1.1 RÉGULATIONS ET ASSERVISSEMENTS

Un système asservi est un processus pour lequel les grandeurs de commande sont élaborées en tenant compte à la fois des valeurs des consignes que l'on souhaite imposer au processus et des valeurs des sorties que l'on souhaite commander (fig. 1).

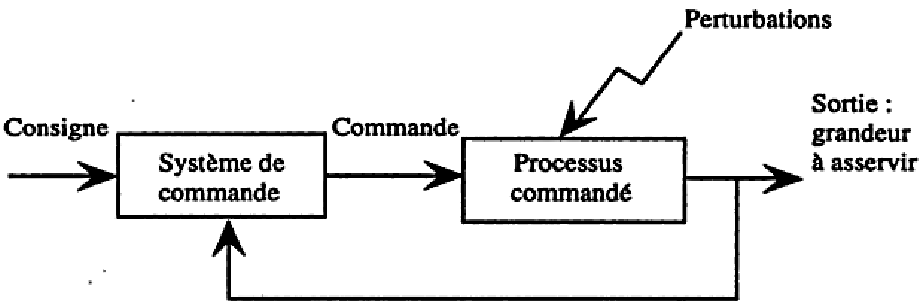

Figure 1 Système asservi.

On distingue les **régulations**, pour lesquelles l'objectif est d'atteindre et maintenir une valeur donnée de sortie malgré les perturbations agissant sur le système, des **asservissements** proprement dits, pour lesquels l'objectif est d'imposer à la sortie du processus une loi d'évolution choisie.

1.2 PRINCIPE D'UN ASSERVISSEMENT

Le système asservi le plus simple correspond au schéma de la figure 2 dans laquelle on distingue le **processus à commander**, un **actionneur** qui est l'organe fournissant la puissance à partir du signal de **commande** élaboré par le **correcteur**, et un **comparateur** qui ainsi que son nom l'indique compare la valeur de la variable de **sortie** du processus, mesurée par un **capteur**, à la valeur de la **consigne**, parfois appelée entrée de référence.

La qualité d'un asservissement dépend du choix et du réglage du correcteur, mais également du capteur qui doit être suffisamment précis et fiable, et de l'actionneur qui doit être suffisamment rapide et puissant.

La « chaîne » faisant passer de la consigne à la sortie s'appelle **chaîne d'action**, la chaîne permettant d'aller de la sortie au comparateur s'appelle **chaîne de retour** ou **boucle de retour**.

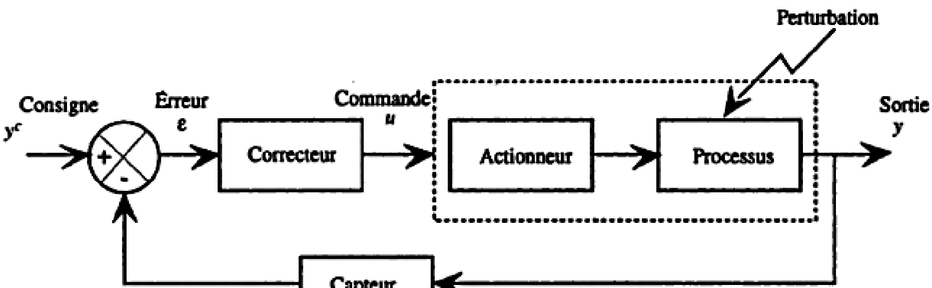

Figure 2 Détail d'un asservissement.

1.3 PROPRIÉTÉS D'UN ASSERVISSEMENT

On en distingue trois principales : stabilité, précision, rapidité.

Stabilité

À consigne constante, la sortie doit tendre vers une valeur constante. L'effet de toute perturbation de durée limitée doit disparaître au cours du temps.

Précision

L'écart entre la sortie à asservir et sa valeur de consigne doit être suffisamment petit en régime permanent.

Rapidité

Elle exprime le temps mis par le processus pour suivre un changement brusque de consigne.

