Université Hamma Lakhdar Eloued
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
1ére année Master Matériaux en Génie Civil
Module Elasticité

année universitaire : 2020/2021

SERIE TD N° 02

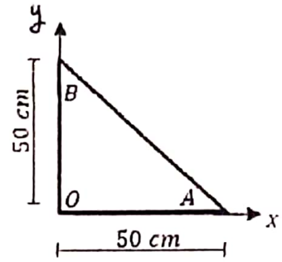
Les Déformations

EXERCICE 1

Dans un milieu continu, le changement de configuration de $X(x, y)$ en $X'(x', y')$ est décrit par la transformation suivante :

$$\begin{cases} x' = a\,y + x + b \\ y' = ax + y + b \end{cases}$$

avec a et b des constantes pour assurer la linéarité géométrique.



a) Calculer le champ de déplacements U;
b) Trouver les expressions des tenseurs de déformations ε et de rotations ω (commenter le résultat) ;
c) Calculer les déformations principales et les directions principales normalisées de ε ;
d) Déduire ensuite le glissement maximal ε_{max} ;
e) On considère le triangle OAB de la figure ci-contre et on pose $a = b = 2 \times 10^{-3}$:
 e.1) Calculer la surface finale du triangle OAB après déformations (commenter le résultat);
 e.2) Calculer et schématiser la forme finale du triangle OAB après déplacement ;
 e.3) Calculer et schématiser la forme finale du triangle $OABC$ après déformations ;

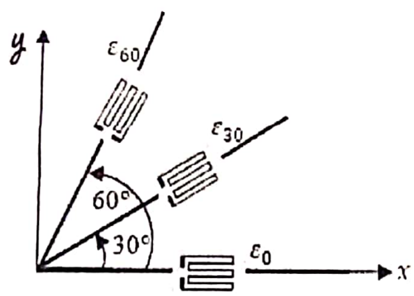
EXERCICE 2

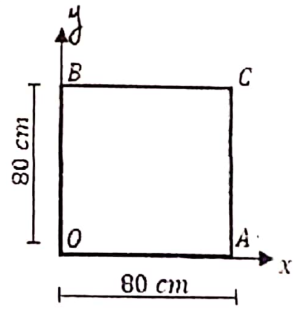
On considère une plaque carrée (OABC) de côté a = 80 cm, soumise à un champ de déformations uniforme. A l'aide d'un système de jauges (rosette) qui permet de mesurer les déformations unitaires, on lit les valeurs suivantes :

$$\varepsilon_0 = 60 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon_{30} = 75 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon_{60} = 105 \times 10^{-4}$$

Les indices désignent les angles par rapport à l'axe OX (0°, 30°, 60°).

a) Calculer les composantes du tenseur de déformations ε
b) Déduire ainsi les déformations principales et le glissement maximal du tenseur ε ;
c) Déduire ensuite la surface finale de la plaque (en cm^2).





EXERCICE 3

Soit le champ de déformations défini par le tenseur suivant :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & k(x+y) \\ k(x+y) & 0 \end{bmatrix}$$ (k constante pour assurer la linéarité géométrique).

Calculer les composantes du champ de déplacements U s'ils existent ;

Indication : à l'origine ($x = y = 0$) les déplacements sont nuls.

Solution Série TD N° 02

(Les Déformations)

Exercice N° 01

a) le champ de déplacement U :

$$U = X' - X \quad \begin{cases} u = x' - x \\ v = y' - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = ay + b \\ v = ax + b \end{cases}$$

b) - tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}(a + a) = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

- tenseur de rotation :

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_y = 0 \\ \omega_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \\ \omega_{yx} = -\omega_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

commentaire : $\begin{cases} \text{pour } \varepsilon : \text{il s'agit bien d'un glissement} \\ \text{pour } \omega : \text{la rotation n'existe pas (nulle)} \end{cases}$

c)- Déformations principales :

$$\det([\varepsilon] - \varepsilon[I]) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon & a \\ a & \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 = a^2 \Rightarrow \varepsilon = \pm a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_I = a \\ \varepsilon_{II} = -a \end{cases}$$

