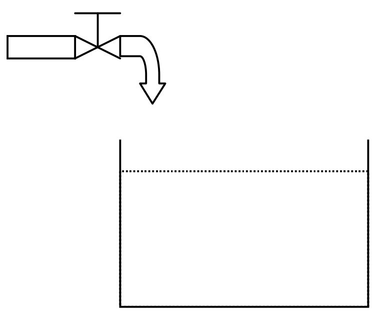
مفاهيم أساسية في الأنظمة الخطية

١- **النظام (الجملة)** : إن الأنظمة سواءً كانت كهربائية ، ميكانيكية ، كيميائية أو بيولوجية ... الخ هي عبارة عن مجموعة العناصر التي تحقق مجتمعة عمل ما أو تابع ما وتتصل مع المحيط الخارجي عن طريق متحولات متعلقة بالزمن تدعى متحولات الدخل ومتحولات الخرج. هناك الكثير من الأمثلة التي نشاهدها في حياتنا اليومية والتي تمثل جملة أو نظام مثل المحرك الكهربائي – السيارة – القمر الصناعي – الشوفاج كهربائي – ملأ خزان الماء.

٢- **العمل المباشر** : هي مجموعة الأفعال اللازمة لإنجاز عملية ما وفق القوانين الطبيعية التي تحدد سير هذه العملية.



__مثال__ عند ملأ خزان الماء فإن الأفعال اللازمة لإنجاز هذه العملية هي فتح وإغلاق صنبور الماء. بينما القوانين الطبيعية التي تحدد سير هذه العملية هي كمية الماء المتدفق وحجم الخزان.

ومنه يمكننا القول أن مجموعة الأفعال اللازمة مرتبطة بمتحولات الدخل وإنجاز العملية مرتبط بمتحولات الخرج بينما القوانين الطبيعية التي تحدد سير هذه العملية هي عبارة عن قوانين رياضية تربط متحولات الدخل بمتحولات الخرج.

٣- **متحولات الدخل ومتحولات الخرج :**

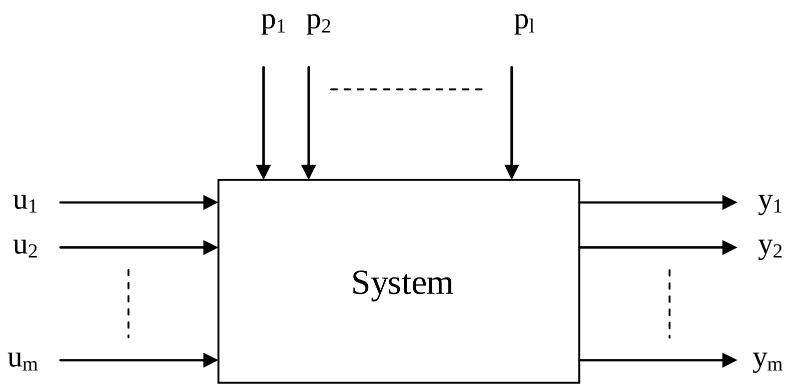
- متحولات الخرج : هي نتيجة عمل الجملة الخاضعة للتحكم أو استجابة النظام ويرمز لها $y=\{y_1, \ldots..y_n\}$. تمثل متحولات الخرج في مثالنا السابق ارتفاع مستوى الماء في الخزان.

- متحولات الدخل : هي المتحولات التي تؤثر على عمل الجملة وتؤدي إلى تغيير قيمة متحولات الخرج وتنقسم إلى قسمين :

١- متحولات تؤمن العمل المطلوب من الجملة لتحقيق هدف معين وتسمى إحداثيات الدخل ويرمز لها $u=\{u_1, \ldots..u_m\}$. تمثل هذه المتحولات في مثالنا السابق كمية الماء المتدفق.

٢- متحولات تشوش على عمل الجملة وتسمى المشوشات أو الضجيج أو المؤثرات الخارجية ويرمز لها $p=\{p_1, \ldots.. p_l\}$. كمثال على هذه المتحولات مرتبط بمثالنا السابق هو وجود احتمال رشح في جدران الخزان.

يوضح الشكل التالي علاقة هذه المحولات جميعاً بالجملة أو النظام.



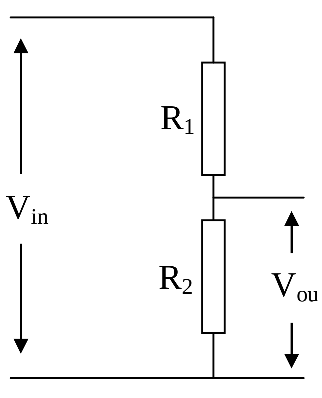
ترتبط هذه المتحولات مع بعضها البعض وفق قوانين رياضية ويرمز لها بالعلاقة التالية: $y=f(u,p)$.

يعتبر النظام معروفاً لدينا إن استطعنا توقع استجابته عند تطبيق إحداثيات دخل معينة أو بعبارة أخرى عندما نستطيع إيجاد علاقة بين y و u.

مثال : مقسم الجهد

من أجل إحداثية دخل معينة V_{in} يمكننا حساب قيمة الخرج V_{out} وفق العلاقة التالية :

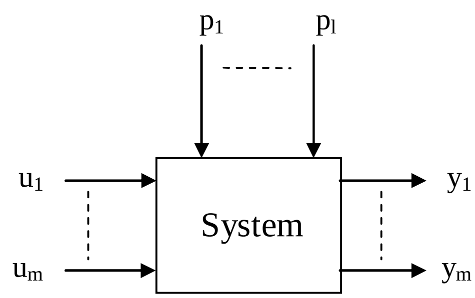
$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$



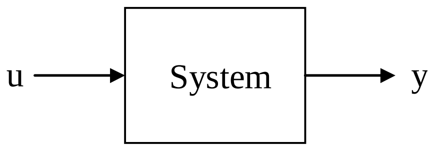
أنواع الجمل :

١- الجملة وحيدة البعد : هي الجملة التي لها دخل وحيد وخرج وحيد.

