

المصفوفات

تعريف

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفًا ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودًا. إذا كانت $(a_{j,k})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A هي من الدرجة (m, n) حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.

ملاحظات

1. في بعض الأحيان نرسم الصيغة المختزلة $A = (a_{j,k})$ لكافة المصفوفة.
2. المصفوفة الصفية هي المصفوفة المكونة من صف واحد أي من الدرجة $(1, n)$ وفي بعض الأحيان تسمى المصفوفة متجه صفي.
3. المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد (أي من الدرجة $(n, 1)$) وفي بعض الأحيان تسمى المصفوفة متجه عمودي.
4. المصفوفة الصفيرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز (0) .
5. مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المربعة التي عناصرها القطرية تساوي واحد وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الدرجة (n, n) .

6. المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة و جميع عناصرها أصفارا ما عدا العناصر الواقعة على القطر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر مثال}$$

7. نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا. و نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية سفلية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.

العمليات على المصفوفات

تعريف

1. الجمع:

لتكن $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) .
نعرف المصفوفة

$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B .

2. الضرب بعدد حقيقي:

لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) و λ عدد حقيقي.
نعرف المصفوفة

$$\lambda A = (\lambda a_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي λ .

تعريف

إذا كانت $A = (a_1, \dots, a_n)$ متجهها صفيا و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ متجهها عموديا. فنعرف الضرب الداخلي

الإقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي

$$AB = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

تعريف

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n) و $B = (b_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (n, p) فإن $AB = (c_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, p) حيث $c_{j,k}$ هو نتيجة الضرب الإقليدي للصف j من المصفوفة A مع العمود k من المصفوفة B .

$$c_{j,k} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,k}.$$

تعريف
لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n) . يعرف منقول المصفوفة A المصفوفة من الدرجة (n, m) والتي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A على التوالي. و نرمز بها A^T .

تعريف
نقول أن مصفوفة مربعة أنها متماثلة إذا كان $A = A^T$.

مبرهنة
إذا كانت $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفات من الدرجة (m, n) فإن

$$1. (A^T)^T = A.$$

$$2. (kA)^T = kA^T.$$

$$3. (A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$4. (AB)^T = B^T A^T.$$

العمليات الصفية الأولية على المصفوفات

العمليات الأولية على الصفوف هي

1. تغيير ترتيب صفين من المصفوفة

2. ضرب صف بعدد غير صفري

3. ضرب صف بعدد وإضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف
نقول أن مصفوفتين متكافئتين صفياً إذا حصلنا على إحداها من الأخرى بعد إجراء عدد منته من العمليات الأولية على الصفوف. و نكتب $A \sim B$.
نستخدم الرموز التالية

1. $L_{j,k}$ وتعني تبادل الصفين j و k .

2. rL_j وتعني ضرب الصف j بالعدد r .

3. $rL_{j,k}$ وتعني ضرب الصف j بالعدد r وإضافة الناتج للصف k .

تعريف
نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية إذا تحققت الشروط التالية

(1) كل صف غير صفري يكون أول عنصر غير صفري هو 1 ويسمى العنصر المتقدم.

- (2) الصفوف الصفرية إن وجدت تكون في آخر المصفوفة.
 (3) إذا وجد صفان غير صفريان فإن العنصر المتقدم في الصف الأعلى يكون على يسار العنصر المتقدم في الصف الأسفل.

تعريف

نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية مختزلة إذا تحققت الشروط التالية

1. A على صيغة درجية صفية
2. جميع عناصر الأعمدة التي تحوي على عنصر متقدم أصفارا باستثناء العنصر المتقدم.

مثال: $A+B$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال : ليكن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد $A+B$

الحل :

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A-B

الحل :

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-3 & -3-1 & 2-(-2) \\ 0-(-1) & 1-7 & -6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

مثال: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

أوجد A×B

شرط الضرب وبما أن A=2×2 و B=2×2

إذاً:

الشرط محقق والمصفوفتان قابلتان للضرب . $(2 \times 2)(2 \times 2)$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 54 & 2 + 42 \\ 6 + 72 & 6 + 56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 56 & 44 \\ 78 & 62 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$2 \times \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times -3 & 2 \times 1 \\ 2 \times 4 & 2 \times 2 \\ 2 \times -1 & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -2 + 1 + (-1) = -2$$

