Solutions de la série N° 1

Exercice 1

1. *Pour la topologie discrète, c'est à dire $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, il est clair que tout sous ensemble est un ouvert, par ailleurs est une complémentataire d'un sous ensemble de $\mathcal{P}(X)$. Donc toute partie est ouvete et fermée en même temps. Si $A \subset X$, $\overline{A} = \mathring{A} = A$.*
2. *Pour la topologie grossière, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ qui contient deux élément, qui sont fermés et ouvert en même. teps.*

Exercice 2

1. $$d(x,A) = \inf_{z\in A} d(x,z) \leq \inf_{z\in A} \left[d(x,y) + d(y,z)\right]$$
$$= d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z) = d(x,y) + d(y,A),$$
ce qui implique
$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$
Changeons le role de x et y, on arrive à
$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$
2. *La fonction $f : (X,d) \to (\mathbb{R}_+, |.|)$, definie par $f(x) = d(x,A)$ vérifie*
$$|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$
Donc elle est continue.
3. $$x \in \overline{A} \iff B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, pour\ tout \varepsilon > 0$$
$$\iff \exists y \in A, d(x,y) < \varepsilon$$
$$\iff \inf_{y\in A} d(x,y) = 0$$
$$\iff d(x,A) = 0.$$

Exercice 3

1. *Il suffit de prendre $m = n+1$ dans la définition suivante :*
$$\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$
ce qui implique $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Pour la réciproque, il suffit de remarquer le contre exemple suivant : la suite $x_n = \ln(n)$ $(n \geq 1)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ vérifie
$$\lim_{n\to\infty} |\ln(n+1) - \ln(n)| = \lim_{n\to\infty} |\ln(\frac{n}{n+1})| = 0,$$
mais la suite (x_n) n'est pas da Cauchy.

2. *On montre par une seule implication, car l'autre est clair, en effet utilisant l'absurde supposons (x_n) n'est pas de Cauchy, alors*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n, m > k, d(x_n, x_m) \geq \varepsilon,$$

alors

$$\varepsilon \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, x_m).$$

Si $d(x_n, x_k) = \max\{d(x_n, x_k), d(x_k, x_m)\}$, alors pour tout $k \geq 0$, on a

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \leq d(x_n, x_k).$$

On va construire une sous suite de (x_n), soit $n_0 = \min\{n > 0, d(x_n, x_0) \geq \varepsilon'\}$ et pour tout $k \geq 1$, soit $n_k = \min\{n > n_{k-1}, d(x_n, x_{n_{k-1}}) \geq \varepsilon'\}$. Donc (x_{n_k}) est une sous-suite de (x_n) vérifie $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \geq \varepsilon$, ce qui contradicte l'hypothèse.
Si $d(x_n, x_k) = \max\{d(x_n, x_k), d(x_k, x_m)\}$, en changeant le rôle de n et m.

3. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n, m \geq n_0$, on a*

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{i=m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \infty,$$

donc $d(x_n, x_m) \to 0$.

Exercice 4 1. *Il est clair.*

2. *Puisque $X =]0, \infty[$ n'est pas fermé, alors n'est pas complet.*

3. *Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X, alors on*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0; |\ln(n) - \ln(m)| < \varepsilon,$$

alors la suite (y_n) definie par $y_n = \ln(x_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, donc elle est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0; |y_n - l| < \varepsilon,$$

c'est à dire

$$|\ln(n) - ln(e^l)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, (x_n) converge vers e^l.

Exercice 5 1. *Soit (x_n) une suite de Cauchy, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0; |x_n^3 - x_m^3| < \varepsilon,$$

ce qui implique la suite $y_n = x_n^3$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers un réel l, et comme l'application $f(x) = x^3$ est surjective, alors (x_n) est convergente vers $\sqrt[3]{l}$. Par conséquent $(\mathbb{R}, d)$ est complet.

2. *Il n'est pas complet.*

3. *Il est complet.*

Exercice 6 1. *On va montrer premièrement que* $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$, *en effet on a*

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T^n x_0, T^n x_0) \leq \alpha_n d(Tx_0, x_0) \to 0,$$

car $\alpha_n \to 0$. *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$, *pour tout* $n > m \geq n_0, onad(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=n}^{m-1} d(T^i x_0, T^i(Tx_0) \leq d(x_i, Tx_i) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \to 0.Donc(x_n)$ *est Cauchienne.Puisque* X *est complet,* (x_n) *est convergente vers* $x \in X$.

2. *L'étape suivante est de prouver que* x *est un pointv fixe pour* T, *alors on a*

$$d(x_{n+1}, Tx) = d(T(T^n x_0), Tx) \leq \alpha_1 d(T^n x_0, x)$$

$$\leq \alpha_1 d(x_n, x),$$

en passant à la limite on obtient,

$$d(x, Tx) \leq lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

par conséquent, $Tx = x$.
Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux point fixe x *et* x^*, *on a*

$$d(x, x^*) = d(T^n x, T^n x^*) \leq \alpha_n d(x, x^*),$$

en passant à la limite, on obtient $d(x, x^*) = 0$, *ce qui implique* x *est unique.*