٢- الجملة متعددة الأبعاد : هي الجملة التي تمتلك عدة إشارات دخل و/أوعدة إشارات خرج.



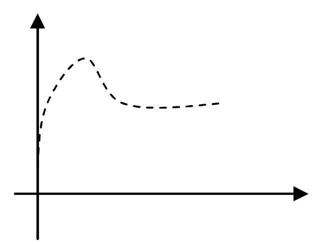
جملة متعددة الأبعاد



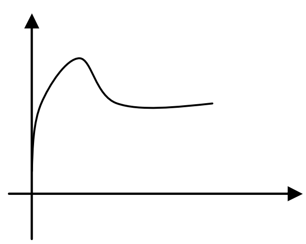
جملة وحيدة البعد

٣- الجملة المتصلة (المستمرة) : هي الجملة التي يكون تغير الإشارات فيهــا مــستمر زمنياً.

٤- الجملة المتقطعة : هي الجملة التي يكون تغير الإشارة عبارة عن قيم مأخوذة فــي لحظات معينة.



إشارة متقطعة



إشارة مستمرة

٥- الجملة ذات البارامترات الثابتة : هي الجملة التي تبقى بارامتراتها ثابتة مع الزمن.

٦- الجملة ذات البارامترات المتغيرة : هي الجملة التي تتغير بارامتراتها مع الزمن.

٧- الجملة الخطية : يقال عن جملة أنها خطية إذا حققت الشرطين التاليين :

- إذا نتجت الإشارة y عند تطبيق إشارة دخل u فإن تطبيق إشارة Ku ســيولد الإشارة Ky.
- إذا نتجت الإشارة y_1 عند تطبيق إشارة دخل u_1 ونتجــت الإشــارة y_2 عنــد تطبيق الإشارة u_2 فإن تطبيق الإشارة u_1+u_2 سيولد الإشارة y_1+y_2 .

يمكن أن نأخذ كمثال على جملة خطية مقسم الجهد.

ستكون دراستنا كلها حول الجمل الخطية أو الأنظمة الخطية.

٨- الجملة اللاخطية : هي الجملة التي ينعدم فيها أحد أو كلا الشرطين السابقيين.

التمثيل الرياضي للأنظمة الخطية

الغاية الأساسية لهذه المادة هي تحويل الأنظمة أو الظواهر الفيزيائة التي نشاهدها في حياتنا اليومية إلى مجموعة من المعادلات (تفاضلية بشكل خاص) أو القوانين بغية تحليلها ودراسة أدائها وتوقع استجابتها.

ومن أهم الأدوات المستخدمة لتسهيل هذه الدراسة الرياضية هي تحويلات لابلاس.

تحويلات لابلاس :

مقدمة : تستخدم تحويلات لابلاس بشكل عام لحل المعادلات التفاضلية. حيث أنه بإجراء تحويل لابلاس يمكننا تحويل الكثير من التوابع المثلثية أو الأسية إلى توابع جبرية ذات متحول عقدي يرمز له عادةً بـ S.

كما أن العمليات التفاضلية والتكاملية يمكن أن تستبدل بعمليات جبرية.

من فوائد تحويلات لابلاس أيضاً أنه يمكننا تمثيل أي نظام على شكل مخططات صندوقية تمكننا من توقع أداء النظام.

معنى S : أي تابع أسي أو جيبي يمكن كتابته على شكل مجموع توابع Ke^{St} حيث $S = s + iw$ يمثل التردد العقدي. حيث σ يمثل القسم الحقيقي للعدد العقدي S بينما يمثل ω القسم التخيلي منه.

ولفهم ماالذي نعنيه بالتردد العقدي لنأخذ الجدول التالي الذي يعطينا قيمة S من أجل عدة أنواع من الإشارات.

نوع الإشارة	مثال	S
DC	$x(t) = 5$	S=0 (σ=0, ω=0)
أسية	$x(t) = e^{-3t}$	S=-3 (σ=-3, ω=0)
جيبية	$x(t) = \sin 50t$	S=±50i (σ=0, ω=±50)
أسية جيبية	$x(t) = e^{2t}\cos 100t$	S=2±100i (σ=2, ω=±100)

في الإشاراتين الأخيرتين تم استخدام علاقات أولر من أجل استنتاج قيم S. تعطى هذه العلاقات على الشكل التالي :

$$e^{-iq} = \cos q - i\sin q$$

$$\cos q = \frac{1}{2}(e^{iq} + e^{-iq})$$

$$\sin q = \frac{1}{2i}(e^{iq} - e^{-iq})$$

نلاحظ أنه إذا كان S لا يملك إلا قسم حقيقي فهذا يعني أن الإشارة أسية بينما إن كان لا يملك إلا قسم تخيلي فالإشارة جيبية أما إن كان S ذو جزئين حقيقي وتخيلي فالإشارة هـــي أســـية جيبية.

ماذكرناه يعني أننا استطعنا تمثيل الإشارة بترددها العقدي فقط.

حساب تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي :

لنعتمد المصطلحات التالية :

f(t) تابع متعلق بالزمن t يسمى تابع الأصل بحيث أن f(t)=0 for t<0.

S متحول عقدي.

L رمز تحويل لابلاس.

F(S) تابع الخيال وهو يمثل تحويل لابلاس للتابع f(t).

عندها يمكننا تعريف تابع لابلاس بالعلاقة التالية :

$$F(S) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-St}.dt$$

وللحصول على تابع الأصل f(t) إنطلاقاً من تابع الخيال F(S) فإننا نعرف العلاقة التالية :

$$f(t) = L^{-1}[F(S)] = \frac{1}{2p\,i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(S)e^{St}.dS \quad for \quad t > 0$$

حيث c هو أي عدد ثابت حقيقي يختار أكبر من أي قسم حقيقي موجود لـــ S.

مثال : إذا كان $S_1=-2+i$ و $S_2=-3+2i$. فإن $c>-2$.

