
Solution d’Exercices

(Anneaux et Module)

Exercice 1

1. On suppose I premier. Soient $x,\ y\ \in A/I$ tels que $xy = 0_{A/I}$, et soient $a,\ b\ \in A$, tels que $\overline{a} = x$ et $\overline{b} = y$. Alors $\overline{ab} = 0_{A/I}$ et donc $ab \in I$. Comme I est premier on a $a \in I$ ou bien $b \in I$, c’est-à-dire $x = \overline{a} = 0_{A/I}$ ou bien $y = \overline{b} = 0_{A/I}$. Cela montre que A/I est intègre. Réciproquement on suppose A/I intègre. Soient $a \in A$ et $b \in A$ tels que $ab \in I$. Alors dans le quotient A/I on obtient $0_{A/I} = \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$. Mais comme A/I est intègre on obtient $\overline{a} = 0_{A/I}$ ou bien $\overline{b} = 0_{A/I}$, c’est-à-dire $a \in I$ ou bien $b \in I$.

2. On suppose I maximal. Soit $x \in A/I$ non nul et $a \in A$ tel que $\overline{a} = x$. Alors $a \notin I$. Et comme I est maximal l’idéal $(a) + I$ qui contient strictement I est égal à A tout entier, donc contient 1_A. En particulier il existe $i \in I$ et $\alpha \in A$ tels que $1_A = \alpha a + i$. En réduisant modulo I on obtient $1_{A/I} = \overline{\alpha}\ \overline{a} = \overline{\alpha}x$ ce qui montre que $x = \overline{a}$ est inversible. L’anneau A/I est donc bien un corps. Réciproquement on suppose que A/I est un corps. Soit J un idéal de A contenant strictement I. montrons que $J = A$. Soit $j \in J$ n’appartenant pas à I. Alors dans A/I son image $\overline{j}$ est inversible. Il existe donc $i \in I$ et $\alpha \in A$ tels que $\alpha j + i = 1_A$. Mais comme $I \subset J$ il suit $1_A \in J$ c’est-à-dire $J = A$.

Exercice2

1. On suppose que A est un corps. Soient $a,\ b$ dans A tels que $ab = 0$. Si $a \neq 0$ alors a est inversible et on obtient $b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$. Si $b \neq 0$ alors b est inversible et on obtient $a = abb^{-1} = 0b^{-1} = 0$. Cela montre que A est intègre.
2. On suppose A intègre et fini. Soit $a \in A$ tel que $a \neq 0$. Alors l’endomorphisme de groupe de A défini par $x \mapsto ax$ est injectif puisque $ax = 0 \iff x = 0$. Comme A est fini ce morphisme est donc aussi surjectif. En particulier il existe $\alpha \in A$ tel que $a\alpha = 1_A$. Cela montre que A est un corps.

Exercice 3

1. Clairement $0 \in N(A)$. Soient $a \in N(A)$ et $\alpha \in A$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Comme A est commutatif il vient $(\alpha a)^n = \alpha^n a^n = 0$. Donc $\alpha a \in N(A)$. Montrons que $N(A)$ est un sous-groupe. Soient $a, b \in N(A)$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $a^n = b^m = 0$. Par le binôme de Newton (valable dans tout anneau commutatif) on obtient

$$(a + (-b))^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{n+m} \binom{n+m}{j} a^j b^{n+m-j}$$

Mais si $j \leq n$ alors $a^j = 0$ tandis que si $j < n$ alors $b^{n+m-j} = 0$. Chacun des sommant est nul et donc $a - b \in N(A)$.

2. Comme $N(A)$ est un sous-groupe cela revient à montrer que $1 - u \in A^\times$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$. On a

$$1 = 1 - u^n = (1-u) \sum_{j=0}^{n-1} u^j.$$

Donc $1 - u \in A^\times$.

Exercice 4

On doit aussi supposer $M \neq \{0\}$. Prenons $x \neq 0$ et $x \in M$. Alors le sous-module engendré par x est non nul donc égal à M tout entier. On obtient donc un morphisme surjectif $\phi_x \colon \mathbb{Z} \longrightarrow M$ en posant $\phi_x(k) = kx$. Par factorisation M est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ker\phi_x$ et il reste à vérifier que $\ker\phi_x$ est un idéal maximal. Mais comme M est simple $\mathbb{Z}/\ker\phi_x$ n'a pas de sous-module non triviaux c'est-à-dire pas d'idéaux non triviaux. Cet anneau quotient est donc un corps, ce qui montre que $\ker\phi_x$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5

On a l'homomorphisme canonique suivant :

$\varphi\colon A \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$ défini par $(\varphi(a))(m) = a.m$

