Université Hamma Lakhdar Eloued
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
1ére année Master Matériaux en Génie Civil
Module Elasticité

année universitaire : 2020/2021

SERIE TD N° 01

Les Contraintes

Exercice N° 01 :

L'état des contraintes en un point M d'un milieu continu est donné dans le repère orthonormé (0,x,y,z), par le tenseur suivant :

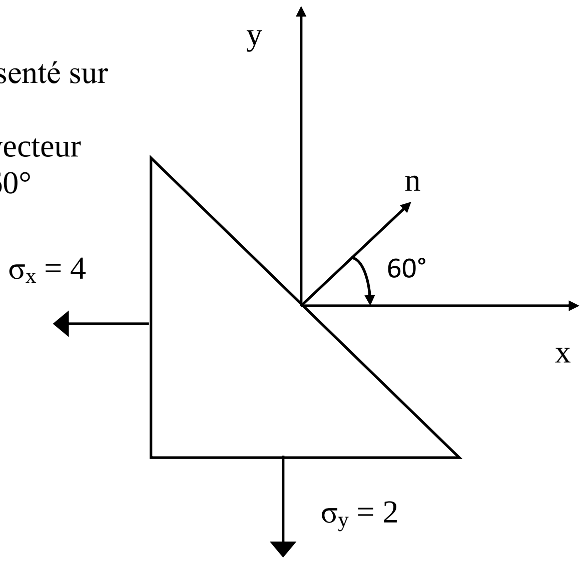
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} (Mpa)$$

a) Déterminer le vecteur contrainte T et ces composantes normale σ_n et tangentielle τ agissant sur :
   - Une facette de normale $n = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle$
   - Une facette perpendiculaire à l'axe z.

b) Commenter le résultat.

Exercice N° 02 :

Considérons l'état plan des contraintes au point M représenté sur la figure ci-dessous.
Déterminer les composantes normale et tangentielle de vecteur contrainte agissant sur une facette de normale n faisant 60° par rapport à l'axe x en utilisant :
- Un calcul direct
- La représentation par le cercle de Mhor
- Le vecteur contrainte



Exercice N° 03 :

L'état de contraintes en un point M d'un milieu continu est donné, dans une base orthonormée, par le tenseur suivant :

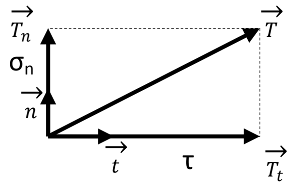
$$\sigma = \begin{bmatrix} K_1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} (Mpa)$$

a) Déterminer K_1 pour qu'il existe un plan sur lequel s'exerce un vecteur contrainte nul, donner le vecteur unitaire normal à ce plan.
b) Calculer ensuite les contraintes et les directions principales
c) En déduire la contrainte tangentielle maximale s'exerçant au point M.

Solution

Rappel :

La relation de chasles nous donne:



$\vec{T} = \overrightarrow{T_n} + \overrightarrow{T_t}$

$\quad = \sigma_n \vec{n} + \tau \vec{t}$

$|T|^2 = {\sigma_n}^2 + \tau^2$

Le vecteur contrainte est donné par :

T = σ n

$\sigma_n \longrightarrow$ produit scalaire : $\sigma_n = T.n$

$\tau \longrightarrow$ produit scalaire : $\tau = T.t$

Exercice N° 01 :

a) calcul de T , σ_n , τ pour :

- Une facette de normal : $n = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle$

$$T = \sigma\, n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} Mpa}$$

$$\sigma_n = T.n = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 3 \quad 3 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\sigma_n = 3\ Mpa}$$

$$\tau = \sqrt{|T|^2 - {\sigma_n}^2}$$

$$|T| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0} = 9$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{9 - (3)^2} = 0}$$

- Facette ⊥ à l’axe z :

$n = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \rangle$

$$T = \sigma\, n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} Mpa}$$

$\sigma_n = T.n = \langle 0 \quad 0 \quad -3 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\boxed{\sigma_n = -3\ Mpa}$

$|T| = 3 \qquad \Rightarrow \boxed{\tau = 0}$

b) commentaire :

sur les deux facettes :

Facette de normal : $n = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle \longrightarrow \tau = 0 \ \Rightarrow \ \sigma_n = 3\ Mpa$ c'est une contrainte principale