تمرين : أوجد تحويل لابلاس للتوابع التالية :

- $x(t) = 5$
- $x(t) = e^{-2t}$

خصائص تحويل لابلاس :

١- الخطية : $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(S) + bF_2(S)$

تمرين : أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = t + 5$.

٢- التفاضل : $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0^+)$

<u>تمرين :</u> أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = -2e^{-2t}$.

٣- التفاضل من الدرجة n :

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) - S^{n-1} f(0^+) - S^{n-2} f'(0^+) - S^{n-3} f''(0^+) - \ldots$$

إذا كانت الشروط البدائية مساوية للصفر فإن العلاقة السابقة تصبح على الشكل التالي :

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S)$$

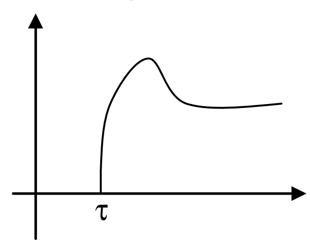
<u>تمرين :</u> أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = 3e^{5t}$ والمشتق الثاني له.

٤- التكامل : $L[\int f(t).dt] = \frac{F(S)}{S}$

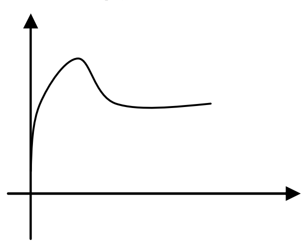
<u>تمرين :</u> أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = 3$ وتكامله.

٥- التأخير الزمني : التأخير الزمني يوافق إجراء انسحاب للمحاور الإحداثية وفـــق محـــور الزمن. ونقول عن إشارة أنها متأخرة زمنياً عن إشارة أخرى بمقدار τ إذا كانت الإشـــارتان متماثلتان ومزاحة إحداهما عن الأخرى بمقدار τ.

يرمز للإشارة الأولى *f(t)* بينما يرمز للإشارة المتأخرة زمنياً بالرمز *f(t-t)*



f(t-t)



f(t)

يعطى تحويل لابلاس للإشارة المتأخرة زمنياً بالعلاقة التالية : $L[f(t-t)] = e^{-tS} F(S)$.

٦- تغيير المقياس : $L[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{S}{a})$.

٧- نظرية القيمة النهائية : $\lim_{S \to 0} S\,F(S) = \lim_{t \to \infty} f(t)$.

ملاحظة : حتى نستطيع تطبيق العلاقة يجب أن لا يكون لــ *SF(S)* قطـــب علـــى المحـــور التخيلي أو قطب في نصف المستوي الموجب لــ S أو قطب في المركز ذو درجة عالية.

تمرين : أوجد القيمة النهائية للتابع $f(t)=e^{-2t}$.

٨- نظرية القيمة البدائية : $\lim_{S\to\infty} S\,F(S)=\lim_{t\to 0} f(t)$.

تمرين : أوجد القيمة البدائية للتابع $f(t)=5e^{3t}$.

٩- نظرية التحليل : لإيجاد تابع الأصل للتابع $F(S)=\dfrac{A(S)}{B(S)}$ حيث أن درجة المقام أكبر من درجة البسط فإننا نطبق العلاقة التالية :

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{S\to S_k}\frac{d^{n_k-1}}{dS^{n_k-1}}\left[F(S)(S-S_k)^{n_k}e^{St}\right]$$

حيث : S_k جذور المعادلة *B(S)=0* .

n_k مقدار تضاعف الجذر .

l عدد الجذور المتباينة .

أما إذا كانت جذور المعادلة *B(S)=0* كلها بسيطة فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(S_k)}{B'(S_k)}e^{S_k t}$$

حيث n درجة كثير الحدود.

$$B'(S_k)=\left.\frac{dB}{dS}\right|_{S=S_k}$$

تمرين : أوجد التابع الأصل للتابعين $F(S)=\dfrac{S+3}{S^2+3S+2}$ و $F(S)=\dfrac{S^2+2S+3}{(S+1)^3}$.

المعادلات التفاضلية :

إن الكثير من التطبيقات الهندسية تستخدم المعادلات التفاضلية للتعبيـــر عـــن العلاقـــة بـــين متحولاتها لذلك سنعطي نبذة مختصرة عن المعادلات التفاضلية.

إذا فرضنا أن x عبارة عن متحول وأن y عبارة عـــن تـــابع لهـــذا المتحـــول وبفـــرض أن $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ هي المشتقات المتتالية للتابع y بالنسبة للمتحول x تكون المعادلة التفاضلية بالتعريف هي العلاقة التي تحوي بالإضافة إلى المتحول x التابع y ومشتقاته.

وتعرف مرتبة المعادلة التفاضلية على أنها مرتبة أكبر مشتق يظهر في المعادلة.

أمثلة :

$\frac{dy}{dx} = x + 1$ معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى.

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية.

يمكننا حل هذه المعادلات باستخدام تحويلات لابلاس.

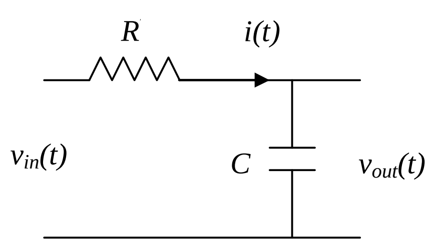
تمرين : أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ على اعتبار أن الشروط البدائية معطاة بالشكل التالي : $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

مفهوم الموديل : الموديل هو عبارة عن علاقة رياضية تربط بين الدخل u (السبب) والخرج y (الاستجابة). وأحد أشكال الموديل يمكن أن يكون المعادلة التفاضلية التي تأخذ عادة الشكل العام التالي :

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u$$

حيث a_0 … … … a_m , b_0 ……… b_n تمثل بارامترات النظام أو بارامترات المعادلة التفاضلية.

