

---

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

---

Généralités sur les fluides

Statique des fluides

Cinématique des fluides

Dynamique des fluides parfaits

Dynamique des fluides réels

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Généralités.....</b>	<b>2</b>
Propriétés physiques des fluides .....	2
Forces subies par un fluide .....	5
<b>Statique des fluides .....</b>	<b>7</b>
Équation fondamentale de la statique des fluides .....	7
Application aux fluides incompressibles : hydrostatique .....	9
Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques).....	11
Application aux fluides compressibles .....	15
Problème général de statique des fluides .....	17
<b>Cinématique des fluides.....</b>	<b>18</b>
Description du mouvement .....	18
Conservation de la masse.....	21
Étude locale du champ de vitesse : rotation et déformation.....	24
Types particuliers d'écoulement .....	29
<b>Dynamique des fluides parfaits .....</b>	<b>31</b>
Bilan de quantité de mouvement : équation d'Euler .....	31
Théorème de Bernoulli et ses applications .....	37
Bilan global des quantités de mouvement .....	43
<b>Dynamique des fluides réels .....</b>	<b>48</b>
Viscosité. Lois de comportement.....	48
Dynamique des fluides visqueux incompressibles : équation de Navier Stokes ...	50
Écoulements laminaires et écoulements turbulents. Pertes de charge.....	56

## Propriétés physiques des fluides

### Qu'est-ce qu'un fluide ?

C'est un milieu matériel :

- continu ; ses propriétés varient d'une façon continue, propriétés considérées comme caractéristiques non d'un point sans volume mais d'une **particule**, volume de fluide extrêmement petit autour d'un point géométrique ; par exemple, on affecte à chaque point P, pour chaque instant t, une **masse volumique  $\rho$**  représentative de la population des molécules intérieures au volume dV de la particule ;
- déformable (il n'a pas de forme propre) ; les molécules peuvent facilement glisser les unes sur les autres ; cette mobilité fait que le fluide prendra la forme du récipient qui le contient ;
- qui peut s'écouler ; mais tout fluide peut s'écouler plus ou moins facilement d'un récipient à un autre ou dans une conduite : des forces de frottements qui s'opposent au glissement des particules de fluide les unes contre les autres peuvent apparaître car **tout fluide réel** a une **viscosité**.

L'état fluide englobe deux des trois états de la matière : le liquide et le gaz. Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.

#### Particule fluide

La particule fluide est une portion de fluide à laquelle correspondent, à un instant t, une vitesse, une pression, une température, une masse volumique, etc. Le volume envisagé est très petit à notre échelle, mais doit contenir encore un très grand nombre de molécules pour que les chocs moléculaires puissent être remplacés par la pression moyenne. Les particules fluides ne sont pas des particules microscopiques sur lesquelles le mouvement brownien dû à l'agitation moléculaire est très perceptible ; la notion de continuité repose sur celle de la compacité du réseau moléculaire intrinsèquement lacunaire<sup>1</sup>.

Chaque particule d'un fluide est soumise à des **forces de volume** qui sont des forces à longue distance induites par des champs de forces - le plus banal étant le champ de pesanteur - et à des **forces de surface**, forces de contact transmises à la surface de la particule par les éléments environnants. On peut dire qu'un fluide est un corps homogène et continu dont les diverses particules peuvent se déplacer ou se déformer sous l'action d'une force très faible.

<sup>1</sup> Un nombre sans dimension utile dans cette discussion est le nombre de Knudsen Kn, rapport du libre parcours moyen l (distance moyenne que parcourt une molécule entre deux chocs successifs avec ses molécules voisines) à la longueur de référence L caractéristique de l'écoulement considéré (soit le diamètre du tube, s'il s'agit d'un fluide s'écoulant dans un tube, soit le diamètre d'un orifice pour l'éjection d'un fluide, soit de la corde d'un profil d'aile, etc.). À partir de résultats expérimentaux, il apparaît que si  $Kn < 0,02$  le fluide est un milieu continu. C'est ce domaine qui nous intéresse ici. Cela exclut les gaz à basse pression.

# Masse volumique

## Définition

Considérons un milieu continu fluide à l'intérieur d'un volume  $V$ , et soit  $dV$  un volume élémentaire défini autour d'un point  $M$  du volume  $V$ . Désignons par  $dm$  la masse de fluide contenue dans le volume  $dV$ . Le rapport  $\rho = dm/dV$  représente la masse volumique moyenne du fluide contenu dans le volume  $dV$ .

On définit la **masse volumique au point  $M$**  par :

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV} \quad (\text{kg/m}^3)$$

La masse  $m$  du fluide contenue dans le volume  $V$  est alors :  $m = \iiint_V \rho dV$ .

La densité d'un liquide est définie par :  $d = \rho_{\text{fluide}}/\rho_{\text{eau}}$  (sans unité).

Ordres de grandeur des masses volumiques (à 20 °C)

Eau (le standard liquide)	1 000 kg/m <sup>3</sup>
Huile	914 kg/m <sup>3</sup>
Mercure	13 400 kg/m <sup>3</sup>
Air (le standard gazeux)	1,2 kg/m <sup>3</sup> $\ll \rho_{\text{eau}}$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;  $\rho_{\text{gaz}} \ll \rho_{\text{liquide}}$

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour un gaz parfait, l'équation d'état donne  $\rho = \frac{p}{rT}$ , où  $r$  est la constante massique des gaz parfaits ( $r = \frac{R}{M}$  avec  $R = 8,314 \text{ Jmole}^{-1}\text{K}^{-1}$  et  $M$  masse molaire du gaz).

# Compressibilité

La propriété physique qui permet de faire la différence entre un liquide et un gaz est la **compressibilité**. Un **liquide** est un fluide occupant un volume déterminé, ou du moins ce volume ne peut varier que très peu, et seulement sous l'action de fortes variations de pression ou de température. Un **gaz**, au contraire, occupe toujours le volume maximal qui lui est offert : c'est un fluide essentiellement compressible (ou expansible).

Définition de la compressibilité

La compressibilité traduit la diminution de volume en réponse à un accroissement de pression. Pour quantifier cet effet on introduit le coefficient de compressibilité isotherme défini par :

$$\chi = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (\text{Pa}^{-1})$$

où  $v = \frac{1}{\rho}$  est le volume massique (m<sup>3</sup>/kg).

Un accroissement de pression entraîne une diminution de volume, et inversement ; d'où la nécessité de mettre un signe moins devant le coefficient de compressibilité.

<sup>2</sup> Les dimensions de la surface fermée entourant  $dV$  ne doivent pas être trop faibles au cours de ce passage à la limite ; il faut que les molécules qu'elle renferme restent en nombre suffisant pour que la masse volumique soit une fonction continue.

## Ordres de grandeur des compressibilités

Eau	$4,1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Mercure	$4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Air	$\approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$

$$\chi_{\text{gaz}} \gg \chi_{\text{liquide}}$$

Pour les gaz parfaits, on déduit de l'équation d'état des gaz parfaits :  $\chi = \frac{1}{p}$ .

