الفصل الأول

مفاهيم أساسية في الاحتمالات

مقدمة: نظرية الاحتمال هي نظرية تهتم بالتجارب العشوائية التي يمكن توقع نتائجها قبل حدوثها دون أن نعرف أي من النتائج التي ستظهر مسبقا. استمدت هذه النظرية جذورها من تحليل فرص اللعب في القرن 16 م إلى أن تطورت بداية عام 1933 م لتصبح نظرية حديثة لها مسلمات و قواعد خاصة و هذا بفضل العالم الرياضي كولموغروف.

1.1 مفاهيم عامة

1.1.1 التجربة العشوائية: و هي كل عملية يمكن القيام بها بحيث نكون على علم بنتائجها دون أن نؤكد أي من النتائج التي ستظهر.

مثال: عند رمي قطعة نقدية متوازنة، سيظهر الرقم أو الصورة لكن لا نستطيع تأكيد نتيجة الظهور الرقم أو الصورة.

2.1.1 المجموعة الأساسية: هي مجموعة كل الامكانيات أو كل النتائج الممكنة و نرمز لها بالرمز Ω و قد تكون منتهية أو غير منتهية.

مثال: نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال: نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين حيث نرمز للصورة ب P و للرقم ب N .

$$\Omega=\{(P,P),(P,N),(N,N),(N,P)\}$$

مثال: نرمي زهرة نرد متوازنة عدة مرات حيث نتوقف عند أول ظهور للرقم 6.

$$\Omega=\{1,2,3,4,\ldots\}=\mathrm{N}^*$$

3.1.1 الأحداث: نسمي حدثا A كل مجموعة جزئية من Ω.

- $A\cap B$ هو حدث وقوع A و B في نفس الوقت.

- $A\cup B$ هو حدث وقوع A أو B .

- $\overline{A}$ هو حدث وقوع نفي A .

- Ω هو الحدث الأكيد.

- ϕ هو الحدث المستحيل

4.1.1 الأحداث المنفصلة: نقول عن حدثين A و B أنهما منفصلان إذا و فقط إذا:

$$A\cap B=\phi$$

2.1 الاحتمال

1.2.1 تطبيق الاحتمال: نسمي احتمالا كل تطبيق P من $\wp(\Omega)$ نحو $[0,1]$ يحقق الخاصيتين التاليتين:

1. $P(\Omega)=1$

2. لكل $(A_i)_{i\in N^*}$ منفصلة مثنى مثنى يكون

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

و في هذه الحالة نسمي الثلاثية $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ بفضاء احتمال.

ملاحظة: إذا كانت Ω منتهية فإن التطبيق الآتي يعرف احتمال

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|} \quad , \forall A \subset \Omega$$

نتائج:

1. $P(\phi)=0$
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$
3. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

2.2.1 الاحتمال الشرطي: ليكن A و B حدثين و $P(B) \neq 0$ ، نسمي احتمال A علما أن B قد وقع بالاحتمال الشرطي و نرمز له بالرمز $P\left(A/B\right)$ أو $P_B(A)$ حيث

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3.2.1 الاستقلالية: نقول عن حدثين A و B أنهما مستقلان إذا و فقط إذا

$$P(A \cap B)=P(A)P(B)$$

ملاحظة: إذا كان $P(B)\neq 0$ فإن

A و B مستقلان $\Leftrightarrow$ $P\left(A/B\right)=P(A)$

4.2.1 صيغة بايز Bays

لتكن Ω مجموعة أساسية و $\left(A_i\right)_{i=1}^{n}$ أحداث تشكل تجزئة ل Ω و ليكن A حدثا من $\wp(\Omega)$ فإن

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(A/A_i\right)$$

نتيجة:

$$P\left(A_i/A\right)=\frac{P(A_i)P\left(A/A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(A/A_i\right)}\quad ,\forall i=1,\dots,n$$

مثال: يعتمد مصنع في انتاجه على ثلاث آلات حيث:

آلة1: تنتج 40% منها 2% معيبة.

آلة2: تنتج 25% منها 5% معيبة.

آلة3: تنتج 35% منها 3% معيبة.

تم شراء وحدة انتاجية من هذا المصنع

- ما هو احتمال أن تكون معيبة ؟ أن تكون سليمة ؟.

- إذا كانت الوحدة سليمة، ما هو احتمال أن يكون مصدرها هو الآلة 3 ؟.

نسمي الحدث A هو أن تكون الوحدة الانتاجية سليمة، فحسب صيغة بايز

$$P\left(\overline{A}\right)=\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)P\left(\overline{A}/A_i\right)$$

$$P\left(\overline{A}\right)=0.4\times0.02+0.25\times0.05+0.35\times0.03=0.0310$$

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=0.9690$$

$$P\left(A_3/A\right)=\frac{P\left(A_3\right)P\left(A/A_3\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0.35\times0.97}{0.9690}=0.3504$$

جامعة الوادي	كلية العلوم الدقيقة	قسم الرياضيات

مقياس الاحتمالات	السنة الثانية

السداسي الرابع	السنة الجامعية: 2021/2020

سلسلة تمارين رقم 01 (مفاهيم أساسية في الاحتمالات)

تمرين 01: نرمي زهرة نرد متوازنة مرتين متتاليتين، أوجد:

1/ المجموعة الأساسية Ω.

2/ احتمال أن يكون مجموع الرقمين 9.

3/ احتمال أن يظهر في الرمية الثانية عدد فردي.

4/ احتمال أن لا يظهر نفس الرقم خلال الرميتين.

تمرين 02: نرمي قطعة نقدية متوازنة ثلاث مرات متتالية، أوجد:

1/ المجموعة الأساسية Ω.

2/ احتمال أن تظهر الصورة في الرمية الأولى.

3/ احتمال أن يظهر الرقم خلال رميتين متتاليتين.

4/ احتمال أن تظهر الصورة و الرقم معا.

5/ احتمال أن تظهر الصورة علما أنه قد ظهر قبلها رقم.

تمرين 03: ليكن A و B حدثين حيث:

$$P(A)=\frac{3}{8},\quad P(A\cup B)=\frac{7}{8},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

أوجد: $P(B),\ P(A\cap\overline{B}),\ P(B\cap\overline{A})$

تمرين 04: ليكن A و B حدثين حيث:

$$P(A)=\frac{1}{4},\quad P(A\cup B)=\frac{23}{60},\quad P(B)=\frac{1}{3}$$

أوجد: $P\left(A/B\right),\ P\left(\overline{A}/B\right),\ P\left(\overline{A}\cap B/\overline{A}\cup B\right)$

تمرين 05: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و B حدث يحقق $P(B)\neq 0$ ، نعرف $\widetilde{P}$ كالآتي:

$$\forall A\subset\Omega,\ \widetilde{P}(A)=P\left(A/B\right)$$

أثبت أن $(\Omega,\widetilde{P})$ هو فضاء احتمال.

تمرين 06: صندوق يحتوي على 3 كريات حمراء و 5 كريات بيضاء و 2 كريات سوداء، نسحب عشوائيا ثلاث كريات من هذا الصندوق، أوجد ما يلي:

1/ احتمال الحصول على كرية حمراء.

2/ احتمال الحصول على لونين فقط مختلفين.

3/ احتمال الحصول على كل الالوان.

و هذا في الحالات الآتية:

أ/ السحب دفعة واحدة.

ب/ السحب الواحدة تلوى الأخرى بإرجاع الكرية المسحوبة في كل مرة.

ج/ السحب الواحدة تلوى الأخرى دون إرجاع الكرية المسحوبة في كل مرة.