تمرين : أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل الدارة التالية :



الحل

$$v_{out} = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{dv_{out}}{dt}$$

$$v_{in} = R\,i(t) + v_{out}$$

بتعويض قيمة التيار $i(t)$ في المعادلة الثانية نجد :

$v_{in} = RC\frac{dv_{out}}{dt} + v_{out}$ وباستبدال v_{in} بـ u و v_{out} بـ y تصبح المعادلة على الشكل التالي : $u = RC\frac{dy}{dt} + y$ وبالمطابقة مع الشكل العام للمعادلة التفاضلية فإن بارامترات الدارة تعطى بالقيم التالية : $a_0=1, b_0=1, b_1=RC$.

تابع الإنتقال : بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية العامة نحصل على العلاقة التالية :

$$a_m[S^m U(S) - S^{m-1}u(0^+) - S^{m-2}u'(0^+) - \cdots] + \cdots + a_1[SU(S) - u(0^+)] + a_0 U(S) =$$
$$b_n[S^n Y(S) - S^{n-1}y(0^+) - S^{n-2}y'(0^+) - \cdots] + \cdots + b_1[SY(S) - y(0^+)] + b_0 Y(S)$$

في حالة كون جميع الشروط البدائية صفرية يمكن اختزال العلاقة السابقة إلى الشكل التالي :

$$[a_m S^m + \cdots + a_1 S + a_0]U(S) = [b_n S^n + \cdots + b_1 S + b_0]Y(S)$$

وأخيراً نحصل على العلاقة التالية :

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{a_m S^m + \cdots + a_1 S + a_0}{b_n S^n + \cdots + b_1 S + b_0}$$

تدعى هذه العلاقة التي تمثل النسبة بين تحويل لابلاس للخرج وتحويل لابلاس للدخل على اعتبار أن جميع الشروط البدائية صفرية بتابع الإنتقال للنظام.

متابعة تمرين الدارة : لإيجاد تابع الانتقال للدارة في المثال السابق فإنه وبتطبيق تحويل لابلاس فإننا نحصل على العلاقة : $U(S) = RC[SY(S) - y(0^+)] + Y(S)$

وعلى اعتبار أن الشروط البدائية صفرية أي $y(0^+)=0$ تكتب هذه العلاقة على الشكل التالي : $U(S) = RCSY(S) + Y(S)$ ومنه تابع الانتقال :

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{RCS + 1}$$

إذا كان للنظام أكثر من دخل فيتم حساب تابع الانتقال لكل دخل على حدى بعد افتراض أن بقية المداخل مساوية للصفر وهو مايسمى مبدأ التنضد.

تمرين : أوجد تابع الانتقال للجملة الممثلة بالمعادلة التالية :

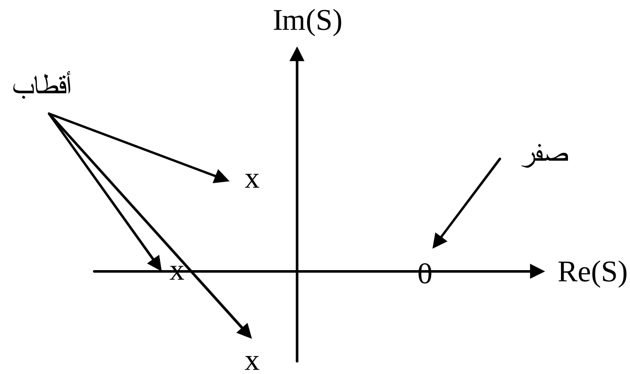
$$b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 = a_1 \frac{du}{dt} + a_0 + c_1 \frac{dp}{dt}$$

الأقطاب والأصفار : ليكن لدينا تابع الانتقال التالي : $H(S) = \frac{A(S)}{B(S)}$.

يدعى مقام تابع الانتقال هذا بالمعادلة المميزة وتدعى جذور هذه المعادلة بالأقطاب بينما تدعى جذور البسط بالأصفار.

تحدد الأقطاب خصائص النظام الديناميكية مثل الاستقرار والسرعة والاهتزاز والتخامد. ويمثل عدد الأقطاب درجة النظام.

في المستوي العقدي S تمثل الأقطاب بالرمز x والأصفار بالرمز 0.



<u>تمرين :</u> أوجد أصفار وأقطاب تابع الانتقال التالي : $H(S)=\dfrac{S+3}{(S+1)(S+5)}$.

التحويل من تابع الانتقال إلى المعادلة التفاضلية : بمعرفة تابع الانتقال لنظام ما يمكننا إيجاد المعادلة التفاضلية التي تمثل هذا النظام وذلك بالاستفادة من خاصة تفاضل الأصل.

<u>تمرين :</u> أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل النظام الممثل بتابع الانتقال التالي :

$$Y(S)=\frac{5S+1}{S^2+2S+3}U(S)+\frac{2S}{S^2+2S+3}P(S)$$

<u>الحل :</u> بتوحيد المقامات وحذفها نحصل على المساواة التالية :

$$S^2Y(S)+2SY(S)+3Y(S)=5S\,U(S)+U(S)+2S\,P(S)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي على هذه المعادلة فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة :

$$y''(t)+2y'(t)+3y(t)=5u'(t)+u(t)+2p'(t)$$

تمثيل الأنظمة الخطية بواسطة المخططات الصندوقية

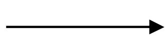
إن استخدام المخططات الصندوقية يسهل التعامل مع الأنظمة أو الجمل ويعطي تصوراً واضحاً عن انسياب الإشارات.

مكونات المخطط الصندوقي :

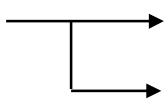
١- الصندوق : وهو يمثل عنصر أو تشكيل مجموعة عناصر من نظام.

كل صندوق له إشارة دخل وإشارة خرج ويكون ممثلاً لتابع انتقال يكتب عادة داخله.

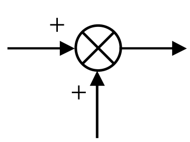
٢- السهم الموجه : وهو يشير إلى اتجاه سير المعلومات أو الإشارات في النظام.