Ces diverses propriétés peuvent le plus souvent être testées en soumettant le processus à une brusque variation (échelon) de la valeur de la consigne supposée constante hors de cette variation. Lorsque la variation du signal est égale à 1, on parle d'échelon unitaire. La réponse du processus à un échelon unitaire porte le nom de réponse indicielle.

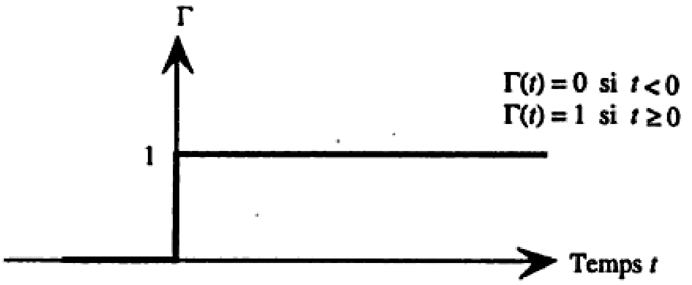

Figure 3 Échelon unitaire.

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2.1 DÉFINITION

Si $v(t)$ est une fonction du temps que nous supposons nulle pour $t < 0$, il lui correspond la transformée de Laplace $V(s)$:

$$V(s) = \mathcal{L}(v(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t)\,dt$$

Les transformées de Laplace des fonctions usuelles du temps sont indiquées en Annexe.

2.2 PROPRIÉTÉS

Dans la suite nous noterons $\dot{v}(t) = \mathrm{d}v(t)/\mathrm{d}t$ et $V(s) = \mathcal{L}(v(t))$ la transformée de Laplace d'une fonction $v(t)$. Afin de pouvoir prendre en compte d'éventuelles discontinuités à l'origine $t = 0$, nous noterons 0^+ un instant infiniment proche suivant l'instant initial.

La transformée $V(s)$ de $v(t)$ est unique et parfaitement définie. Connaissant $V(s)$ on en déduit $v(t)$ par la transformation inverse $v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(s))$.

Linéarité

Si α et β sont des constantes et si $v(t) = \alpha v_1(t) + \beta v_2(t)$, alors :

$$V(s) = \alpha V_1(s) + \beta V_2(s)$$

Valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} [v(t)] = \lim_{s \to \infty} [s\, V(s)]$$

Valeur finale

Si $\lim_{t \to \infty} [v(t)]$ existe alors $\lim_{t \to \infty} [v(t)] = \lim_{s \to 0} [s\, V(s)]$.

Retard

Notons $v(t - T_r)$ le signal $v(t)$ retardé de T_r alors $\mathcal{L}\left[v(t - T_r)\right] = \mathrm{e}^{-T_r s}\, V(s)$.

Dérivation $\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}] = sV(s) - v(0^+)$

En dérivant une nouvelle fois on obtient par itération :

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t})] = s(sV(s) - v(0^+)) - \dot{v}(0^+)$$

Intégration $\mathcal{L}[\int_0^t v(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda] = \dfrac{V(s) + v(0^+)}{s}$

Cette relation découle directement de la précédente.

Remarque

Lorsque les conditions initiales sont nulles, on voit que dériver par rapport au temps, revient en Laplace, à multiplier par s et intégrer par rapport au temps, à diviser par s :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow s \qquad \int \mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

2.3 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On peut en utilisant les transformées de Laplace remplacer la résolution d'un système linéaire à coefficients constants par la résolution d'un système algébrique.

Exemple $y + \tau\dot{y} = ku$:

On obtient $Y(s) + \tau[sY(s) - y(0^+)] = kU(s)$ soit :

$$Y(s) = \frac{kU(s) + \tau y(0^+)}{1 + \tau s} \quad \text{et} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

FONCTIONS DE TRANSFERT

3.1 DÉFINITIONS

Un système physique, ou processus est dit « **linéaire** » si son évolution est régie par un système d'équations différentielles à coefficients constants (on devrait dire en toute rigueur, linéaire stationnaire).