Calculez la pression à exercer sur un liquide tel que l'eau pour observer une variation de volume de 1 pour 1000. Réponse :  $\Delta p = 24 \text{ atm}$ .

## Relation entre masse volumique et compressibilité

Le volume (et donc la masse volumique) peut varier sous l'effet de la pression ou de la température. En plus du coefficient de compressibilité isotherme, on définit donc un coefficient de dilatation thermique à pression constante :  $\alpha = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ .

Dans un fluide en mouvement les trois grandeurs  $p$ ,  $v = 1/\rho$  et  $T$  ne sont pas uniformes et l'équilibre thermodynamique n'est réalisé que localement, à l'échelle de la particule. L'équation différentielle d'état :

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT$$

peut être transformée en faisant apparaître les deux coefficients  $\chi$  et  $\alpha$  :

$$dv = -\chi v dp + \alpha v dT$$

Nous n'étudierons que des écoulements de liquides ou de gaz dans lesquels la température peut être considérée comme constante ( $dT = 0$ ). L'approximation suivante sera donc faite :

**Liquide = fluide incompressible ( $\chi = 0$ )  $\Rightarrow \rho = \text{cte}$  : fluide isovolume ( $dv = 0$ )**

En pratique, il est raisonnable de dire qu'un fluide est isovolume si  $\Delta\rho/\rho \leq 4 \%$  au cours de son mouvement. La variation pour l'eau est  $\Delta\rho/\rho = 5 \cdot 10^{-4}$  pour une variation de température  $\Delta T = 1 \text{ K}$  et  $\Delta\rho/\rho = 2 \cdot 10^{-4}$  pour une variation de pression  $\Delta p = 1 \text{ bar}$ . On peut donc souvent traiter l'eau comme un fluide incompressible et utiliser dans les équations du mouvement une masse volumique  $\rho = \text{cte}$ .

## Viscosité

L'agitation des molécules est responsable d'un transfert microscopique de quantité de mouvement d'une particule à sa voisine s'il existe entre elles une différence de vitesse. Ce transfert est traduit par la propriété appelée **viscosité**, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 5.

La viscosité caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. Tout **fluide réel** présente une **viscosité** qui se manifeste par une résistance à la mise en mouvement du fluide. Par opposition, dans un **fluide parfait** aucune force de frottement ne s'oppose au glissement des particules fluide les unes contre les autres. Les fluides parfaits n'existent pas ; ils constituent un modèle.

# Forces subies par un fluide

L'un des buts de la mécanique étant de définir la **position** ou le **mouvement des particules matérielles** sous l'action des forces qui les sollicitent, il faut donc définir le genre de forces que nous aurons à considérer en mécanique des fluides.

## Force de volume : force de pesanteur

Les champs de force (de pesanteur, magnétique, électrique, etc.) exercent sur les particules fluides des actions à distance qui sont proportionnelles aux volumes des particules. Ce sont les **forces de volume**.

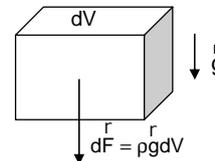
Considérons un petit volume élémentaire  $dV$  et soit  $dF$  la force élémentaire qui s'exerce sur  $dV$ . On désigne par **force volumique**  $f$  (ou densité de force par unité de volume) la limite, si elle existe, de la quantité :

$$f = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dF}{dV}$$

La densité des forces exercées par la gravité sur un milieu continu est l'un des exemples les plus classiques. C'est celle qui interviendra dans nos problèmes<sup>3</sup> :

$$dF = dm g = \rho g dV$$

Par conséquent, la **densité volumique de force** à laquelle est soumis le fluide est  $f = \rho g$ .



## Forces de surface : force de pression et force de frottement

Imaginons une surface  $S$  fictive qui, au sein du fluide, sépare le fluide en deux domaines  $D_1$  et  $D_2$ . Les particules qui se trouvent du côté de  $D_2$ , mais contiguës à  $S$ , agissent sur les particules de  $D_1$  qui le touchent. Ce sont des actions à courte distance proportionnelles à l'aire de contact et on les appelle **forces de surface**.

La force de pression : force normale

La **pression  $p$  est une grandeur scalaire** (positive) définie en tout point du fluide.

L'unité de pression dans le système international est le pascal ( $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ ). Cette unité étant faible (un pascal représente environ la pression exercée par un confetti posé sur votre main), on exprime les pressions en hectopascals (hPa), kilopascals (kPa) ou mégapascals (MPa).

Autres unités<sup>4</sup> :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  ;  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg} = 760 \text{ torr} = 10,33 \text{ m d'eau} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

On se souvient des expériences élémentaires qui consistent à percer un petit trou dans un récipient rempli de liquide. On constate que, quelle que soit la forme du récipient et la position de l'orifice, le liquide jaillit toujours perpendiculairement à la paroi. On admet que ce qui a lieu sur la frontière du récipient se produit encore à l'intérieur. En d'autres termes, si  $S$  est une surface non matérielle, qui sépare un domaine  $D$  de fluide en deux sous-domaines  $D_1$  et  $D_2$ , alors le fluide dans  $D_2$  exerce sur  $D_1$  une force normale à  $S$  en tout point  $M$  de  $S$ , et vice versa, le fluide dans  $D_1$  exerce sur  $D_2$  une force égale et opposée, donc normale elle aussi à  $S$  (principe de l'action et de la réaction). Pour exprimer la force exercée par  $D_2$  sur  $D_1$  on introduit le vecteur unitaire  $\hat{n}$  orienté vers le milieu qui agit (ici  $D_2$ ) et on écrit, pour un élément  $dS$  tracé sur  $S$  et entourant un point  $M$  de  $S$  :

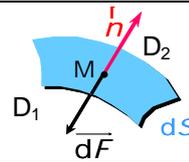
<sup>3</sup> L'intensité  $g$  de la pesanteur varie avec l'altitude  $z$  du lieu et sa latitude terrestre. Elle varie entre 9,78 à l'équateur et 9,83  $\text{m/s}^2$  aux pôles. À l'altitude zéro (niveau de la mer) et la latitude de  $45^\circ$ , elle vaut  $g = 9,807 \text{ N/kg}$ . Pour les applications numériques, nous prendrons  $g = 9,81 \text{ N/kg}$  (ou  $\text{m/s}^2$ ).

<sup>4</sup> L'atmosphère est la pression atmosphérique normale qui est à peu près la pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer.

$$d\vec{F} = -p n dS$$

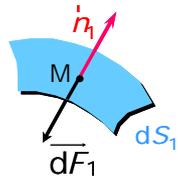
$\vec{dF}$  est la force exercée sur l'élément de surface  $dS$

$p$  est la pression régnant au point  $M$

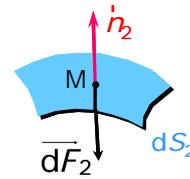


Par conséquent  $D_2$  exerce sur  $D_1$ , par l'intermédiaire de  $S$ , une **densité surfacique de force** (force par unité de surface)  $-p\vec{n}$ . La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface.