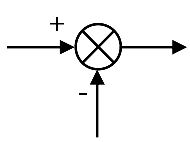
٣- نقطة أو عقدة التفريع :وهي عبارة عن عقدة تشير إلى انتقال نفس المعلومة عبر خطين منفصلين.



الإشارة المنقسمة لها نفس مطال وصفحة الإشارة الأصلية قبل الانقسام.



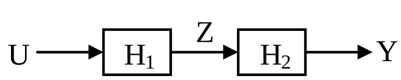
٤- نقطة أو عقدة التجميع : هي عبارة عن نقطة يتم فيها جمع اشارتين أو أكثر.

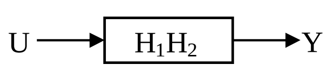


٥- نقطة أو عقدة المقارنة : هي عبارة عن نقطة يتم فيها طرح إشارتين أو أكثر.

القواعد الأساسية لتشكيل المخططات الصندوقية :

١- الوصل التسلسلي : من الشكل يمكننا الكتابة :





$Z=H_1U \quad , \quad Y=H_2Z \quad => \quad Y=H_1H_2U \quad => \quad H=H_1H_2$

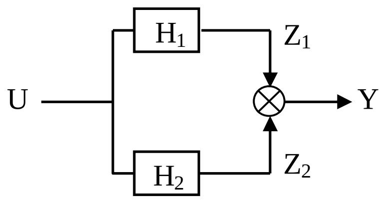
وبنفس الطريقة فإن تابع الانتقال المكافئ لمجموعة صناديق موصولة على التسلسل يساوي جداء توابع الانتقال لجميع الصناديق.

$$H(S)=\prod_{i=1}^{n} H_i(S)$$

حيث n عدد الصناديق.

تمرين : أوجد تابع الانتقال المكافئ للمخطط الصندوقي السابق إذا كان :

$$H_1 = \frac{1}{S},\ H_2 = \frac{1}{S+1}$$

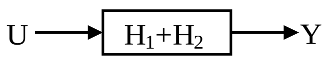


٢- الوصل التفرعي : من الشكل يمكننا الكتابة :

$$Z_1=H_1U\ ,\ Z_2=H_2U$$

وبما أن :

$$Y=Z_1+Z_2=H_1U+H_2U=(H_1+H_2)U$$
$$=>H=H_1+H_2$$

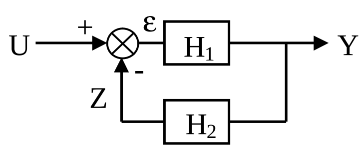


أي أن تابع الانتقال المكافئ لمجموعة صناديق موصولة على التفرع يساوي مجموع توابع الانتقال لجميع الصناديق.

$$H(S)=\sum_{i=1}^{n} H_i(S)$$

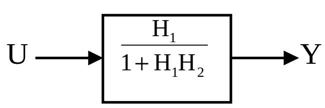
تمرين : أوجد تابع الانتقال المكافئ للمخطط الصندوقي السابق إذا كان :

$$H_1 = \frac{1}{S},\ H_2 = \frac{1}{S+1}$$



٣- الوصل بالتغذية العكسية السالبة : التغذية العكسية هي إعادة خرج الجملة إلى دخلها عبر جملة أخرى.

من الشكل يمكننا الكتابة :



$$e=U-Z\ ,\ Z=H_2Y$$
$$Y=H_1e=H_1(U-Z)=$$
$$=H_1(U-H_2Y)=H_1U-H_1H_2Y=>$$

$$H=\frac{Y}{U}=\frac{H_1}{1+H_1H_2}$$

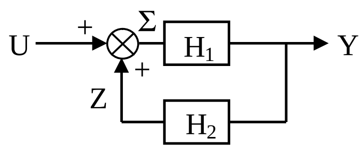
أي أن تابع الانتقال المكافئ لحلقة التغذية العكسية السالبة يساوي تابع الانتقال للطريق المباشر بين الدخل والخرج مقسوماً على واحد زائد تابع الانتقال للجملة المغلقة.

تمرين : أوجد تابع الانتقال المكافئ للمخطط الصندوقي السابق إذا كان :

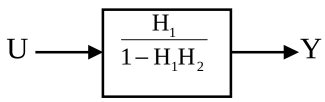
$$H_1 = \frac{1}{S},\ H_2 = \frac{1}{S+1}$$

٤- الوصل بالتغذية العكسية الموجبة :

من الشكل يمكننا الكتابة :



$$S=U+Z\ ,\ Z=H_2Y$$
$$Y=H_1S=H_1(U+Z)=$$
$$=H_1(U+H_2Y)=H_1U+H_1H_2Y=>$$



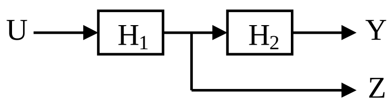
$$H=\frac{Y}{U}=\frac{H_1}{1-H_1H_2}$$

أي أن تابع الانتقال المكافئ لحلقة التغذية العكسية الموجبة يساوي تابع الانتقال للطريق المباشر بين الدخل والخرج مقسوماً على واحد ناقص تابع الانتقال للجملة المغلقة.

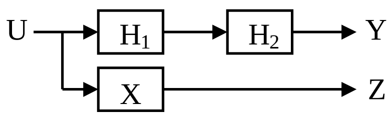
تمرين : أوجد تابع الانتقال المكافئ للمخطط الصندوقي السابق إذا كان :

$$H_1=\frac{1}{S},\ H_2=\frac{1}{S+1}$$

٥- نقل عقد التفريع :



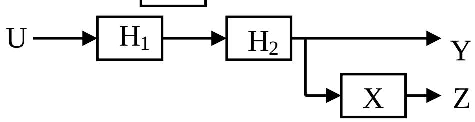
الحالة الأولى : نقل عقدة التفريع خطوة واحدة إلى الخلف.



