كلية العلوم الدقيقة قسم الرياضيات	جـــامعة الشهيد حمة لخضر – الوادي	الاسم واللقب:................. ....
السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي	امتحان الدورة العادية في مقياس الجبر 01 الاجابة النموذجية	الفوج :.................... المدة : 01 ساعة

ملاحظة: الدقة ووضوح الإجابة ونظافة الورقة تؤخذ بعين الاعتبار كما أن المكان المخصص للإجابة كاف تماما .

تمرين 01: (04ن) أكمل الجدول التالي

القضية P	قيمة حقيقتها	نفي القضية P
$\left(\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\wedge(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q})$	(V) 1	$\left(\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\neq\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\vee(\sqrt{2}\in\mathbb{Q})$
$\forall m\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N};\quad m+n=15$	(F) 0	$\exists m\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N};\quad m+n\neq 15$
$\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R}; a\times b=0 \Rightarrow a=b=0$	(F) 0	$\exists a\in\mathbb{R},\exists b\in\mathbb{R};(a\times b=0)\wedge[(a\neq 0)\vee(b\neq 0)]$

تمرين 02 (5.5 ن) ليكن التطبيق : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=2x^2-x-1$.

1. أتمم الجدول التالي

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	9	2	-1	-1	0	14

واستنتج أن التطبيق f ليس متباينا بما أن $\left(0\neq\frac{1}{2}\right)\wedge\left[f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1\right]$ ومنه f تطبيق ليس متباينا .

2. عين مجموعة حلول المعادلة $f(x)=-2$ في $\mathbb{R}$. ماذا تمثل هذه المجموعة بالنسبة للتطبيق f . هل f غامر ؟ (برر إجابتك)

$f(x)=-2\Leftrightarrow 2x^2-x+1=0$ مميزها $\Delta=-7$ ومنه $S=\emptyset$ وهي تمثل الصورة العكسية للمجموعة $\{-2\}$ بالتطبيق f أي $f(\{-2\})$. f تطبيق ليس غامرا أن -2 ليس له سابقة بواسطته.

تمرين 03 (06ن): نعرف في المجموعة $\mathbb{R}$ العملية الداخلية $\star$ كما يلي: $a\star b=\sqrt[3]{a^3+b^3}$. وليكن التطبيق : $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $\varphi(x)=x^3$.

1. أثبت أن العملية $\star$ تبديلية وتجميعية : ليكن a,b,c ثلاثة أعداد حقيقية كيفية. لدينا

$a\star b=\sqrt[3]{a^3+b^3}=\sqrt[3]{b^3+a^3}=b\star a$ لأن الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$ ومنه $\star$ تبديلية.

$$a\star(b\star c)=\sqrt[3]{a^3+(b\star c)^3}=\sqrt[3]{a^3+\left(\sqrt[3]{b^3+c^3}\right)^3}=\sqrt[3]{a^3+(b^3+c^3)}$$
$$=\sqrt[3]{(a^3+b^3)+c^3}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)^3+c^3}=(a\star b)\star c$$

لأن الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$ ومنه $\star$ تجميعية.

2. بين أن العدد 0 هو العنصر الحيادي للعملية $\star$ في $\mathbb{R}$. وأستنتج $(\mathbb{R},\star)$ زمرة تبديلية. لدينا

$$\forall a\in\mathbb{R};\ a\star 0=0\star a=\sqrt[3]{a^3+0^3}=\sqrt[3]{a^3}=a$$

اذا 0 هو العنصر الحيادي للعملية $\star$ في $\mathbb{R}$.

لكي تكون $(\mathbb{R},\star)$ زمرة تبديلية بقي شرط واحد وهو وجود نظير لكل عدد حقيقي بالنسبة لهذه العملية. بفرض أن a' هو نظير a اذا

$$a \star a' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a^3 + a'^3} = 0 \Rightarrow a^3 + a'^3 = 0 \Rightarrow a'^3 = (-a)^3 \Rightarrow a' = -a$$

ومنه نظير a هو $-a$ اذا $(\mathbb{R}, \star)$ زمرة تبديلية .

3. بين أن φ تشاكل لـ $(\mathbb{R}, \star)$ في $(\mathbb{R}, +)$

$\varphi(a \star b) = \left(\sqrt[3]{a^3 + b^3}\right)^3 = a^3 + b^3 = \varphi(a) + \varphi(b)$ ومنه φ تشاكل لـ $(\mathbb{R}, \star)$ في $(\mathbb{R}, +)$.

تمرين 04 (04.5 ن) : نعرف في المجموعة $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathcal{R}$ كما يلي: $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \Leftrightarrow |a - c| \leq d - b$

أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في $\mathbb{R}^2$ ليكن $(a, b), (c, d), (r, s)$ 03 عناصر كيفية من $\mathbb{R}^2$. لدينا

$|a - a| = 0 \leq 0 = b - b$ ومنه $(a, b)\,\mathcal{R}\,(a, b)$: اذا $\mathcal{R}$ علاقة انعكاسية.

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \wedge (c, d)\,\mathcal{R}\,(a, b) \Rightarrow \begin{cases} |a - c| \leq d - b \ldots\ldots\ldots (1) \\ \text{و} \\ |c - a| \leq b - d \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من خواص القيمة المطلقة $0 \leq |a - c| = |c - a|$. بجمع المتباينتين (1) و (2) نجد $0 \leq 2|a - c| \leq 0$ اذا

$|a - c| = 0$ وبالتالي $a = c$. نعوض في (1) و (2) فنجد $d \leq b$ و $b \leq d$ اذا $b = d$ ومنه $(a, b) = (c, d)$

اذا $\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية.

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \wedge (c, d)\,\mathcal{R}\,(r, s) \Rightarrow \begin{cases} |a - c| \leq d - b \ldots\ldots\ldots (1') \\ \text{و} \\ |c - r| \leq s - d \ldots\ldots\ldots (2') \end{cases}$$

بالجمع نجد : $|a - c| + |c - r| \leq s - b$ وباستعمال خاصية القيمة المطلقة لمجموع عددين حقيقين فإن

$|a - r| = |a - c + c - r| \leq |a - c| + |c - r|$ اذا $|a - r| \leq s - b$ ومنه $(a, b)\,\mathcal{R}\,(s, r)$ أي أن

العلاقة $\mathcal{R}$ متعدية حسبما سبق فهي علاقة ترتيب.