Université El Oued
Faculté de Sciences Exactes
Dépt.Maths

Niv:$1^{\text{ère}}$ A. Master
Module: Top.Gén
A. Univ:2020-2021

Solutions de la série d'exercices N° 2

Exercice 1

Soit $y \in f(\cap_{n\geq 0} F_n)$, *alors il existe* $x \in \cap F_n$,
c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$, *alors* $f(x) \in f(F_n)$. *Donc* $y \in \cap f(F_n)$.
Réciproquement, soit $y \in \cap_{n\geq 0} f(F_n)$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $x_n \in F_n$, *tel que* $y = f(x_n)$.
Puisque X *est compact, alors il exite une sous suite* (x_{n_k}) *qui converge vers un point* $x \in \cap_{n\geq 0} F_n$, *car* $F_n \to F_\infty = \cap_{n\geq 0} F_n$. x *est un point d'adhérence de* (x_n).
Maintenant, on va montrer que $y = f(x)$, *en effet soit* V *un voisinage de* $f(x)$, *comme* f *est continue alors il exists un voisinage* $B(x,\varepsilon)$ *de* x, *tel que* $f(B(x,\varepsilon)) \subset V$, *par définition (d'un point d'adhérence d'une suite) on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, x_n \in B(x,\varepsilon),$$

alors $f(x_n) \in f(B(x,\varepsilon)) \subset V$, *donc* $y \in V$, *pour tout voisinage de* $f(x)$.
Par conséquent, $y = f(x) \in f(\cap_{n\geq 0}\ F_n)$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on pos* $K_n = f^n(X) = f \circ f \circ f \circ \ldots . \circ f(X)$. K_n *est compact (l'image d'un compact par une fonction continue), de plus on a*

$$K_{n+1} = f(f^n(X)) = f^n(f(X)) = f^n(X) = K_n.$$

Donc (K_n) *est suite décroissante de compacts, ce qui donne* $K = \cap_{n\geq 0} K_n$ *est compact et non vide.*
L'exercice précédent nous donne

$$f(K) = f(\cap_{n\geq 0} K_n) = \cap_{n\geq 0} f(K_n) = \cap_{n\geq 0} K_{n+1} = K.$$

Exercice 3

1. *Pour chaque* x *fixé dans* X *soit* $f : A \to \mathbb{R}_+$ *une fonction définie par* $f(y) = d(x,y)$, f *est continue sur* A *qui est compact, alors elle atteint ses bornes, donc il existe* $a \in A$ *tel que* $d(x,A) = d(a,x)$.
2. $g : A \times B \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $g(x,y) = d(x,y)$ *est continue sur* $A \times B$.

Exercice 4

1. *Soit* (x_n, y_n) *une suite dans* G *qui converge vers* (x,y), *alors* $x_n \to x$ *et* $y_n = f(x_n) \to y$. *Puisque* f *est continue, donc* $f(x_n) \to f(x)$ *ce qui implique* $y = f(x)$.
2. *Soit* $(x_n) \subset X$ *qui converge vers* x, *alors* $f(x_n) \subset Y$ *qui est compact, alors il existe une sous suite* $(f((x_{n_k})))$ *converge vers* y, *puisque* G *est fermé alors* $(x,y) \in G$, *c'est à dire* $y = f(x)$.
   Par l'absurde, si f *n'est pas continue, i.e.,* $f(x_n)$ *ne converge pas vers* $f(x)$, *alors par définition il existe un voisinage* V *de* $f(x)$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a* $f(B(x,\varepsilon)) \not\subset V$, *i.e.,il existe une suite* (x_n) *converge vers* x *et vérifie* $f(x_n) \notin V$, *donc pour toute sous-suite* (x_{n_k}), *on a* $f(x_{n_k}) \not\subset V$, *ce qui contradicte* $f(x_{n_k}) \to f(x)$.

3. *Soit A une partie fermée de X, comme X est compct alors A est compacte ce qui implique la compacité de son image par f (continue). Donc $f(A)$ est fermé.*

Exercice 5

1. *Soit $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$, alors $f(x_n) \to f(x)$, mais $f(x_n) = x_n$. Donc $x = f(x)$ (l'unicité de la limite).*
2. *La fonction $g : X \to$ définie par $g(x) = d(x, f(x))$ est continue, donc il existe $x_0 \in X$ tel que $0 < g(x_0) = d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, f(x))$, pour tout $x \in X$.*

Exercice 6

1. *Soit $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ muni de la distence induite par $\mathbb{R}$, X est compact. On définit $f : X \to X$, par $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$.*
   On a
   $$d(f(0), f(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = d(0, \frac{1}{n})$$
   $$d(f(\frac{1}{n}), f(\frac{1}{m})) = \frac{m-n}{nm+n+m+1} < \frac{m-n}{nm} = d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}), \quad m > n.$$
   Par l'absurde, s'il existe $k \in [0, 1)$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Alors pour $x = \frac{1}{n}$ et $y = 0$, on a
   $$d(f(\frac{1}{n}), f(0)) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{n},$$
   ce qui implique $k \geq \frac{n}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quand $n \to \infty$, on obtient $k \geq 1$, ce qui est une contradiction.
2. *Soit $g : x \mapsto d(x, f(x))$, g est continue sur un compact X, alors il existe x_0 tel que $\inf_{x \in X} g(x) = g(x_0)$. Si $x_0 \neq f(x_0)$, alors*
   $$g(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = g(x_0),$$
   ce qui est une contradiction, car pour tout $x \in X$, $g(x_0) \leq g(x)$. Donc x_0 est un point fixe.
   Pour l'unicité, soit x_1 un autre point fixe, alors on a
   $$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1) < d(x_0, x_1),$$
   donc le point fixe est unique.