La pression est indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface. Si on fait passer une autre surface  $S'$  par le point  $M$ , on obtient la même pression  $p$ . La notion de pression, totalement indépendante de la frontière du fluide (réceptacle), décrit les efforts exercés à l'intérieur du fluide par une partie  $D_2$  sur son complémentaire  $D_1$ . On dit que l'on a donné une description des **efforts intérieurs** (que les particules exercent les unes sur les autres).



$$d\vec{F}_1 = -p_1 \vec{n}_1 dS_1$$



$$d\vec{F}_2 = -p_2 \vec{n}_2 dS_2$$

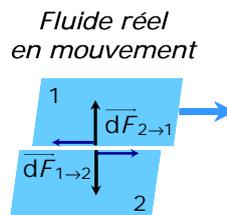
$$\vec{dF}_1 \neq \vec{dF}_2 \text{ mais } p_1 = p_2$$

Les frottements : force tangentielle

Il n'existe de **contraintes<sup>5</sup> tangentielles** que si le fluide est visqueux (fluide réel) et en mouvement non uniformément accéléré. L'existence de contraintes tangentielles se manifeste par une résistance à l'écoulement.

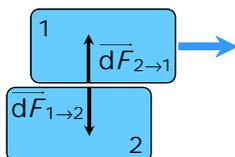
Cette force de frottement s'annule avec la vitesse. Pour un fluide au repos, la statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits (non visqueux). Cette distinction n'apparaîtra qu'en dynamique des fluides.

En résumé, il existe des forces de surface normales et tangentielles dans le cas suivant :

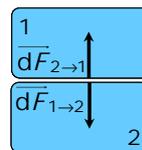


Les forces de surfaces sont normales dans les cas suivants :

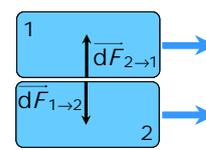
*Fluide parfait  
en mouvement*



*Fluide réel ou parfait  
au repos*



*Fluide réel ou parfait  
uniformément accéléré*



<sup>5</sup> D'une façon générale, une force de surface  $\vec{dF}$  agit sur un élément de surface d'aire  $dA$ .  $\vec{dF}$  est un infiniment petit du même ordre de grandeur que  $dA$ . Le vecteur  $\vec{dF}/dA$  tend vers une limite  $\vec{\sigma}$  appelé vecteur contrainte.

# Statique des fluides

La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des **fluides au repos**. Plus précisément, elle concerne toutes les situations dans lesquelles il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules fluides :

- fluides au repos
- fluides uniformément accélérés

Il n'y a **pas de contraintes dues aux frottements** entre particules.

Les forces en jeu sont uniquement des forces de volume dues au poids et de forces de surface dues à la pression.

## Équation fondamentale de la statique des fluides

Considérons un élément de volume de forme parallélépipédique à l'intérieur d'un fluide en équilibre, de volume  $dV = dx dy dz$ , dans un repère cartésien, et faisons le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume<sup>6</sup> :

- La force de volume : le poids du fluide donné par  $\vec{dP} = dm\vec{g} = \rho dV\vec{g}$ .
- Les forces de surface dues à la pression ; on peut décomposer la résultante en trois composantes :

$$\vec{dF} = dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y + dF_z \vec{e}_z$$

Puisque les forces de surface sont nécessairement normales, la composante suivant z correspond aux forces de pression s'exerçant sur les surfaces perpendiculaires à l'axe z. Donc :

$$dF_z = [p(z) - p(z + dz)] dx dy$$

Par un développement au premier ordre, on a :

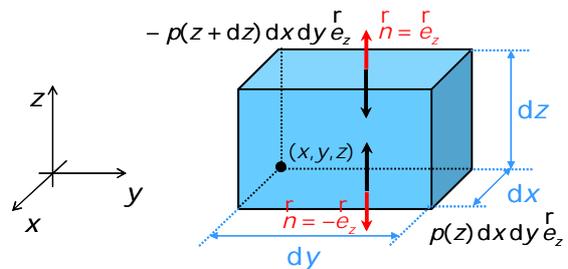
$$p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$\text{D'où : } dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial z} dV$$

Par analogie sur les deux autres axes :

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \text{ et } dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV$$

La force de surface se résume alors à :



<sup>6</sup> Rappelons que l'élément de volume  $dV$  est petit à notre échelle, mais grand à l'échelle des molécules.

$$\vec{dF} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z\right) dV = -(\vec{\text{grad}} p) dV$$

En vertu du **principe fondamental de la dynamique**, l'ensemble des forces agissant sur la particule fluide équivaut au produit de sa masse par son accélération :  $d\vec{P} + d\vec{F} = \rho dV \vec{a}$

Par conséquent, on a, après division par  $dV$  :  $\vec{\rho g} - \vec{\text{grad}} p = \rho \vec{a}$

Si le fluide est au repos  $\vec{a} = \vec{0}$  ; dans ce cas, il vient l'équation locale :

$$\vec{\text{grad}} p = \rho \vec{g}$$

En supposant que  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ , on a pour un fluide au repos :  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(x, y, z) = p(z)$

D'où **l'équation différentielle à résoudre pour connaître la pression en tout point du fluide au repos** :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Remarque

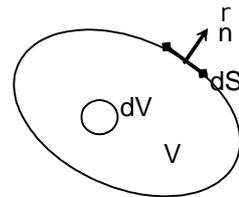
Attention,  $\rho g$  désigne les forces volumiques extérieures. C'est souvent la gravité, mais il peut y avoir d'autres forces, notamment en repère relatif où les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis doivent être prises en compte.

L'équation fondamentale de la statique peut s'établir d'une façon plus générale, sans faire intervenir un repère particulier. Considérons une portion quelconque de fluide de volume  $V$ . La somme des forces de volume qui s'exercent sur  $V$  a pour expression  $\iiint_V \rho \vec{g} dV$ , et la somme des forces de contact qui

s'exercent sur le contour  $S$  de  $V$  s'écrit :  $\iint_S -\vec{p} ndS$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de la normale en un point de la surface qui limite le volume, vecteur orienté vers l'extérieur de cette surface fermée.