Nous noterons $u(t)$ l'entrée (**commande**) de ce système et $y(t)$ sa **sortie** (fig. 4).

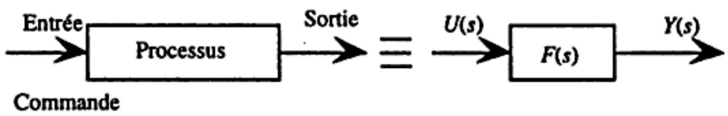

Figure 4 Schéma bloc.

Si les conditions initiales sont supposées nulles la transformée de Laplace de l'équation différentielle liant $y(t)$ à $u(t)$ permet d'écrire $Y(s) = F(s)\,U(s)$, $F(s)$ désignant la **fonction de transfert** ou **transmittance** du système qui est une fraction rationnelle en s.

Exemple $a_0 y(t) + a_1\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) = b_0 u(t) + b_1\dot{u}(t)$

$$a_0 Y(s) + a_1 sY(s) + s^2 Y(s) = b_0 U(s) + b_1 sU(s)$$

soit :

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2} U(s) \quad \text{et} \quad F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

On appelle **pôles** les racines du dénominateur de la fonction de transfert et **zéros** les racines de son numérateur.

3.2 COMPOSITION DES FONCTIONS DE TRANSFERT

Nous avons les équivalences de schémas suivantes (fig. 5).

