IV - Relations contraintes déformations

IV - 1 - Introduction :

- Dans les paragraphes précédentes on a developpé certaines notions statiques (Theorie des contraintes) et cinématiques (Theorie des déformations) qui sont nécessaire pour un developpement théorique du comportement physique des corps d'une façon générale et des corps solides élastiques plus particulièrement.

- Un corps solide est constamment soumis à des forces gravitationnelles, et s'il est en équilibre, il est supporté par d'autre forces. On sait d'après les équations d'équilibre que l'application de force exterieures sur un corps provoque l'apparition de contraintes à l'interieur de ce corps, c'est ce qu'on appelle l'étude statique.

- De plus les corps solides ne sont pas absolument rigides. par l'application de forces il peut y avoir changement dans la forme et la taille du corps. Lorsque ces changements sont considérables le corps en général ne reprend pas sa taille et sa forme originales après que les forces qui provoquent ces changements cessent d'agir. D'un autre côté, si ces changements ne sont pas importants, le corps peut reprendre sa forme et sa taille initiales. On dit dans ce cas que le corps est élastique.

- Ces changements de forme et de taille traduisent la théorie des déformations et représentent l'etude cinematique.

- Dans la théorie de l'élasticité, en plus de l'hypothèse de l'élasticité, le matériau est supposé : homogène et isotrope.

- Un corps est homogène si les propriétés physiques sont les même en tout point du corps, c'est à dire qu'elles sont indépendantes de la position du point.

- Si ces propriétés sont les même dans toutes les directions le corps est dit isotrope.

- En plus de ceci on suppose que les composantes de déplacements (u, v, w) permettant au corps de passer d'un état initial à un état final de déformation sont suffisamment petites pour rester dans la théorie des petites déformations.

IV. - 2 - Loi générale de HOOKE :

- C'est grâce à la propriété élastique des corps qu'on a pu relier la déformation à la contrainte. La première formulation de cette relation a été établie expérimentalement par HOOKE.

- Le cas le plus simple est celui d'une barre de section A tendue (ou comprimée) par une force F produisant une contrainte "σ" uniforme sur sa section. La loi de HOOKE, dans ce cas, peut s'écrire comme suit : $\boxed{\sigma = K.\varepsilon.}$ où :

K : une constante.

ε : déformation longitudinale.

- De ceci la généralisation de la loi de Hooke est immédiate.

- Si plus d'une composante de déformation existe et si le corps est élastique, alors en tout point du corps chaque composante du tenseur des contraintes est linéairement reliée aux composantes du tenseur des déformation.

soit :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\bullet\ \sigma_x = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz}\\
&\bullet\ \sigma_y = a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{yz}\\
&\bullet\ \sigma_z = a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{xz} + a_{36}\gamma_{yz}\\
&\bullet\ \tau_{xy} = a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{xz} + a_{46}\gamma_{yz}\\
&\bullet\ \tau_{xz} = a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{xz} + a_{56}\gamma_{yz}\\
&\bullet\ \tau_{yz} = a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned}
}
$$

- On remarque donc d'une façon générale qu'on a besoin de 36 constantes (coefficient a_{ij} , $i = 1, \dots 6$, $j = 1, \dots 6$) pour exprimer la loi de Hooke générale. ces coefficients a_{ij} sont des constantes indépendantes de x, y, z puisque le materiau est homogène.

- En réalité ces constantes ne sont pas indépendantes entre elles et que dans le cas d'un corps isotrope elles sont réduites uniquement à deux (02) constantes indépendantes.

- Considérons maintenant l'experience générale de Hooke en termes de constantes élastiques. -

- Supposons un petit élément cubique dont les face sont parallèles aux axes soumis uniquement à l'action d'une contrainte normale σ_x uniformément distribuée sur deux face opposées.

- Dans ce cas le rapport contrainte - déformation $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$ appelé : module d'élasticité. pour la plupart des corps rencontrés ce module est le même qu'il s'agit de traction ou de compression. pour celà on va l'appeler module d'élasticité ou module d'Young du corps et on le notera "E".

- L'experience montre que sous l'action de σ_x l'allongement (ou rétrécissement) unitaire de valeur $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ est toujours accompagné de retrécissement (ou allongement) dans les deux autres directions y et z de valeurs : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E}$ - où :

ν : désigne le coefficient de Poisson.

- De plus, toujours expérimentalement, la contrainte normale σ_x appliquée ne produira jamais de distorsions.