On écrit que la somme des forces qui s'exercent sur  $V$  est nulle (puisque le fluide est au repos) :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV + \iint_S -\vec{p} ndS = 0$$



En utilisant les formules mathématiques de transformation d'intégrales, rappelées en note de bas de page<sup>7</sup>, il vient, quelque soit le volume  $V$  :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV + \iiint_V -\vec{\text{grad}} p dV = 0$$

Il en résulte<sup>8</sup> :  $\vec{\rho g} - \vec{\text{grad}} p = 0$ , soit encore :

<sup>7</sup> Formule de Green-Ostrogradski reliant une intégrale n-uple et une intégrale (n-1)-uple : Soit  $f$  une fonction réelle régulière définie sur  $\Omega$  de frontière  $\Sigma$  (régulière, c'est-à-dire continue sur  $\Omega$ , de dérivées premières continues par morceaux et bornées sur  $\Omega$ ). Soit  $\vec{n}$  la normale extérieure unitaire à  $\Sigma$ . Soit  $i \in [1, n]$  et  $n_i$  la  $i^{\text{ème}}$

composante de  $\vec{n}$ . On a alors :  $\int_1^L \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\Omega = \int_1^L \int_{\mathcal{E}} f n_i d\Sigma$

Pour  $n = 3$ , on a pour  $f$  scalaire :  $\iiint_V \vec{\text{grad}} f dV = \iint_S f \vec{n} dS$  (c'est la formule utilisée ici)

et pour  $\vec{f}$  vectorielle, après avoir fait la somme sur  $i$  de 1 à 3 :  $\iiint_V \text{div} \vec{f} dV = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$  (sera utilisée en dynamique)

$\vec{\text{grad}} p = \vec{\rho g}$ , relation vectorielle fondamentale de la statique des fluides.

## Application aux fluides incompressibles : hydrostatique

### Équation fondamentale de l'hydrostatique

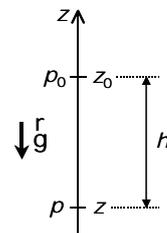
La masse volumique du fluide est en tout point la même :  $\rho = \text{cte}$  (fluide incompressible).

Par ailleurs, on peut considérer que l'accélération de la pesanteur est une constante :  $g = \text{cte}$ .

Par conséquent :  $\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{cte}$

Et par intégration :  $p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = -\int \rho g dz = -\rho g z + \text{cte}$

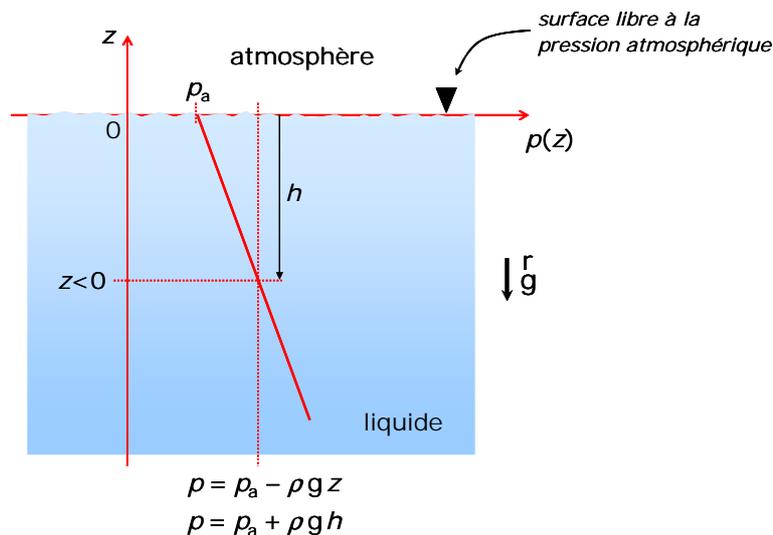
Soit :  $p(z) + \rho g z = \text{cte} = p_0 + \rho g z_0$ , où  $p_0$  est la pression à l'altitude  $z_0$ .



Donc :  $p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho g h$  où  $h$  est la hauteur de fluide sous le niveau de référence.

Un tel champ de pression, affine en  $z$ , est appelé champ de pression hydrostatique, et l'équation ci-dessus encadrée est l'équation de l'hydrostatique (équation fondamentale de la statique des fluides dans le cas particulier d'un fluide isovolume dans le champ de pesanteur).

La plupart du temps, on prendra  $z_0 = 0$  le niveau de référence correspondant à la surface libre du fluide où  $p_0 = p_a$ . Pour les applications numériques, on prendra la pression atmosphérique standard :  $p_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .



<sup>8</sup> En effet, soit  $K$  un sous-ensemble quelconque d'un ensemble ouvert  $\Omega$  et  $f$  une fonction réelle, définie et continue sur  $\Omega$  ; si :

$$\forall K \subset \Omega, \int_K f(x) dx = 0$$

alors :  $f = 0$  sur  $\Omega$ .

## Exemple

En supposant la pression atmosphérique égale à  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Pa, on va déterminer la pression  $p$  qui régnera à l'extérieur d'un sous-marin, enfoncé et immobile, en un point situé à 38 m de profondeur. La masse volumique de l'eau est prise égale à  $1\,000 \text{ kg/m}^3$ . D'après la relation de l'hydrostatique, nous avons immédiatement :

$$p = 1,013 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 38 = 4,74 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

## Conséquences

Les conséquences de l'équation fondamentale de l'hydrostatique sont les suivantes :

- Les surfaces d'égale pression dans un fluide homogène sont des plans horizontaux (plans isobares). En effet, quand  $p = \text{cte}$  nous avons  $z = \text{cte}$ . Réciproquement la pression est constante dans un plan horizontal quelconque.
- Si nous avons deux fluides différents, de masses volumiques différentes, non miscibles, la surface de séparation est horizontale. Le fluide le plus lourd est en dessous (équilibre stable). En particulier, la surface libre d'un liquide surmonté d'un gaz au repos (comme l'air atmosphérique) est un plan horizontal (plan où la pression est la pression atmosphérique constante). En effet :

Soit  $S$  l'interface entre deux fluides de masses volumiques respectives  $\rho$  et  $\rho'$ . Soient  $A$  (respectivement  $A'$ ) et  $B$  (respectivement  $B'$ ) deux points distincts sur  $S$ . On a :

$p(A) = p(A')$  et  $p(B) = p(B')$  en vertu du principe de l'action et de la réaction,  
 $z(A) = z(A')$  et  $z(B) = z(B')$  puisque ce sont les mêmes points géométriques,  
 $p(A) - p(B) = \rho g[z(B) - z(A)]$  et  $p(A') - p(B') = \rho' g[z(B') - z(A')]$  d'après l'équation fondamentale de la statique.

$$\text{D'où, } \rho g[z(B) - z(A)] = \rho' g[z(B') - z(A')] \text{ soit } (\rho - \rho')g[z(B) - z(A)] = 0.$$

Si  $\rho \neq \rho'$ , alors  $z(B) = z(A)$ , et ceci quels que soient les points  $A$  et  $B$ . Il en résulte que, sous l'action de la gravité, **la surface libre d'un liquide ou la surface de séparation de deux liquides non miscibles en équilibre est un plan horizontal.**

On en déduit le « principe des vases communicants » : dans plusieurs vases de forme quelconque, communiquant entre eux et contenant un seul liquide en équilibre, les surfaces libres dans les différents vases sont dans le même plan horizontal.

Ce point est à la base de la mesure de la différence de pression entre deux gaz à l'aide du manomètre en U. Il suffit de mesurer la différence de niveau du liquide dans les deux branches et de connaître la masse volumique de ce liquide (voir TD).