قبل النقل : $Z=H_1U$

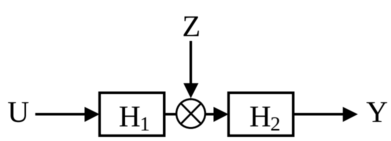
بعد النقل : $Z=XU$

بالمقارنة نجد : $X=H_1$



الحالة الثانية : نقل عقدة التفريع خطوة واحدة إلى الأمام.

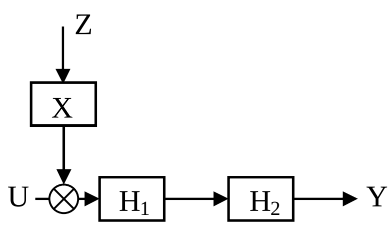
قبل النقل : $Z=H_1U$



بعد النقل : $Z=H_1H_2XU$

بالمقارنة نجد : $H_1=H_1H_2X=>X=H_2^{-1}$

٦- نقل عقدة المقارنة أو التجميع :



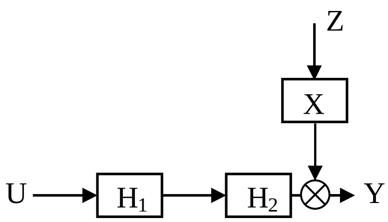
الحالة الأولى : نقل العقدة خطوة إلى الخلف.

قبل النقل : $Y=(H_1U+Z)H_2$

بعد النقل : $Y=(U+XZ)H_1H_2$

بالمقارنة نجد : $ZXH_1H_2=H_2Z=>$

$$X=H_1^{-1}$$



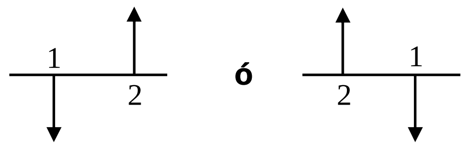
الحالة الثانية : نقل العقدة خطوة إلى الأمام.

قبل النقل : $Y=(H_1U+Z)H_2$

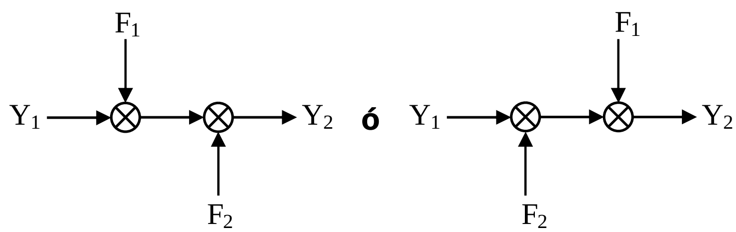
بعد النقل : $Y=H_1H_2U+XZ$

بالمقارنة نجد : $XZ=H_2Z \Rightarrow X=H_2$

٧- تبديل أماكن نقاط التفريع :



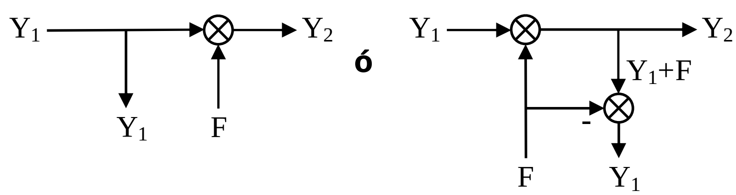
٨- تبديل أماكن عقد التجميع والمقارنة :



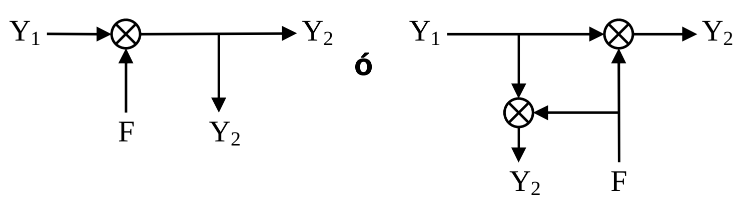
$Y_2=F_1+F_2+Y_1$ $\qquad\qquad$ $Y_2=F_1+F_2+Y_1$

٩- التبديل بين عقدة التفريع وعقدة المقارنة أو التجميع :

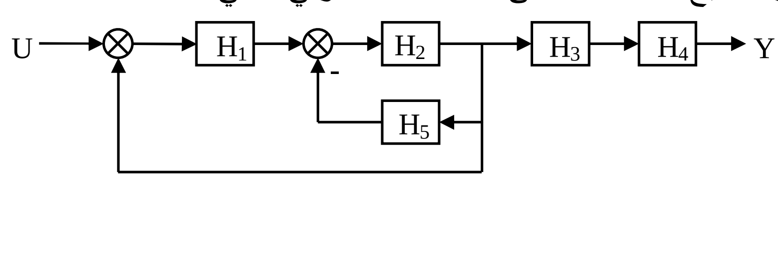
الحالة الأولى :



الحالة الثانية :



<u>تمرين :</u> أوجد تابع الانتقال المكافئ للمخطط الصندوقي التالي :



تحليل منطقة الزمن للأنظمة الخطية

(المميزات الزمنية)

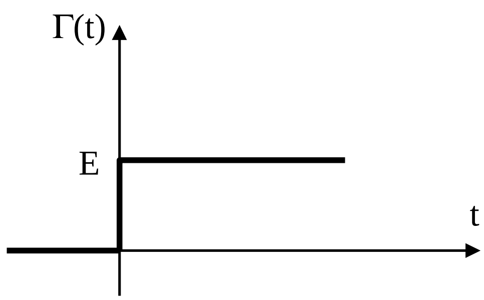
كما وجدنا سابقا فإن المعادلات التفاضلية تمثل سلوك النظام من أجل إشـــارة دخـــل معينـــة. وحلول هذه المعادلة يمكن أن تعطي تصورا واضحا عن خصائص النظام لأن الحلول تظهـــر تغير قيم إشارة الخرج مع الزمن.

ولذلك من أجل دراسة أداء النظام ومميزاته الزمنية يتوجب علينا معرفة إشارة دخل النظام.

