Solutions de la série d'exercices N° 3

Exercice 1

1. *Soit* $f_n(t) = (1 + \frac{t}{n})^n$, *on définit une fonction* $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, g *est dérivable et* $g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$, *donc* g *est croissante et* $g(0) = 0$, *alors pour tout* $x \geq 0$, *on a* $g(x) \geq 0$. *Par conséquent,*
$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}.$$
2. *Pour tout* $s \geq 1$ *soit* $h(s) = s\ln(1+\frac{t}{s})$, *alors on a* $h'(s) = \ln(1+\frac{t}{s}) - \frac{t}{t+s} \geq 0$, *donc* h *est croissante.*
3. *On sait que* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{t}{n})^n = e^t$ *et puisque* $(f_n(t))$ *est convergente uniformément vers* t^t, *alors on a*
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+\frac{t}{n})^n dt = \int_0^1 e^t dt = e - 1.$$

Exercice 2

1. *On a* $f_n(t) = \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} \to e^t$, *et*
$$f_{n+1}(t) - f_n(t) = \frac{t(e^t - e^{-t})}{(n+t)(n+t+1)} > 0,$$
donc (f_n) *est croissante.*
2. *La suite* $g_n(t) = (t^2+1)f_n(t)$ *conferge simplement sur* $[0,\infty[$ *vers* $(t^2+1)e^t$. *Donc d'après le théorème de Dini la suite* (g_n) *est convergente uniformément et on a*
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (t^2+1)f_n(t)dt = \int_0^1 (t^2+1)e^t dt = 2e - 3.$$

Exercice 3

1. *En utilisanr le théorème d'acroissements finis sur* $[x,y]$ *pour tout* $x, y \in [a,b]$, *alors on a*
$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq K,$$
ce qui donne
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$
Donc la famille $\{f_n, n \geq 0\}$ *est équicontinue, alors* (f_n) *converge uniformément vers* f.

2. *La suite (f_n) converge simplement vers t sur t sur $[-M, +M]$ et on a*

$$f_n'(t) = \frac{n^2}{(t+n)^2} e^{\frac{t}{t+n}}.$$

Soit $n_0 > M$, alors pour tout $n \geq n_0$ et $t \in]-M, M[$, on a

$$f_n'(t) \leq \frac{e}{(1 - \frac{M}{n})^2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n'(t) \leq e,$$

donc (f_n) est convergente uniformément.

Exercice 4

Supposons $\mathcal{H} = \{f, f \in C(X, Y)\}$ une famille équicontinue et X est compact.
Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{H}$, alors pour tout $x \in X$ il existe $\delta(x, \varepsilon) > 0$ tel que

$$d(x, x') < \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon,$$

pour tout $x' \in X$ et $f \in \mathcal{H}$, puisque X est compact il existe $r > 0$ tel que pour toute boule de rayon r contenue dans au moins $B(x, \delta_{x,\varepsilon})$.
Soient $x, z \in X$, , alors il existe $a \in X$ tel que $x, z \in B(a, \delta_{a,\varepsilon})$, d'où pour tout $f \in H$, on a $d(f(a), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(a), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui implique $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$.
De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ et $d(x, z) < r$ implique $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$, pour tout $f \in H$. Par conséquent, H est uniformément équicontinue.

Exercice 5

1. *On a $\mathcal{H} = \{K(f), f \in B\}$, où $K(f(t)) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds$. Posons $B = \{f \in C([a, b]), \|f\| \leq M\}$. Soient $t_1, t_2 \in [a, b]$, alors*

$$|Kf(t_1) - Kf(t_2)| \leq \int_a^b |f(s)|(G(t_1, s) - G(t_2, s)|ds$$

$$\leq M \int_0^b |G(t_1, s) - G(t_2, s)|ds.$$

Puisque G est continue sur un compact, alors elle est uniformément continue, donc pour $t_1 \to t_2$ et $s_1 \to s_2$, on a $|G(t_1, s_1) - G(t_2, s_2)| < \varepsilon. Parconsquent, |Kf(t_1) - Kf(t_2)| \to 0$. C'est à dire $\mathcal{H}$ est uniformément continue.