- La différence de pression  $p_A - p_B$  entre deux points quelconques  $A$  et  $B$  pris à l'intérieur du fluide ne dépend que de la distance verticale entre les deux points. Elle est égale au poids d'une colonne de fluide ayant comme base l'unité de surface et comme hauteur la différence de niveau entre les deux points. En effet :

$$\begin{aligned} p_A + \rho g z_A &= p_B + \rho g z_B \\ (p_B - p_A) &= \rho g(z_A - z_B) \end{aligned}$$

avec  $\rho g$  poids volumique du fluide.

L'expérience du tonneau de Pascal en est une bonne illustration. Pascal installe au-dessus d'un tonneau un tuyau vertical très étroit et très haut (plusieurs mètres). L'implantation du tuyau sur le tonneau est parfaitement étanche. Le tonneau étant plein d'eau, Pascal verse alors en haut du tube (depuis une fenêtre de la maison en bordure de laquelle l'expérience a lieu) une quantité infime d'eau, suffisante pour remplir le tube : le tonneau éclate ! Cette

expérience montre bien que ce qui définit la pression, ce n'est pas le poids du liquide situé au-dessus, mais son poids par unité de surface.

- Dans un fluide incompressible en équilibre, **les variations de pression se transmettent intégralement en tout point du fluide**. La différence ( $p_B - p_A$ ) calculée précédemment reste constante quelles que soient les pressions. Si  $p_A$  varie,  $p_B$  varie simultanément de la même quantité. Ceci constitue le théorème de Pascal.<sup>9</sup> Dans l'expérience du tonneau de Pascal, si la hauteur de l'eau dans le tube est  $h$ , la pression  $p$  **en chaque point du tonneau** a augmenté de  $\rho gh$  et les forces de pression sur les parois du tonneau peuvent devenir considérables. Le tube vertical étant assez étroit, il est possible d'obtenir ce résultat en introduisant un poids d'eau très faible vis-à-vis du poids total de l'eau contenu dans le tonneau.

## Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques)

On peut désormais s'intéresser à la détermination des forces s'exerçant sur les surfaces solides immergées.

On sait que  $\vec{dF} = -p\vec{n}dS$  est la force de pression élémentaire s'exerçant sur la surface élémentaire  $dS$ .

Pour connaître la force totale s'exerçant sur une surface  $S$ , il suffit d'intégrer  $\vec{dF}$  sur cette surface  $S$  :

$$\vec{F} = \int_S -p\vec{n}dS$$

### Forces de pression sur une paroi plane

Soit une paroi de surface  $S$  située entre les profondeurs  $h_1$  et  $h_2$  au-dessous de la surface libre du liquide. Soit  $p_0$  la pression atmosphérique. Cette surface est soumise aux deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  normales à  $S$  et de directions opposées :  $\vec{F}_1$  la force exercée par le fluide sur la paroi et  $\vec{F}_2$  la force exercée par le milieu extérieur sur la paroi.

Les poussées élémentaires  $-p\vec{n}_1dS$  reçues par la paroi sont des vecteurs parallèles qui se composent en une résultante normale à la surface ; son intensité est :

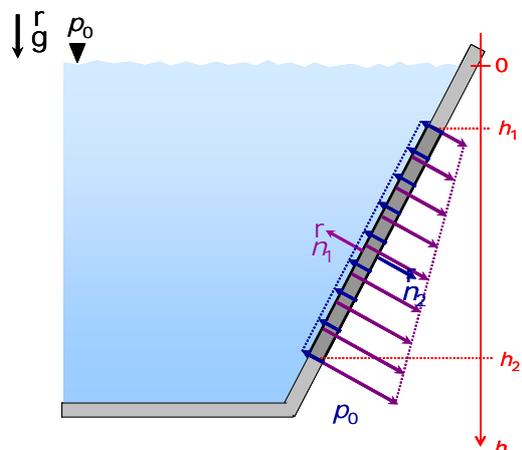
$$\vec{F}_1 = \int_S -p\vec{n}_1dS \quad \text{où } p = p_0 + \rho gh$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{n}_1 \int_S (p_0 + \rho gh)dS = -\vec{n}_1 \left( p_0 S + \rho g \int_S h dS \right)$$

Or,  $\int_S h dS = h_G S$  avec  $h_G$  profondeur du barycentre (centre de gravité) de la surface  $S$  :

$$h_G = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$\text{D'où } \vec{F}_1 = -\vec{n}_1 S (p_0 + \rho gh_G)$$



<sup>9</sup> Un liquide incompressible en équilibre transmet les variations de pression (et non directement les forces). Au contraire, un solide indéformable transmet les forces.

Par ailleurs,  $\vec{F}_2 = -n_2 S p_0$

D'où la résultante de ces deux actions :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\rho g h_G S \vec{n}_1 = \rho g h_G S \vec{n}_2$$

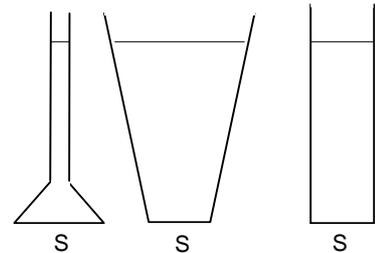
La pression atmosphérique s'applique de part et d'autre de la paroi et n'intervient donc plus sur la résultante.

## Pression sur le fond horizontal des vases

Quelle que soit la forme des vases, s'ils sont remplis du même liquide à la même hauteur  $h$ , **le fond de même surface  $S$  est soumis à la même force de pression**, égale au poids d'une colonne verticale de fluide de base  $S$ , de hauteur  $h$  :

$$F = \rho g h S$$

Ce résultat a été appelé le **paradoxe hydrostatique** : la poussée verticale sur le fond d'un récipient est indépendante de la forme de la paroi à l'intérieur de son contour qui est supposé fixe.



La force de pression sur la surface inférieure est donc la même, bien que les vases contiennent des poids de liquide différents, mais il faut remarquer que si dans le cas du vase cylindrique la paroi inférieure supporte effectivement tout le poids de l'eau qui se trouve dans le vase, il n'en est pas de même dans les deux autres cas ; par exemple, dans le vase tronconique évasé vers le haut les parois latérales supportent des forces de pression qui ont une résultante verticale non nulle et dirigée vers le bas ; par contre, pour le vase resserré vers le haut, les parois latérales inférieures supportent des forces de pression qui ont une résultante non nulle, mais dirigée cette fois-ci vers le haut.

## Détermination du point d'application d'une force hydrostatique

Si  $\vec{F}$  est la force hydrostatique s'exerçant sur une surface  $S$ , alors on peut avoir besoin de connaître le point d'application  $A$  de cette force. Ce point s'appelle **centre de poussée**. Le centre de poussée se détermine en écrivant que le moment de  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  quelconque est égal à la résultante des moments élémentaires par rapport à ce même point  $O$ .

