخاطئ.

تمرين1: (09نقاط)

أجب بدقة واختصار عن الأسئلة التالية:

1. كيف ساهم علم الحساب والأعداد في تنشيط المبادلات التجارية قديما.............**(02نقطة)**
2. ما هو اسم العلم الذي يستخدم الرياضيات في تقسيم تركة الميت المسلم على مستحقيها.....**(01نقطة)**
3. طبق المسلمون الرياضيات في مواضع مختلفة ترتبط بمعاملاتهم وعباداتهم أذكر مثالين....... **(01نقطة)**
4. تطورت الرياضيات عند الإنسان في غابر الأزمان تبعا لثلاث من حاجاته الأساسية أذكرها وحدد فروع الرياضيات المنبثقة عنها... **(02نقطة)**
5. ما المقصود بالبرمجة الخطية؟ و مما يتكون نموذجها الرياضي؟.......**(1.5نقطة)**
6. X متغير عشوائي يتبع قانون مدة حياة بدون ذاكرة .ما الهدف من استخدام مثل هذه القوانين؟ وماهي خاصيته المميزة؟....**(01 نقطة)**

إذا علمت أن : $P(X<6)=\dfrac{1}{4}$ فأحسب $P(X\geq 16/X\geq 10)$...**(0.5نقطة)**

تمرين2: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المتحرك M معرف بشعاع انتقاله بدلالة الزمن t كما يلي:

$.\overrightarrow{OM}(t)=t^2\vec{i}+\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\vec{j}$

1. جد المعادلة الديكارتية لمسار المتحرك M .... **(02نقطة)**
2. أحسب المسافة المقطوعة من طرف المتحرك M بين اللحظتين الزمنيتين $t_0=1$ و $t_1=3$.(وحدة قياس الزمن هي الثانية ووحدة قياس الطول هو المتر)......... **(02نقطة)**
3. استنتج حساب التكامل $\int_1^9\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$........**(01نقطة)**

تمرين3:(06 نقاط)

تشغل مؤسسة 220000 عامل . في كل سنة يُحال 5% من العمال على التقاعد ويتم توظيف 200 عامل جديد. ليكن x_n عدد العمال بهذه المؤسسة بعد مرور n سنة. تهدف إدارة المؤسسة إلى تخفيض 45000 عامل دون اللجوء لعملية التسريح.

1. عبر عن x_{n+1} بدلالة x_n..............**(01نقطة)**
2. تحقق من أن (x_n-4000) متتالية هندسية ثم عبر عن x_n بدلالة n........**(2.5 نقطة)**
3. بعد كم سنة يتحقق هدف إدارة المؤسسة...... **(1.5 نقطة)**
4. استنتج أنه بمرور الزمن (أي عندما يكون n كبيرا) فإن عدد عمال المؤسسة يستقر عند قيمة l يطلب تعيينها.... **(01نقطة)**