Montrons que $\mathrm{Ann}_A(M) = \ker\varphi$. Soit $x \in \mathrm{Ann}_A(M)$. Alors pour tout $m \in M$ on a $0 = x.m = (\varphi(x))(m)$. Donc $x \in \ker\varphi$. Réciproquement soit $x \in \ker\varphi$. Alors l'application $m \mapsto x.m$ est l'endomorphisme nul de M. Donc pour tout $m \in M$ on a $x.m = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ann}_A(M)$. On obtient ainsi en toute généralité un morphisme injectif $f\colon A/\mathrm{Ann}_A(M) \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$. Montrons que si en outre M est monogène alors ce morphisme est surjectif. Soit $f \in \mathrm{End}_A(M)$ et soit $m \in M$ tel que $M = Am$. Alors $f(m) \in M$ et donc il existe $\lambda \in A$ tel que $f(m) = \lambda.m$. Mais alors pour tout $x = \mu m \in M$ on a $f(x) = f(\mu.m) = \mu.f(m) = \mu.(\lambda.m) = \lambda.(\mu.m) = \lambda.x$. Ce qui montre que $f = \varphi(\overline{\lambda}) \in \mathrm{Im}\,\varphi$. On a donc bien isomorphie entre $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ et $\mathrm{End}_A(M)$. Cela démontre aussi que $\mathrm{End}_A(M)$ est commutatif (puisque A l'est).

Exercice 6

On doit supposer $A \neq \mathbb{K}$ Soient $x = a/b$ et $y = c/d$ deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts (avec a, b, c d $\in A$, $b \neq 0$ et $d \neq 0$). Alors $(bc).x = ac = (da).y$ et donc $(bc).x - (da).y = 0$. Puis que x et y sont distincts, l'un deux au moins est non nul et donc bc ou da est non nul. Donc x et y sont linéairement dépendant. Pour cette raison, si $\mathbb{K}$ est libre alors c'est un module libre de rang 1. Montrons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit $x \in \mathbb{K}$ tel que $Ax = \mathbb{K}$ et soit $y \in A$ tel que $y \neq 0$ et $y \notin A^\times$. Alors Pour tout a dans A on a $ay \neq 1$ et donc $ax \neq x/y$. Donc x/y n'est pas dans le module engendré par x, ce qui contredit $Ax = \mathbb{K}$.

Exercice 7

Les vecteurs $e_1 = (2, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$ sont clairement linéairement indépendants. Montrons par l'absurde qu'on ne peut pas les compléter en une base. Soit $e_3 = (x, y, z)$ dans $\mathbb{Z}^3$ tels que e_1, e_2, e_3 soit une base de $\mathbb{Z}^3$. Alors il existe λ, μ, ν dans $\mathbb{Z}$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (1, 0, 0)$. Cela conduit au système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2\lambda + \nu x = 1 \\ \mu + \nu y = 0 \\ \nu z = 0 \end{cases}$$

En regardant la troisième équation on obtient $\nu = 0$ ou $z = 0$. Si $\nu = 0$ alors on trouve sur la première équation $2\lambda = 1$ ce qui est absurde. Si $z = 0$ alors tous les e_i sont dans le sous-module (strict) engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Dans tous les cas $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas une base.

On remarque que $(2, 0, 0) = 2(1, 0, 0)$ c'est-à-dire que le vecteur $(2, 0, 0)$ n'est pas indivisible. Dans les modules libres de rang finis sur les anneaux principaux les vecteurs d'une base sont indivisible, et réciproquement.

On note $\varepsilon_1 = (2, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (3, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$ et $\varepsilon_4 = (0, 0, 1)$ de sorte que $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ on a $(x, y, z) = x(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + y\varepsilon_3 + z\varepsilon_4$ donc S engendre $\mathbb{Z}^3$. Par l'unicité du rang des modules libres si il est possible d'extraire une base de S ce sera en enlevant un seul vecteur. En outre ε_1 et ε_2 sont linéairement dépendant car ils vérifient $3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = 0$. Donc si il est possible d'extraire une base de S ou bien $S \backslash \{\varepsilon_1\}$ est une base ou bien $S \backslash \{\varepsilon_2\}$ est une base. Mais $S \backslash \{\varepsilon_2\}$ contient les vecteurs e_1 et e_2 du début de l'exercice donc n'est pas une base. En reprenant exactement le même raisonnement on peut voir qu'il n'est pas possible de compléter $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ en une base. On a donc épuisé toutes les possibilités : S ne contient pas de base.

Exercice 8

Soit M et N deux sous-modules non nuls de $\mathbb{Z}$, et soit $m \in M$ et $n \in N$ non nuls. Alors $0 \neq mn \in M \cap N$. Donc $\mathbb{Z}$ n'admet pas de facteurs directs non triviaux.