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

Exemple : cas d'une paroi verticale

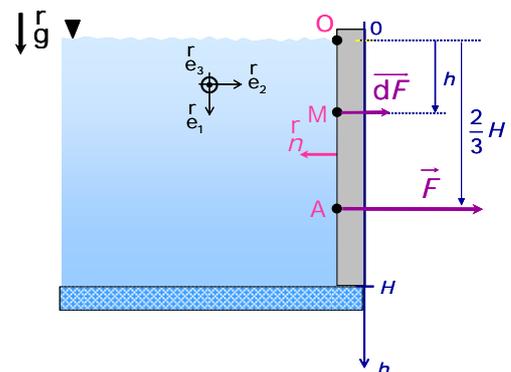
Il est en général commode de choisir un point  $O$  appartenant à la surface. Choisissons le au niveau de la surface libre du fluide.

L'abscisse  $x_A = OA$  du centre de poussée est défini par :

$$\vec{OA} \wedge \int_S d\vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}, \text{ soit :}$$

$$OA \cdot \int_S dF \vec{e}_3 = \int_S OM \cdot dF \vec{e}_3 \Rightarrow OA \cdot F = \int_S OM \cdot dF$$

$$F = \rho g h_G S = \rho g \frac{H}{2} S ; OM = h ; dF = \rho g h L dh$$



$$OA = \frac{\int_0^H h \rho g h L dh}{\rho g \frac{H}{2} S} = \frac{L}{\frac{H}{2} L H} \int_0^H h^2 dh = \frac{2}{H^2} \frac{H^3}{3} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} H$$

On constate que le centre de poussée est situé plus bas que le centre de gravité.

Paroi plane inclinée

D'une façon générale, pour une paroi plane inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, on démontrera que l'on a, puisque  $h = x \sin \alpha$  :

$$x_A = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S}$$

$x_G$  étant l'abscisse OG du centre de gravité. L'intégrale située au numérateur est égale au moment d'inertie I de la paroi S par rapport à O.

Le centre de poussée n'est pas confondu avec le centre de gravité, il est toujours situé en-dessous. Sa position A sur la plaque ne change pas avec  $\alpha$  : A et G sont des points fixes.

## Poussée d'Archimède

On cherche l'effort exercé sur un **objet immergé**, c'est-à-dire la force totale exercée par le fluide sur l'obstacle qui occupe le volume V totalement entouré par le fluide.

On sait que cette force s'exprime par  $\vec{F} = \iint_S -\vec{p} n dS$ , où  $\vec{n}$  est la normale unitaire en tout point de la surface S qui limite V, orientée vers le milieu qui agit.

La formule du gradient, rappelée ci-contre, permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume :  $\iint_S \vec{r} f n dS = \iiint_V \text{grad} f dV$ .

Dans le cas présent, il vient :  $\vec{F} = \iiint_V -\text{grad} p dV$ .

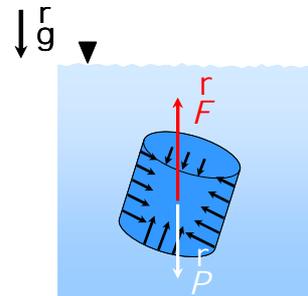
Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire  $\text{grad} p = \rho \vec{g}$ .

D'où  $\vec{F} = -\iiint_V \rho \vec{g} dV$ , et, en supposant g constant sur tout le

volume,  $\vec{F} = -\vec{g} \iiint_V \rho dV = -\rho V \vec{g}$

$\rho V$  est la masse de fluide déplacé par le volume solide.

La **poussée**  $\vec{F}$  n'a pas de composante horizontale et sa composante verticale **est égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps** (c'est la **poussée d'Archimède**).



On calcule de la même façon le moment résultant en un point tel que l'origine O par exemple :

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \iint_S \vec{OM} \wedge (-\vec{p} n) dS = \iint_S \vec{OM} \wedge (-\text{grad} p) dV = -\iint_S \vec{OM} \wedge \rho \vec{g} dV = -\left( \iiint_V \vec{OM} \rho dV \right) \wedge \vec{g}$$

Or  $\iiint_V \overrightarrow{OM} \rho dV = m \overrightarrow{OG}$ , G désignant le centre de gravité du liquide déplacé de masse  $m = \rho V$ .

D'où  $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = -m \overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$

**Le point d'application de la poussée d'Archimède, appelé centre de poussée, est le centre de masse de la partie immergée du solide** (centre de gravité du fluide déplacé et non celui du solide immergé).

## Stabilité d'équilibre d'un corps totalement immergé dans un seul liquide

Pour que le solide immergé soit en équilibre il faut que son poids P soit égal et opposé à la poussée F :

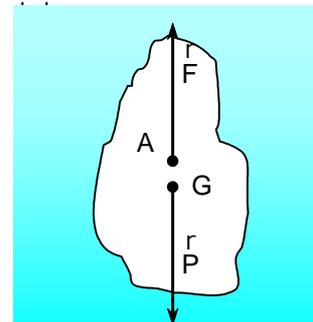
$$\vec{P} + \vec{F} = 0$$

- Si le solide est homogène, le poids  $P (= V\rho_s g)$  et la poussée  $F (= V\rho_l g)$  sont appliqués au même point : le centre de gravité G du solide coïncide avec le centre de poussée A.
  - Si  $\rho_s = \rho_l$ , le solide est en **équilibre indifférent** dans le liquide.
  - Si  $\rho_s > \rho_l$ , le solide descend jusqu'à toucher le fond du récipient.
  - Si  $\rho_s < \rho_l$ , le solide monte et lorsqu'il émerge à la surface du liquide, la poussée d'Archimède diminue et le solide flotte.
- Si le solide est hétérogène, le centre de gravité G et le centre de poussée A sont des points distincts.

Si  $\overline{\rho_s} = \rho_l$ , le solide va tourner et osciller jusqu'à ce que les points G et A soient sur une même verticale, G étant en dessous de A (condition d'**équilibre stable**).

Si  $\overline{\rho_s} > \rho_l$ , le solide tourne et descend à la fois.

Si  $\overline{\rho_s} < \rho_l$ , le solide tourne et monte à la fois et vient finalement flotter à la surface.



## Corps flottants

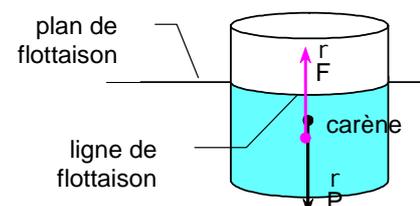
Les résultats établis précédemment s'appliquent intégralement si la surface S limite un corps solide en équilibre, immergé complètement ou flottant. C'est le « principe d'Archimède » : le corps solide subit une poussée égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé. Elle passe par le centre de gravité du volume déplacé, ou centre de poussée.

### Définitions

Un **flotteur** est un solide de forme quelconque, généralement fermé, en équilibre dans un liquide. L'équilibre n'est possible que si le poids du flotteur est inférieur ou égal au poids du volume de liquide qu'il peut déplacer.

Le plan de flottaison est le plan de la surface libre du liquide. Ce plan coupe le flotteur suivant une surface appelée **flottaison** dont le contour s'appelle **ligne de flottaison**.

La **carène** est le volume immergé du flotteur (volume situé au-dessous du plan de flottaison).