- Directions principales :

pour $\varepsilon_I = a \Rightarrow ([\varepsilon] - \varepsilon[I]) \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \{0\}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow n_x = n_y$ et on a : $n_x^2 + n_y^2 = 1$

$$\Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1 \quad 1 \rangle$$

de la même manière on déduit :

pour $\varepsilon_{II} = -a \Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1 \quad 1 \rangle$

d) le glissement maximal :

$$\varepsilon_{max} = \pm \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{max} = \pm a$$

e) $a = b = 2 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow \begin{cases} u = (2y+2) \times 10^{-3} \\ v = (2x+2) \times 10^{-3} \end{cases}$

et : $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$

e-1) Surface finale du triangle :

$$\frac{\Delta S}{S_I} = \frac{S_F - S_I}{S_I} = \text{trace}(\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$$

$$\Rightarrow S_F = S_I = \frac{1}{2}(50 \times 50) \Rightarrow S_F = 1250 \text{ cm}^2$$

Commentaire : pas de changement de surface.

e-2) calcul et schématisation du triangle après déplacement :

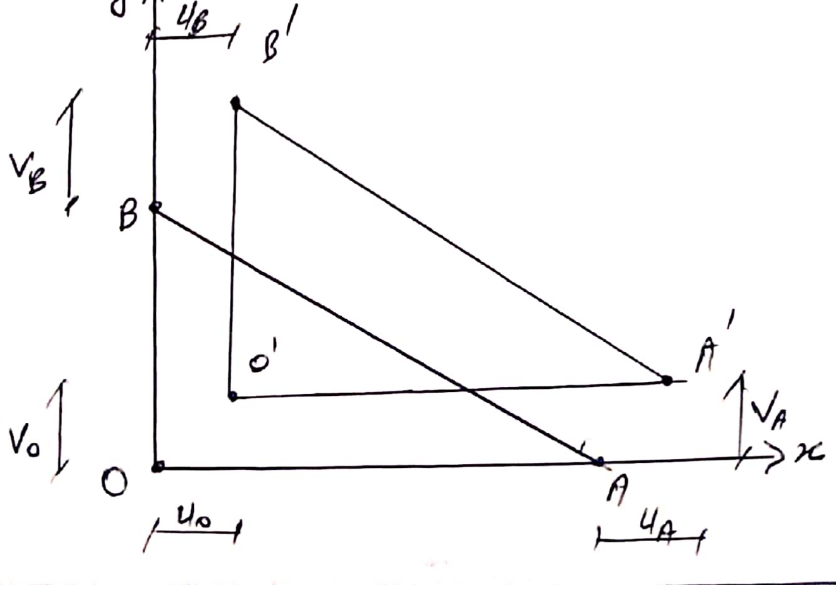
$O \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} x = 50 \\ y = 50 \end{pmatrix}$ cm ; $B \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 50 \end{pmatrix}$ cm.

<u>le point O :</u> $\vec{OO'} = \vec{OO} + \vec{u_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}002 \end{pmatrix}$ cm

<u>le point A :</u> $\vec{OA'} = \vec{OA} + \vec{u_A} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\times 10^{-3} \\ 102 \times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}002 \\ 0{,}102 \end{pmatrix}$ cm

<u>le point B :</u> $\vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{u_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 102\times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}102 \\ 50{,}002 \end{pmatrix}$ cm

* Schématisation :



e-3) Calcul et schématisation après déformation :

le point O : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{d\varepsilon_O} = \overrightarrow{OO} + [\varepsilon]\{OO\}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

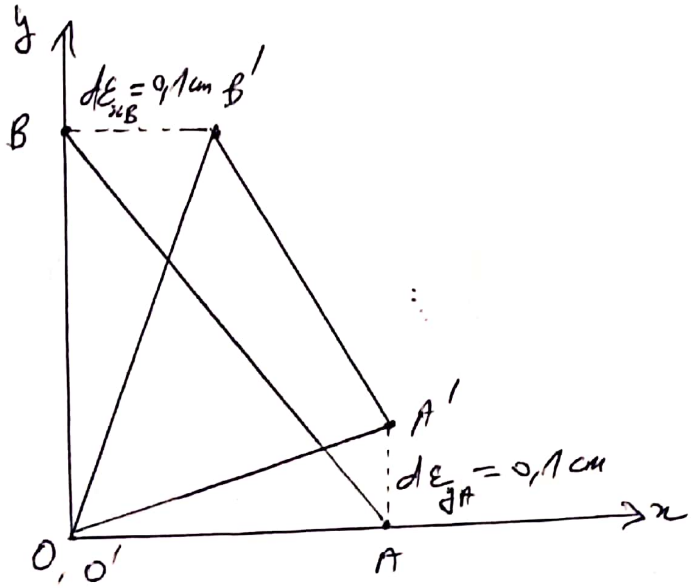
le point A : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{d\varepsilon_A} = \overrightarrow{OA} + [\varepsilon]\{OA\}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0,1 \end{Bmatrix}$$

le point B : $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{d\varepsilon_B} = \overrightarrow{OB} + [\varepsilon]\{OB\}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0,1 \\ 50 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Schématisation :