Facette de normal : $n = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \rangle \longrightarrow \tau = 0 \ \Rightarrow \ \sigma_n = -3\ Mpa$ c'est une contrainte principale

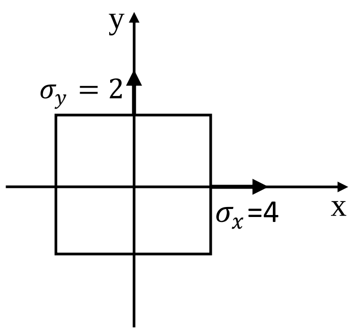
<u>Exercice N° 02 :</u>

L'état de contrainte en un point dans le plan (x , y) dans le cas général est donné par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

L'état de contrainte de la figure ci-après :

$\sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Mpa$



Calcul de σ_n et τ de vecteur contrainte agissant sur une facette de normale n faisant 60° par rapport à l'axe x en utilisant :

1) Un calcul direct

$\tau_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_1 = 4 \quad et \ \ \sigma_2 = 2$ des contraintes principales

D'où :

$\sigma_n = \sigma_1 cos^2\alpha + \sigma_2 sin^2\alpha$

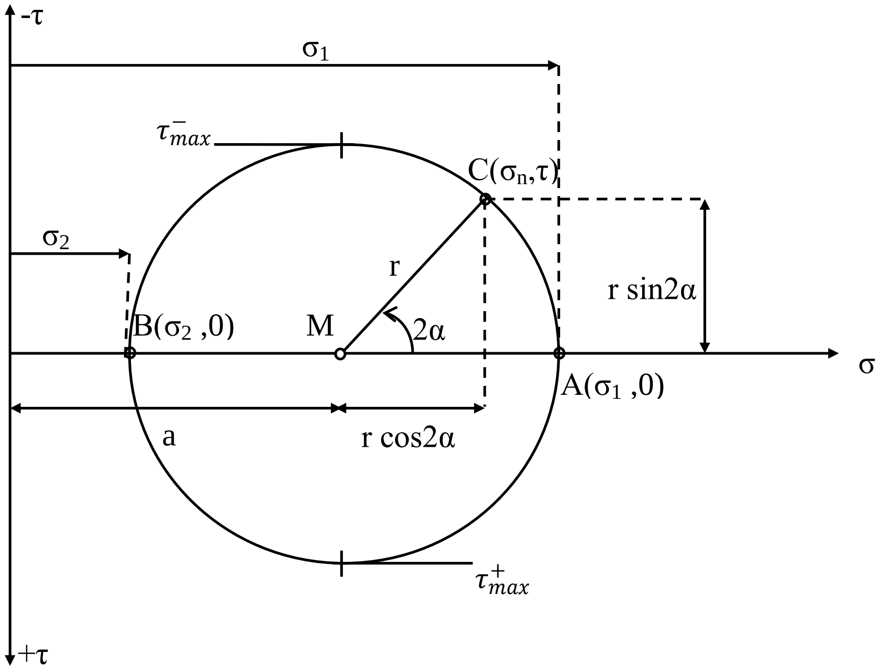
$\tau = (\sigma_2 - \sigma_1)\ cos\alpha\ sin\alpha$

Pour $\alpha = 60°$:

$\sigma_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \quad \sigma_n = 2{,}5 Mpa$

$\tau = (2-4)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{\sqrt{3}}{2} Mpa$

2) La représentation par le cercle de Mhor :

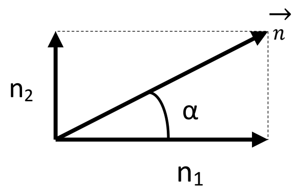


$$\begin{cases}\sigma_n = a + r\,cos2\alpha \\ \tau = -r\,sin2\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}\,cos2\alpha \\ \tau = -\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}\,sin2\alpha\end{cases}$$

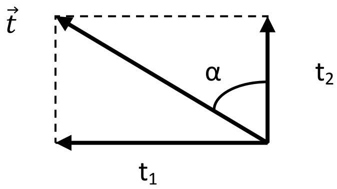
$$\begin{cases}\sigma_n = \frac{4+2}{2} + \frac{(4-2)}{2}\,cos120 \\ \tau = -\frac{(4-2)}{2}\,sin120\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_n = 2{,}5Mpa \\ \tau = -\frac{\sqrt{3}}{2}Mpa\end{cases}$$