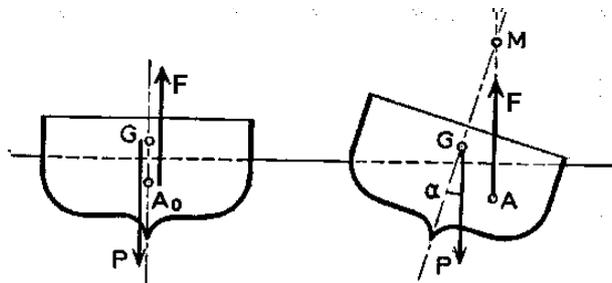


La poussée du liquide passe par le centre de gravité du volume de la carène. C'est le centre de poussée ou **centre de carène**.

Différentes positions d'équilibre (cas d'un bateau)

Comme pour un flotteur en équilibre le poids du liquide déplacé est égal au poids du flotteur (donc constant), les différentes positions d'équilibre correspondent à des flottaisons de même volume (flottaisons isocarènes).

Si le bateau s'incline à la surface de l'eau, la force de poussée  $F$  reste constante (égale au poids du bateau), par contre le centre de poussée  $A$  se déplace. Lorsque le bateau n'est pas incliné, ce centre de poussée occupe une position  $A_0$  qui est le centre de gravité des fluides déplacés et par suite se trouve en général en dessous du centre de gravité  $G$  du bateau lui-même. Si le bateau s'incline et fait un angle  $\alpha$  avec la verticale, le centre de poussée  $A$  et le centre de gravité  $G$  ne sont plus sur une même verticale ; par suite le bateau est soumis à un couple. Dans le cas de la figure reproduite ci-dessous l'équilibre sera stable puisque ce couple est de rappel, et le bateau sera rappelé vers la position  $\alpha = 0$  autour de laquelle il oscillera (mouvement de **roulis**).



Soit  $M$  le point d'intersection de la verticale du point  $A$  avec l'axe du bateau qui passe par  $G$  (verticale de  $G$  pour  $\alpha = 0$ ). Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , le point  $A$  tend vers la limite  $A_0$ , et le point  $M$  tend vers un point limite  $M_0$  que l'on appelle le **métacentre** du bateau. Nous voyons que la stabilité du bateau nécessite que ce métacentre soit au-dessus du centre de gravité dans la position  $\alpha = 0$ . Dans le cas contraire le couple sera un couple de chavirement.

## Application aux fluides compressibles

D'une façon générale, il s'agit des gaz puisque leur densité dépend de la pression.

Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un **gaz parfait** :  $pV = nRT$ .

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} = \frac{M}{RT}p \quad (\text{la masse volumique dépend de la pression} \Rightarrow \text{compressibilité})$$

Pour connaître la pression en tout point du gaz, on part de l'équation fondamentale de la statique des fluides et on l'intègre :

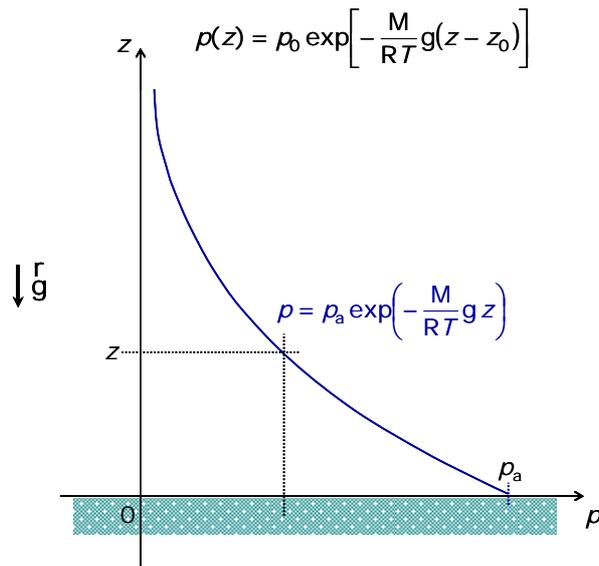
$$\frac{dp}{dz} = -\rho(p)g = -\frac{M}{RT}pg \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT}gdz$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{M}{RT}gdz = \text{cte} \quad \text{avec} \quad \frac{M}{RT}g \quad \text{constant} \quad \text{si la température est homogène.}$$

Soit :  $\ln p = -\frac{M}{RT}gz + \text{cte}$  ; donc :  $p(z) = \text{cte} \cdot \exp\left(-\frac{M}{RT}gz\right)$  où la constante se définit par rapport à la

pression pour un niveau de référence. Ainsi, si  $p = p_0$  en  $z = z_0$ , alors :  $\text{cte} = p_0 \exp\left(\frac{M}{RT}gz_0\right)$ .

Donc :  $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{M}{RT}g(z - z_0)\right)$



En général, on peut considérer comme constante la pression d'un gaz remplissant un réservoir de quelques mètres de haut. En effet, considérons le cas d'un récipient contenant de l'air, d'une hauteur intérieure  $h = 1$  m. Supposons que la température  $y$  soit uniforme et égale à  $0$  °C, et la pression normale à la base ( $z = 0$ ). Dans les conditions normales<sup>10</sup>, la masse volumique de l'air est  $\rho_0 = 1,293$  kg/m<sup>3</sup>. La formule précédente donne :

$$p = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{\rho_0}\right) \approx \rho_0 - \rho_0 g z$$

$$\left|\frac{p - \rho_0}{\rho_0}\right| \approx \frac{\rho_0 g z}{\rho_0} = \frac{1,293 \times 9,81 \times 1}{1,013 \cdot 10^5} = 1,25 \cdot 10^{-4}$$

Donc, on peut considérer que la pression garde une valeur unique en tout point d'un récipient. Cette approximation revient à négliger la masse volumique du gaz.

Il n'en est pas de même si on considère des fortes variations de cotes  $z - z_0$ , comme dans l'étude de la structure verticale de l'atmosphère. Par exemple, dans les conditions normales, la loi de répartition des pressions en atmosphère isotherme à 273 K est égale à :

$$p = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{7978}\right) \text{ avec } M = 29 \text{ g/mole, } R = 8,314 \text{ Jmole}^{-1}\text{K}^{-1} \text{ et } g = 9,81\text{ms}^{-2}$$

soit à 1 000 m d'altitude :  $p = 0,88 \rho_0 = 0,894 \cdot 10^5$  Pa.

La température variant en général avec l'altitude, il faut, avant d'intégrer, se donner la relation  $\rho(p)$  ou  $\rho(T)$ . Les études expérimentales de l'atmosphère réelle ont permis de la diviser en un certain nombre de zones : entre zéro et 10 kilomètres d'altitude (troposphère), la température absolue  $T$  décroît linéairement :  $T = T_0 - kz$ . Typiquement à l'altitude zéro, la température est de  $15$  °C, la pression de  $1,013 \cdot 10^5$  Pa et la masse volumique est donc de  $1,225$  kg/m<sup>3</sup> ; entre 0 et 10 000 m :  $T = 288 (1 - 22,6 \cdot 10^{-6} z)$ . Puis à une altitude  $z$  supérieure à 10 kilomètres (stratosphère), l'équilibre peut être représenté par un équilibre adiabatique, c'est-à-dire tel que le volume  $v$  et la pression  $p$  sont liés par la relation  $p v^\gamma = \text{cte}$ . Déterminez la relation  $p = f(z)$  dans cette zone. On appellera  $p_0$  la pression à l'altitude  $z_0 = 10$  km.