Exercice N° 02

Données : * $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$

* Direction $n = \langle \cos\theta \quad \sin\theta \rangle = \langle n_1 \quad n_2 \rangle$

* Vecteur déformation :

$$d\varepsilon = [\varepsilon]\{n\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 \\ \varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 \end{Bmatrix}$$

* la dilatation dans le sens n :

$\varepsilon_n = d\varepsilon \cdot n$ (produit scalaire)

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x n_1^2 + 2\varepsilon_{xy} n_1 n_2 + \varepsilon_y n_2^2$$

donc :

pour $\theta = 0°$: $\varepsilon_n = \varepsilon_0 = 60 \times 10^{-4}$ et $n = \langle 1 \quad 0 \rangle$

$\Rightarrow 60 \times 10^{-4} = \varepsilon_x (1)^2 + 2\varepsilon_{xy}(1 \times 0) + \varepsilon_y (0)^2$

$\Rightarrow \varepsilon_x = 60 \times 10^{-4}$

de la même manière :

pour $\theta = 30°$: $\varepsilon_n = \varepsilon_{30} = 75 \times 10^{-4}$ et $n = \langle \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \rangle$

$75 \times 10^{-4} = \varepsilon_x \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{4} \varepsilon_y$

$\Rightarrow 60 \times 10^{-4} = \sqrt{3}\, \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \varepsilon_y$ ----- (1)

pour $\theta = 60°$: $\varepsilon_n = \varepsilon_{60} = 105 \times 10^{-4}$ et $n = \langle \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$

$\Rightarrow 105 \times 10^{-4} = \varepsilon_x \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{xy} + \frac{3}{4} \varepsilon_y$

$180 \times 10^{-4} = \sqrt{3}\, \varepsilon_{xy} + \frac{3}{2} \varepsilon_y$ ------ (2)

$(1) \times 3 - (2) \Rightarrow \varepsilon_{xy} = 0$

on remplace ε_{xy} et ε_x par leurs valeurs dans (1) ou (2)

on trouve :

$$\varepsilon_y = 12 \times 10^{-3}$$

donc $\varepsilon = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$

b) - Déformations principales :

ε est un tenseur diagonal et comme :

$\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \Rightarrow \varepsilon_I = \varepsilon_y = 12 \times 10^{-3}$

et $\varepsilon_{II} = \varepsilon_x = 6 \times 10^{-3}$

- le glissement maximal :

$$\varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} = 3 \times 10^{-3}$$

c) Surface finale de la plaque :

$$\frac{\Delta S}{S_I} = \frac{S_F - S_I}{S_I} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$\Rightarrow S_F = S_I (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$S_I = 80 \times 80 = 6400 \text{ cm}^2$$

$$S_F = 6400 [1 + (6+12) \times 10^{-3}]$$

$$S_F = 6515,2 \text{ cm}^2$$

Exercice N° 03

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & k(x+y) \\ k(x+y) & 0 \end{bmatrix}$$

pour vérifier l'existance de u il faut que les équations de compatibilité soient vérifiées.
dans le cas des déformations dans le plan (x, y) on vérifie uniquement une seule équations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\, \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y}$$

on a : $\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0$

$\varepsilon_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} = k \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}}^{\,0} = 2\, \cancel{\frac{\varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y}}^{\,0}$$

donc u existe.

* calcul de $\vec{u} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \int \overset{=0}{\varepsilon_x}\, dx$

$\Rightarrow u = F_1(y)$

$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int \varepsilon_y\, dy$

$\Rightarrow v = F_2(x)$

On a aussi :

$$\varepsilon_{xy} = kx + ky \quad ----(1)$$

et $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

donc : $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x}\right)$

par analogie avec (1) :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = ky \Rightarrow f_1(y) = ky^2 + c_1$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = kx \Rightarrow f_2(x) = kx^2 + c_2$$

donc : $u = ky^2 + c_1$

$v = kx^2 + c_2$

pour $x = y = 0$ on a : $u = v = 0$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

donc : $u = ky^2$ et $v = kx^2$