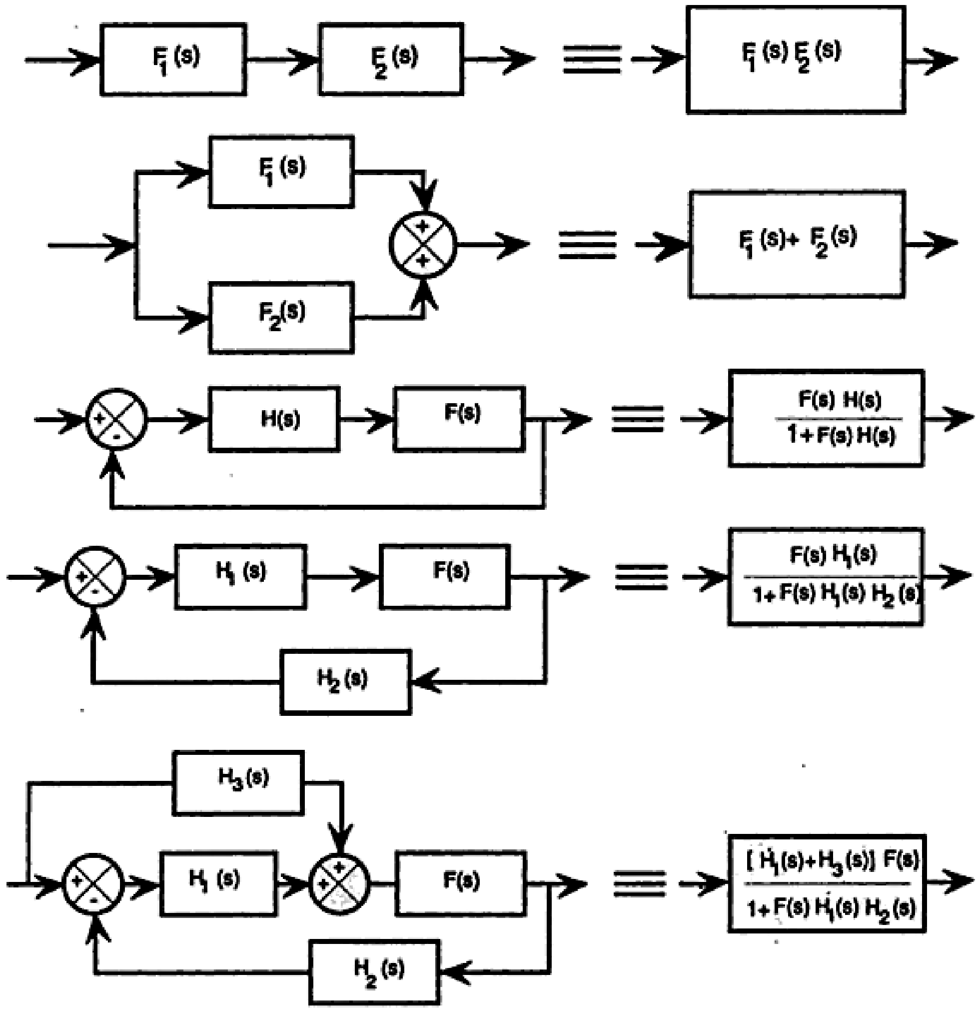

Figure 5 Composition des fonctions de transfert.

RÉPONSE TEMPORELLE

4.1 COMPORTEMENT LINÉAIRE

Les processus linéaires vérifient le théorème de superposition. Le comportement d'un processus évoluant sous l'effet d'une entrée à partir de conditions initiales données peut être déterminé en calculant séparément l'effet des conditions initiales (y_i) et l'effet de l'entrée (y_u) : il vient $y = y_i + y_u$.

Exemple · Soit le processus dont l'évolution est régie par l'équation :

$$a_0\, y + a_1\, \dot{y} + \ddot{y} = b_0\, u + b_1\, \dot{u}$$

L'effet (y_i) des conditions initiales y_0, y_0 à $t = 0$ s'obtient en calculant la transformée de Laplace et en faisant $u \equiv 0$.

$$a_0\, Y_i(s) + a_1 (s\, Y_i(s) - y_0) + s^2\, Y_i(s) - s\, y_0 - \dot{y}_0 = 0$$

soit :

$$Y_i(s) = \frac{\dot{y}_0 + a_1\, y_0 + s\, y_0}{a_0 + a_1\, s + s^2}$$

L'effet de la commande u s'obtient à partir de la fonction de transfert (qui suppose nulles les conditions initiales) :

$$Y_u(s) = F(s)U(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2} U(s)$$

Il vient :

$$Y(s) = Y_i(s) + Y_u(s) \quad \text{et} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

Remarque

Pour une entrée en échelon, en notant n et m les degrés respectifs du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert, les dérivées de la sortie d'ordre supérieur ou égal à $n - m$ peuvent subir une discontinuité à $t = 0$ par suite d'une transmission directe entrée-sortie, il s'en suit en général des valeurs différentes aux instants 0 et 0^+.

4.2 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

$$y + \tau \dot{y} = k u \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{k}{1 + \tau s}$$

La quantité τ qui a la dimension d'un temps s'appelle **constante de temps** du système et caractérise sa vitesse d'évolution.

Effet des conditions initiales

Pour $u \equiv 0$ et $y(0) = y_0$, il vient :

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau} y_0$$

Réponse à un échelon de position

Pour $u(t) = u_0 \Gamma(t)$ (échelon d'amplitude u_0), il vient en partant de la condition initiale nulle $y_0 = 0$:

$$y(t) = k u_0 (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

Notons T_{95} le temps au bout duquel l'écart par rapport au comportement final devient et reste inférieur à 5%. On voit sur la réponse indicielle $(y_0 = 0)$ de la figure 10 que $T_{95} \cong 3\tau$. La pente de la tangente à l'origine est égale à $k u_0 / \tau$.

Réponse à une entrée en rampe (échelon de vitesse)

Dans ce cas $u(t) = a\,t$. Il vient avec $y(0) = y_0$:

$$y(t) = k\,a\,(t - \tau) + \mathrm{e}^{-t/\tau}\,(y_0 + k\,a\,\tau)$$

soit pour $y_0 = 0$ la réponse de la figure 11 dans laquelle $\varepsilon_T = k\,a\,\tau$ désigne l'erreur de traînage et y_l le comportement limite de la sortie.