المحددات

خواص المحددات:

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا استبدلت كل صفوفه بأعمدته

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2- إذا كان للمحدد صفان متساويان أو عمودين متساويين فإنه تكون قيمة المحدد صفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3- ان تبديل مكانين صفين أو عموديين في المحدد يكافئ ضربه في (-1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4- ضرب كل عناصر صف واحد أو عمود واحد في أي عدد K يكافئ ضرب كامل المحدد في K

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & b_1 & c_1 \\ Ka_2 & b_2 & c_2 \\ Ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5- إذا كانت كل عناصر صف ما أو عمود ما تساوي صفر فإن المحدد نفسه يساوي صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6- إذا كانت العناصر المناظرة لصفين أو عمودين متناسبة فإن المحدد يكون مساوي للصفر

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

7- إذا كان كل عنصر من عناصر العمود رقم (n) أو الصف رقم (n) المحدد عبارة عن مجموع حدين فإنه يمكن التعبير عن المحدد في صورة مجموع محددين يحتوي أحدهما في عموده في رقم (n) على الحدود الأولى من الحدود المذكورة سابقا والثاني على الحدود الثانية وتكون العناصر في باقي الأماكن في كل الحدود الثلاثة هي نفسها

$$\begin{vmatrix} 'a_1 + "a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 + "a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 + "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 'a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} "a_1 & b_1 & c_1 \\ "a_2 & b_2 & c_2 \\ "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

8- إذا اضيفت الى عناصر عمود أو صف العناصر المناظرة في عمود آخر أو في صف آخر مضروبة في أي عامل مشترك فإن قيمة المحدد لا تتغير:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix}$$

9- إذا كانت A مصفوفة قطريه أو مثاليه عليا أو فإن محدد A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن المحدد :

$$|A| = 1(3)(2) = 6$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

يرمز للمحدد بالرمز Δ

قيمة المحدد :

- إذا كان المحدد من الدرجة الثانية 2×2 فإن قيمته تساوي مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الآخر .

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

القطر الرئيسي

مثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -6(8) - 10(-7) = -48 - (-70) = -48 + 70 = 22$$

- إذا كان المحدد من الدرجة الثالثة 3×3 فيمكن حساب قيمته باستعمال قاعدة الأقطار .
- خطوات إيجاد قيمة المحدد بقاعدة الأقطار :
 - 1- نعيد كتابة العمود الأول والثاني على يمين المحدد .
 - 2- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي والقطرين الموازيين له على يمينه كما هو موضح بالصورة التالية :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ c & h \end{vmatrix}$$

- 3- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الآخر والقطرين الموازيين له على يمينه كما هو موضح بالصورة التالية :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ c & h \end{vmatrix}$$

- 4- نوجد قيمة المحدد بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ c & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ c & h \end{vmatrix}$$

مثال :

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{أوجد}$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 5 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 1- \text{نعيد كتابة المحدد بوضع العمودين الأول والثاني يمين المحدد}$$

2- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار :

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -8 (-5) 2 = 80 \\ & -4 (6) (3) = -72 \\ & 1 (0) (4) = 0 \\ & 80 + (-72) + 0 = 8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & 3 (-5) (1) = -15 \\ & 4 (6) (-8) = -192 \\ & 2 (0) (4) = 0 \\ & -15 + (-192) + 0 = -207 \end{aligned}$$

3- نقوم بطرح المجموع الثاني 207- من المجموع الأول 8
 $8 - (-207) = 8 + 207 = 215$

4- إذا قيمة المحدد $\Delta = 215$

المصفوفة المساعدة او مصفوفة المحددات الصغرى Adj

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n فإننا نعرف العامل المرافق α_{ij} لعنصر a_{ij} ويحسب كالتالي :

$$Adj(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

مثال : أوجد Adj المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مثال :}$$

أوجد $Adj(A)$

نقوم بحذف الصف والعمود الواقع فيهما العنصر ونضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه ضرب عناصر القطر الآخر مع الأخذ بالاعتبار إشارة المحدد لكل عنصر :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