- Si maintenant le petit élément est soumis aux trois (03) contraintes normales σ_x, σ_y et σ_z les composantes de déformations sont déduites directement en appliquant le principe de supperposition (cas des petites déformations).

- Dans ce cas on aura :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

- De même une contrainte de cisaillement τ_{ij} qui agit seule sur une facette quelconque d'un corps, produira une déformation angulaire γ_{ij} reliée à cette contrainte de cisaillement par :

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}}$$

où :

G : est le module d'élasticité en cisaillement.

- On a en général :

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

- D'où les six (06) équations de l'étude physique seront :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

. On a :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right].$$

$$= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z + \sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z + \sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right].$$

$$= \frac{1}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu\sigma_x - 2\nu\sigma_y - 2\nu\sigma_z\right].$$

$$= \frac{1}{E}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right].$$

$$= \frac{1}{E}\left[(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{(1-2\nu)}{E}\theta.$$

_ Si on pose : $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ représentant la trace du tenseur des contraintes, et si on pose

_ $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ représentant la dilatation cubique on aura :

$$\boxed{\varepsilon_v = \theta\,\frac{(1-2\nu)}{E}}$$

_ Dans le cas d'une pression hydraustatique uniforme de valeur « p » on a :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3P \qquad \varepsilon_v = \frac{-3(1-2\nu)P}{E}.$$

qui représente la relation entre la dilatation cubique ε_v et la pression hydrostatique P.

_ La quantité $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ est alors appelée module de dilatation cubique.

_ On peut exprimer maintenant les contraintes en fonction des déformation :

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v \quad \text{.................. (A)}.$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \sigma_x - \sigma_z \quad \text{.................. (B)}.$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \sigma_x - \sigma_y \quad \text{--------} \quad (C).$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \sigma_y - \sigma_z \quad \text{--------} \quad (D).$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y + \nu\sigma_z \quad \text{--------} \quad (E).$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z \Rightarrow \sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x + \nu\sigma_z \quad \text{--------} \quad (F).$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \Rightarrow \sigma_z = E\varepsilon_z + \nu\sigma_x + \nu\sigma_y \quad \text{--------} \quad (G).$$

- Remplaçons (A), (B), et (C) dans (E) on trouve :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\left[\frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \sigma_x - \sigma_z\right] + \nu\left[\frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \sigma_x - \sigma_y\right].$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z + \frac{\nu E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y.$$

$$\sigma_x + \nu\sigma_x = E\varepsilon_x + \frac{2\nu E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

$$(1+\nu)\sigma_x = E\varepsilon_x + \frac{2\nu E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v - \nu\frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v.$$

$$(1+\nu)\sigma_x = E\varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1-2\nu)}\varepsilon_v.$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v}.$$

- De façon similaire on obtient :

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v.$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v.$$

Donc :

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_v + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

- En posant : $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- Ces équations sont appelées équation de LAME et les constantes λ et G sont appelées constantes de LAME.

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v) + (2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v) + (2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v)$

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\varepsilon_v + 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 3\lambda\varepsilon_v + 2G\varepsilon_v = (3\lambda + 2G)\varepsilon_v = \theta.$

_ En posant : $K = \dfrac{(3\lambda + 2G)}{3}$ on aura : $\theta = 3K\varepsilon_v.$

$$\boxed{\theta = 3K\varepsilon_v}$$

_ Cette équation exprime la relation entre la trace du tenseur des contraintes ($\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$) et celle du tenseur des déformations ($\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$).

_ K : est appelé module d'expansion volumique.

IV _ 3 _ Influence de la température :

_ On sait par expérience que sous l'effet de la température les éléments d'un corps se dilatent. Supposons un petit élément découpé dans un corps soumis à des changements de température. si la variation de température est continue a travers le volume du corps dans le petit élément la température peut être considérée comme uniforme.

_ Cette variation de température notée "ΔT" va surtout influencer le tenseur de déformation et les composantes de déformations qui prennent naissance dans le corps dûes à la température seront :

$$\boxed{\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \alpha\,\Delta T \quad \text{et} \quad \gamma_{xy}^T = \gamma_{xz}^T = \gamma_{yz}^T = 0}$$

. où

ΔT : variation de température.

α : coefficient de dilatation thermique du solide.

- Ainsi si un corps quelconque est soumis en plus des forces extérieures, à une variation de température, en appliquant le principe de supperposition. les équations représentent la loi de Hooke seront comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \Delta T \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha \Delta T \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

- En exprimant les contraintes en fonction des déformations en utilisent les coefficients de Lamé on aura :

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T. \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v - (3\lambda + 2G)\alpha\Delta T \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$