ولقد جرت العادة على عمل هذه الدراسة باستخدام إشارات دخل قياسية بسيطة وهي :

١- الإشارات الدورية : وغالبا تكون إشارات جيبيـــة وهـــي تأخـــذ الـــشكل التـــالي : $\sin(wt+j)$.

٢- إشارة القفزة : تعرف إشارة القفزة بالتابع التالي :

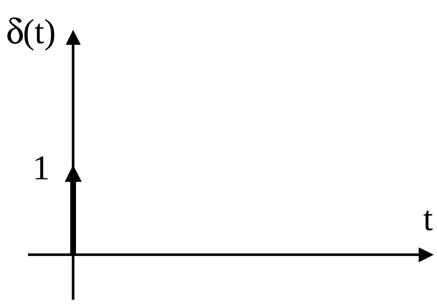


$$\Gamma(t)=\begin{cases}0 & for \quad t<0\\ E & for \quad t\geq 0\end{cases}$$

إذا كانت $E=1$ يسمى التابع بتـــابع القفـــزة الواحدية ويرمز له $1(t)$ ويعطـــى تحويـــل لابـــلاس لـــه علـــى الـــشكل التـــالي : $L[1(t)]=\frac{1}{S}$.

تسمى استجابة النظام للقفزة الواحدية بالاستجابة الواحدية.

٣- نبضة ديراك : تعرف نبضة ديراك بأنها إشارة ذات مطال مرتفع جدا (لانهـــائي) ذو فترة قصيرة جدا ويرمز لها $\delta(t)$. وإذا كان المطال يساوي الواحد فإن هذه النبـــضة تسمى إشارة النبضة الواحدية وتعطى بالعلاقة :

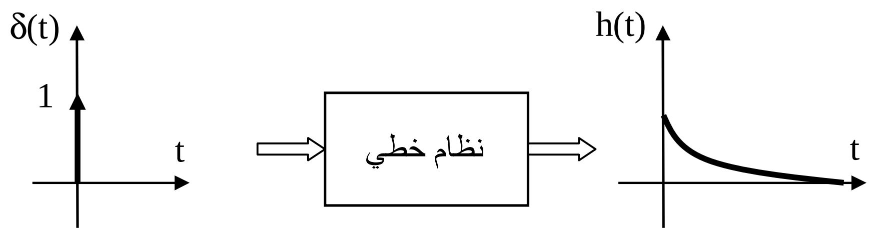


$$d(t)=\begin{cases}0 & for \quad t<0\\ 1 & for \quad t=0\\ 0 & for \quad t>0\end{cases}$$

وهذه النبضة هي عبارة عن مشتق القفـــزة الواحديـــة أي : $d(t)=\frac{d1(t)}{dt}$ ويعطـــى تحويل لابلاس لها على الـــشكل التـــالي : $L[d(t)]=1$.

تسمى استجابة النظام للنبضة الواحدية بالاستجابة النبضية.

الاستجابة النبضية : الاستجابة النبضية هي إشارة خرج أو استجابة النظام عندما تـــرد إلـــى دخله إشارة نبضة واحدية من أجل شروط بدائية صفرية. ويسمى المنحني البياني الممثل لهذه الاستجابة بالمميزة النبضية العابرة.



بفرض أن النظام ممثل بتابع الانتقال $H(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}$ فعند ورود إشارة نبـــضة واحديـــة $u(t)=\delta(t)$ على الدخل ذات تحويل لابلاس المساوي لــــ $U(S)=1$ يمكننـــا عندئـــذ كتابـــة الاستجابة على الشكل التالي:

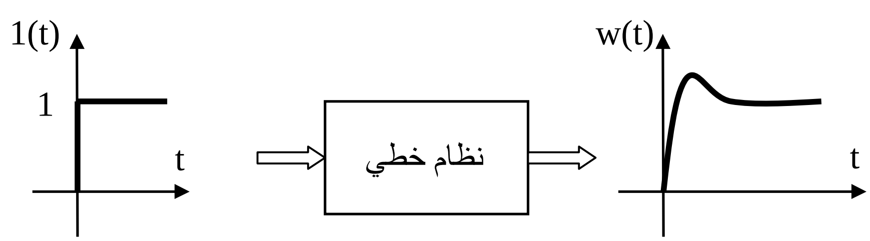
$$Y(S)=H(S).U(S)=H(S)$$

إذا

$$y(t)=L^{-1}[H(S)]=h(t)$$

وهكذا نرى أن تابع الانتقال لأي نظام يمثل تحويل لابلاس لاستجابة النظام النبضية أو للتابع النبضي العابر.

الاستجابة الواحدية : الاستجابة الواحدية هي إشارة خرج أو استجابة النظام عندما ترد إلـــى دخله إشارة قفزة واحدية من أجل شروط بدائية صفرية. ويسمى المنحني البياني الممثل لهـــذه الاستجابة بالمميزة العابرة.



بفرض أن النظام ممثل بتابع الانتقال $H(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}$ فعند ورود إشارة نبـــضة واحديـــة $u(t)=1(t)$ على الدخل ذات تحويل لابلاس المساوي لـــ $U(S)=1/S$ يمكننا عندئـــذ كتابـــة الاستجابة على الشكل التالي:

$$Y(S)=H(S).U(S)=H(S)/S=W(S)$$

إذا

$$y(t)=w(t)=L^{-1}[H(S)/S]$$

وهكذا نرى أن تكامل تابع الانتقال لأي نظام يمثل تحويل لابلاس لاستجابة النظام الواحدية.

العلاقة بين الاستجابة الواحدية والاستجابة النبضية :

$$W(S)=\frac{H(S)}{S}\Rightarrow H(S)=SW(S)$$

$$L^{-1}[H(S)]=L^{-1}[SW(S)]\Rightarrow h(t)=\frac{dw(t)}{dt}$$

أي أن الاستجابة النبضية هي مشتق الاستجابة الواحدية كما أن النبضة الواحدية هي مشتق القفزة الواحدية : $d(t)=\frac{d1(t)}{dt}$.