نأتي بالعنصر x_{11} والذي إشارته حسب المحدد $+$ إذاً نضرب المحدد بـ $+1$

$$\alpha_{11} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 0) = 4$$

نأتي بالعنصر x_{12} والذي إشارته حسب المحدد $-$ إذاً نضرب المحدد بـ -1

$$\alpha_{12} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1(0 - 2) = 2$$

$$\alpha_{13} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +1(0 - 2) = -2$$

$$\alpha_{21} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1(4 - 0) = -4$$

$$\alpha_{22} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 6) = -2$$

$$\alpha_{23} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(0 - 2) = 2$$

$$\alpha_{31} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1(1 - 3) = -2$$

$$\alpha_{32} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1 - 0) = -1$$

$$\alpha_{33} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1(1 - 0) = 1$$

مقلوب المصفوفة

يقصد به المقلوب للمصفوفة بحيث يكون حاصل ضرب المصفوفة في مقلوبها يساوى مصفوفة الوحدة.

المصفوفة الشاذة :

المصفوفة الشاذة هي المصفوفة التي ليس لها مقلوب ويمكن تحديد ما إذا كانت

المصفوفة شاذة أو لا إذا كانت $|A| = 0$ فهي مصفوفة شاذة.

إيجاد مقلوب المصفوفة :

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة من القانون التالي : $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$

لحساب مقلوب المصفوفة :

• حساب محدد المصفوفة والتأكد أنه لا يساوى صفر .

• حساب المصفوفة (المرافقة) .

• حساب المقلوب .

خواص مقلوب المصفوفة :

1. مقلوب حاصل ضرب مصفوفتين غير شاذتين يساوى حاصل ضرب مقلوب كل من المصفوفتين.

2. مقلوب منقول المصفوفة يساوى منقول مقلوب المصفوفة .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

$$\alpha_{11} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(12 - 6) = 6$$

$$\alpha_{12} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(8 - 6) = -2$$

$$\alpha_{13} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = +1(6 - 9) = -3$$

$$\alpha_{21} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(8 - 9) = 1$$

$$\alpha_{22} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 9) = -5$$

$$\alpha_{23} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1(3 - 6) = 3$$

$$\alpha_{31} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +1(4 - 9) = -5$$

$$\alpha_{32} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 - 6) = -4$$

$$\alpha_{33} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1(3 - 4) = -1$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ثانياً نأتي بـ } |A| :$$

$$\begin{aligned} &= [1(3)(4) + 2(2)(3) + 3(2)(3)] - [3(3)(3) + 3(2)(1) + 4(2)(2)] \\ &= (12 + 12 + 18) - (27 + 6 + 16) \\ &= 42 - 49 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حل جملة معادلات خطية

درسنا في المحاضرات السابقة المحددات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها المعرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية . ندرس في هذه المحاضرة :

حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف غوص.

جملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملته m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

[illegible]

تسمى العناصر a_{ij} المعاملات

وتسمى العناصر b_i المقادير الثابتة

العناصر x_i المجاهل

كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة وإذا كان احدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

تسمى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

مصفوفة المعاملات .

والمصفوفة الموسعة $\bar{A}$ التي هي :

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

فإذا رمزنا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر :

$$AX = B \quad (4)$$

أن حل جملة المعادلات الخطية (1) يعني إيجاد جميع المتجهات X التي تحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة :

- 1- هل هذه الجملة قابلة للحل أم مستحيلة الحل .
- 2- إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حلا لها ؟
- 3- كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

حل جملة n معادلة و n مجهول

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

طريقة مقلوب المصفوفة:

من العلاقة (4) : $AX = B$

حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A غير شاذة أي $\Delta \neq 0$ فإنه يوجد لـ A معكوس A^{-1} .

لذلك بضرب طرفي العلاقة (4) من اليسار بـ A^{-1} نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \quad (5) \quad \text{أو}$$

ويكون الحل وحيدا. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو العمود X الذي جميع عناصره معدومة. تدعى هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية لحل جملة المعادلات الخطية.

مثال : حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

كنا وجدنا في المثال (1) من المحاضرة السادسة أن $\Delta = \det A \neq 0$ وان :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فان :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

طريقة كرامر : CRAMER

أن الصعوبة العملية سابقا كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A ولكن الصيغة (5) تسمح بإيجاد طريقة أكثر عملية لإيجاد الحل وتتلخص كما يلي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

حيث Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود دي الرتبة i من المصفوفة A بعمود B .