3) Le vecteur contrainte:

$$n = \begin{Bmatrix}n_1 \\ n_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{Bmatrix}$$



$$t = \begin{Bmatrix}t_1 \\ t_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$



$$T = \sigma\, n = \begin{bmatrix}4 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix}Mpa$$

$$\sigma_n = T.n = \langle 2 \quad \sqrt{3}\rangle \begin{Bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix}\frac{1}{2} = 2{,}5Mpa$$

$$\tau = T.t = \langle 2 \quad \sqrt{3} \rangle \begin{Bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} Mpa$$

<u>Exercice N° 03 :</u>

a) valeur de K_1 pour que T = 0 :

$$T = \sigma\, n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 n_x + 2n_y + n_z = 0 & (1) \\ 2n_x + 0n_y + 2n_z = 0 & (2) \\ n_x + 2n_y + 0n_z = 0 & (3) \end{cases}$$

La relation (2) $\Rightarrow\ n_z = -n_x$

(3) $\Rightarrow\ 2n_y = -n_x$

(1) $\Rightarrow\ K_1 n_x - n_x - n_x = 0$

$\Rightarrow\ K_1 - 2 = 0$

$\Rightarrow\ \boxed{K_1 = 2}$

Le vecteur unitaire n :

$$K_1 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n_x + 2n_y + n_z = 0 & (1) \\ 2n_x + 2n_z = 0 & (2) \\ n_x + 2n_y = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow\ n_z = -n_x$

(3) $\Rightarrow\ n_y = -\frac{n_x}{2}$

Et en utilisant :

$$n_x^{\,2} + n_y^{\,2} + n_z^{\,2} = 1$$

On obtient :

$$n_x^{\,2} + \left(-\frac{n_x}{2}\right)^2 + (-n_x)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \quad n_x = \frac{2}{3}$$

Et : $n_y = -\frac{n_x}{2} = -\frac{1}{3}$

$n_z = -n_x = -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow n = \pm \langle \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \rangle$$

b) Les contraintes principales :

$det([\sigma] - \sigma[I]) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\sigma & 2 & 1 \\ 2 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\sigma)(\sigma^2 - 4) - 2(-2\sigma - 2) + (4+\sigma) = 0$
$-\sigma^3 + 2\sigma^2 + 9\sigma = 0$
$-\sigma(\sigma^2 - 2\sigma - 9) = 0$
$\sigma_1 = 0$
Et : $\sigma^2 - 2\sigma - 9 = 0$
$\Delta = 40 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{10}$
$\sigma_2 = 1 + \sqrt{10}$
$\sigma_3 = 1 - \sqrt{10}$

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 1 + \sqrt{10} \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

Les directions principales :
$\sigma_I = 1 + \sqrt{10} = 4{,}16\ Mpa$
On a :
$([\sigma] - \sigma[I])n = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4{,}16 & 2 & 1 \\ 2 & -4{,}16 & 2 \\ 1 & 2 & -4{,}16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2{,}16n_x + 2n_y + n_z = 0 & (1) \\ 2n_x - 4{,}16n_y + 2n_z = 0 & (2) \\ n_x + 2n_y - 4{,}16n_z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (3) \Rightarrow -3{,}16n_x + 5{,}16n_z = 0$
$\Rightarrow n_z = 0{,}61n_x$

$$2X(1) - (2): \begin{cases} -4{,}32n_x + 4n_y + 2n_z = 0 \\ 2n_x - 4{,}16n_y + 2n_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -6{,}32n_x + 8{,}16n_y = 0$
$\Rightarrow n_y = 0{,}77n_x$
Donc on aura :
$n_x^2 + (0{,}77n_x)^2 + (0{,}61n_x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_x = 0{,}71$
$n_y = 0{,}55$
$n_z = 0{,}43$
Donc pour $\sigma_I = 4{,}16\ Mpa \quad \Rightarrow \quad n = \pm\langle 0{,}71 \quad 0{,}55 \quad 0{,}43 \rangle$

De la même manière on obtient:

$\sigma_{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \pm\langle\frac{2}{3} \quad -\frac{2}{6} \quad -\frac{2}{3}\rangle$

$\sigma_{III} = -2{,}16 \quad \Rightarrow \quad n = \pm\langle 0{,}22 \quad -0{,}76 \quad 0{,}60\rangle$

c) la contrainte tangentielle maximale :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{4{,}16 - (-2{,}16)}{2} = 3{,}16Mpa$$