الاستجابة العابرة

عند تحليل منطقة الزمن لاستجابة أي نظام نجد أنها تتألف من قسمين. الاستجابة العابرة والاستجابة الدائمة أو المستقرة.

نعني بالاستجابة العابرة انتقال النظام من الحالة البدائية إلى الحالة النهائية.

ونعني بالاستجابة الدائمة أو المستقرة تصرف النظام عندما يقترب الزمن t من اللانهاية.

يعتبر تحليل الاستجابة العابرة لأي نظام من أهم الأدوات لتحليل أداء النظام بعد تمثيله رياضياً وذلك بتطبيق نبضة واحدية أو قفزة واحدية على دخله وبكلمة أخرى تحليل المنطقة العابرة من الاستجابة النبضية والاستجابة الواحدية.

فيما سيأتي سندرس الاستجابة العابرة للأنظمة الخطية من الدرجة الأولى والدرجة الثانية.

الاستجابة العابرة لنظام من الدرجة الأولى : يمكن أن يمثل نظام من الدرجة الأولى بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$t\,y'(t)+y(t)=ku(t)$$

أو يمكن أن يمثل بتابع الانتقال التالي بعد إجراء تحويل لابلاس على المعادلة السابقة :

$$H(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{k}{tS+1}$$

حيث τ ثابت زمني و k يمثل ربح النظام.

سندرس الاستجابة العابرة لهذا النظام في حال تطبيق نبضة واحدية وقفزة واحدية.

الاستجابة النبضية العابرة لنظام من الدرجة الأولــى : فــي هــذه الحالــة U(S)=1 أي أن الاستجابة النبضية في مجال لابلاس تعطى بالعلاقة :

$$Y(S)=\frac{k}{tS+1}1=\frac{k}{tS+1}$$

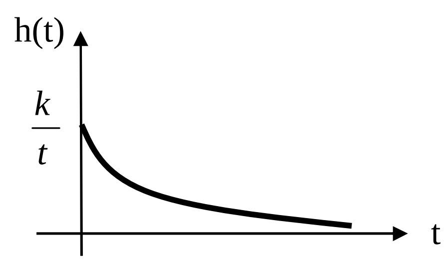
وبإجراء تحويل لابلاس العكسي نحصل على الاستجابة النبضية لنظام من الدرجة الأولى في المجال الزمني :

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{k}{tS+1}\right]=\frac{k}{t}e^{-\frac{t}{t}} \qquad for \quad t\geq 0$$

نستطيع الآن إذا رسم المميزة النبضية العابرة :

$$t=0 \Rightarrow y(t)=\frac{k}{t}$$

$$t=\infty \Rightarrow y(t)=0$$



الاستجابة الواحدية العابرة لنظام من الدرجة الأولى : في هــذه الحالــة U(S)=1/S أي أن الاستجابة الواحدية في مجال لابلاس تعطى بالعلاقة :

$$Y(S)=\frac{k}{tS+1}\frac{1}{S}=\frac{k}{tS^2+S}$$

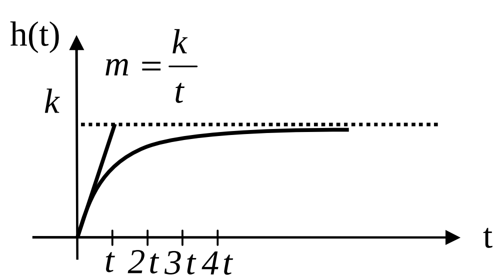
بإجراء تحويل لابلاس المعاكس نجد أن الاستجابة الواحدية في المجال الزمني تعطى بالعلاقة التالية :

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{k}{tS^2+S}\right]=k-k\,e^{-\frac{t}{t}} \qquad for \quad t\geq 0$$

نستطيع الآن إذا رسم المميزة الواحدية العابرة :

$$t=0 \Rightarrow y(t)=0$$

$$t=\infty \Rightarrow y(t)=k$$



توضح هذه المميزة أن الحالة البدائية للخرج هي صفر والحالة النهائية للخرج هي k. نلاحظ أيضاً أنه عند الزمن $t=t$ أن المنحني يصل إلى 63.2% من قيمته النهائية وهذا نـــاتج عـــن التعويض بمعادلة الاستجابة :

$$y(t) = k - k e^{-\frac{t}{t}} = k - k e^{-1} = 0.632k$$

ومن معادلة الاستجابة يمكننا الاستنتاج أيضا أن المنحني يتزايد بسرعة أكبر كلما نقص الثابت الزمني.

لنحسب ميل المماس عند النقطة $t=0$ فنجد أنه يساوي :

$$m = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{k}{t} e^{\frac{-t}{t}} \bigg|_{t=0} = \frac{k}{t}$$

بعد أن يصل التابع إلى 63.2% من قيمته النهائية بعد ثابت زمني واحد يبدأ بالتزايد ببطـــئ. فهو يصل إلى 86.5% من قيمته النهائية بعد ٢ ثابت زمني ويصل إلـــى 95% ، 98.2% و 99.3% بعد ٣ ، ٤ و ٥ ثابت زمني على الترتيب. وبما أن التابع لايمكن أن يصل إلى قيمته النهائية إلا في الزمن t يساوي اللانهاية وبما أنه من المناقشة السابقة نلاحظ أن المنحني فـــي آخر جوابين كان ضمن 2% من القيمة النهائية لذلك يعتبر هذا الحل مقبولاً كتقدير للاستجابة النهائية أو الدائمة.

ومن هنا يمكننا أن نعرف <u>وقت الاستجابة t_s</u> وهو الوقت الذي يحتاجـــه منحنـــي الاســـتجابة الواحدية لنظام من الدرجة الأولى كي يصل إلى بعد 2% من قيمته النهائية ويساوي تقريبـــاً أربعة ثوابت زمنية.

<u>مثال</u>

لتكن لدينا الدارة التالية والمطلوب :

تحديد الثابت الزمني t ووقت الاســـتجابة t_s وعامل الـــربح k ورســـم الاســـتجابة الواحدية العابرة.