● إذا كان $\Delta \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

الحالة الأولى : $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ عندئذ جملة المعادلات الخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية : $\Delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول.

مثال : استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

بما أن $\Delta \neq 0$ فإن لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = \frac{4}{4} = 1$$

الجواب :

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

طريقة غوص : GAUSS

تتلخص طريقة غوص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A : B]$ لنذكر أولاً ببعض المفاهيم الأخرى على المصفوفات وأهمها :

التحويلات الأولية على المصفوفات :

نسمي التحويلات التالية في المصفوفات تحويلات أولية :

1- مبادلة السطر i بالسطر j ونرمز لهذه العملية R_{ij} .

2- ضرب جميع عناصر السطر i بالعدد k ونرمز لهذه العملية بالرمز $R_i(k)$.

3- إضافة إلى عناصر السطر j عناصر السطر i مضروبة بالعدد k ونرمز لهذه العملية $R_{ij}(k)$.

ملاحظة : نرمز بـ $A \approx B$ إذا كانت B تنتج عن A بتحويلات أولية .

تكافؤ مصفوفتين :

نقول عن مصفوفتين A و B أنهما متكافئتين إذا كانت إحداها تنتج عن الأخرى بسلسلة من التحويلات الأولية المفروضة .

نقول عن مصفوفة A إنها سطرية مدرجة إذا تحقق فيها الصفات الآتية :

- الأسطر غير الصفيرية في المصفوفة A تسبق الأسطر الصفيرية (إن وجدت).

- العنصر الرائد لكل سطر يقع على يمين العنصر الرائد للسطر الذي يسبقه. حيث يعرف العنصر الرائد في السطر الأول بأنه العنصر الأول الذي قيمته يساوي الواحد .

طريقة غوص في حل جملة من المعادلات الخطية، تتلخص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A : B]$ وتكون على الشكل الآتي :

- نكتب المصفوفة الموسعة $H = [A : B]$ لجملة المعادلات الخطية المفروضة.
- نوجد المصفوفة السطرية المدرجة المكافئة للمصفوفة H وذلك بأجراء بعض التحويلات الأولية على الأسطر.

ملاحظة: تتلخص طريقة غوص بتحويل مصفوفة المعاملات الى مثلثية علوية بالتحويلات السابقة

مثال : استخدم طريقة GAUSS لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

تحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المتدرج حسب الصفوف:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L2 - 1/2 L1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3 - 1/2 L1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3 - 1/3 L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 \end{array} \right)$$

$$(1) \begin{cases} 2 \times x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \frac{3}{2} \times x_2 + \frac{1}{2} \times x_3 = 2 \\ \frac{4}{3} \times x_3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

○ أوجد المتغير x_3 من المعادلة 3 من (1):

$$\frac{4}{3} \times x_3 = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = 1$$

○ أوجد المتغير x_2 من المعادلة 2 من (1):

$$\frac{3}{2} \times x_2 = 2 - \frac{1}{2} \times x_3 = 2 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 1$$

(1): ○ أوجد المتغير x_1 من المعادلة 1 من (1):

$$2 \times x_1 = 4 - x_2 - x_3 = 4 - 1 - 1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

الجواب:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ : الحل العام}$$

طريقة غوص-جوردان GAUSS-JORDAN

تتلخص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A:B]$

$$[A:B] \sim [I:X] \quad \text{وذلك بتحويل المصفوفة A الى المصفوفة الحادية I}$$

مثال : استخدم طريقة GAUSS-JORDAN لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

تحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المتدرج حسب الصفوف:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L2-L1, L3 \leftrightarrow L3-L1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3-L1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L2/3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3/4/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L1-1/2 L3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L2-1/3 L3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L1-1/2 L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$(1) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

○ أوجد المتغير x_3 من المعادلة 3 من (1):

$$x_3 = 1$$

○ أوجد المتغير x_2 من المعادلة 2 من (1):

$$x_2 = 1$$

○ أوجد المتغير x_1 من المعادلة 1 من (1):

$$x_1 = 1$$

الجواب:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{الحل العام:}$$