<sup>10</sup> Les conditions normales de température et de pression sont :  $p = 1$  atm et  $T = 273,15$  K ( $0$  °C).  
Les conditions standards sont :  $p = 1$  atm et  $T = 298,15$  K ( $25$  °C).

$$\text{Réponse : } \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{(\gamma-1)p_0 z}{\gamma p_0}$$

---

## Problème général de statique des fluides

Si le champ de force de volume  $\vec{F}$  est connu (par exemple champ de pesanteur  $\vec{g}$  par unité de masse), le problème général concerne trois inconnues ( $\rho$ ,  $p$  et  $T$ ) et nécessite le traitement de trois équations : l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{\text{grad}} p = \rho \vec{F}$$

à laquelle on ajoute l'équation d'état du fluide ( $\rho = \text{cte}$  ou  $\rho = \frac{M}{RT} p$  ou ...) et la condition qui favorise l'équilibre (par exemple,  $T$  uniforme dans tout le volume).

Pour étudier les écoulements de fluides, nous devons nous donner les moyens de décrire le mouvement des particules fluides dans ces écoulements. C'est l'objet de la cinématique qui s'attache à faire une **description des écoulements sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu**.

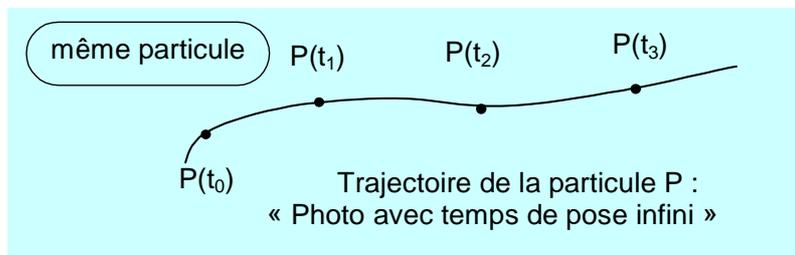
## Description du mouvement

### Particule fluide

La **particule fluide** est choisie comme entité élémentaire permettant une description complète des écoulements ; il s'agit d'un « paquet » de molécules entourant un point donné qui se déplace avec le fluide. La particule fluide est caractérisée du point de vue thermodynamique par sa masse volumique  $\rho$ , sa pression  $p$  et sa température  $T$ . Pour l'étude du mouvement, on introduit la **position** et la **vitesse** de la particule qui se translate, tourne sur elle-même et se déforme quand elle s'écoule.

### Description de Lagrange et trajectoire

Cette description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide. C'est l'évolution de la position des particules qui permet la description du mouvement.



À chaque instant, correspond une position de  $P$ . Les coordonnées  $X_i(t)$  de la particule  $P$  sont appelées **variables de Lagrange**. Le vecteur vitesse instantanée de la particule  $P$  est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{dX_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dX_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dX_3}{dt} \vec{e}_3$$

où les  $\vec{e}_i$  sont les vecteurs unitaires des axes du système de référence.

Ainsi, le **lieu géométrique des positions successives** occupées par une particule, lorsque  $t$  varie, constitue ce qu'on appelle la **trajectoire** de cette particule.

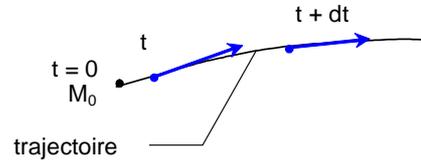
Pour visualiser les trajectoires fluides, on injecte par exemple un colorant en un point de l'écoulement qui, à l'instant  $t_0$ , marque le point  $P$  et on suit l'évolution du colorant en fonction du temps. On peut également injecter de fines particules métalliques, chacune s'identifiant à une particule fluide, et photographier l'écoulement pendant un temps suffisamment long. On observe les trajectoires décrites par ces particules sous forme de traits continus.

Analytiquement, dans un repère cartésien, les trajectoires sont définies par les coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  de la particule en fonction du temps et des conditions initiales à la date  $t_0$ , soit :

$$\begin{cases} X_1 = f_1(X_{10}, X_{20}, X_{30}, t) \\ X_2 = f_2(X_{10}, X_{20}, X_{30}, t) \\ X_3 = f_3(X_{10}, X_{20}, X_{30}, t) \end{cases}$$

La trajectoire de la particule se situant en  $M_0$  à l'instant  $t = 0$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w} = dt$$



## Description d'Euler et lignes de courant

### Concept de champ

Le concept de champ est extrêmement important dans l'étude de la mécanique des fluides, comme il l'est dans les autres théories des champs comme en électricité et en magnétisme, en mécanique du solide et en transport de chaleur et de masse.

### Exemples

- La distribution de pression sur une voiture est un champ de scalaires (ou champ scalaire).
- La distribution de vitesse est un champ de vecteurs (ou champ vectoriel).

Le champ de vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t)$  donne l'intensité et la direction de la vitesse en chaque point  $(x, y, z)$  à chaque instant.

### Description d'Euler

Cette description de l'écoulement consiste à établir à un instant  $t$  donné l'ensemble des **vitesse associées à chaque point de l'espace** occupé par le fluide. À chaque instant  $t$ , l'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un **champ de vecteurs vitesses**. Les composantes  $v_i$  ( $i = 1, 3$ ) de la vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel choisi sont des fonctions de quatre variables indépendantes  $x_i$  ( $i = 1, 3$ ) et  $t$ , appelées **variables d'Euler** ;  $x_i$  représentent les coordonnées d'un point fixe dans le référentiel, autrement dit ne dépendent pas explicitement du temps. Nous noterons  $u, v, w$ , ou  $v_i$ , les composantes du vecteur  $\vec{v}$  et  $x, y, z$ , ou  $x_i$ , les composantes du point  $M$  considéré.

On utilise préférentiellement ce mode de description. En chaque point  $M(x_i)$  de l'espace, repéré par rapport à un système fixe, on observe le passage des particules au cours du temps. On ne s'intéresse pas aux identités changeantes des particules, mais à la vitesse  $\vec{v}(t)$  que possède la particule qui y passe à l'instant  $t$  :  $v_i = v_i(x_i, t)$ . La valeur de toute fonction du champ de l'écoulement exprimée en variables d'Euler  $f(x, y, z, t)$  correspond donc à la particule fluide localisée au point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  considéré.

Dans la suite de ce cours, il ne sera fait usage que des seules variables d'Euler.

### Ligne de courant

Dans cette description d'Euler, on appelle **ligne de courant** la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad \text{à } t \text{ fixé}$$

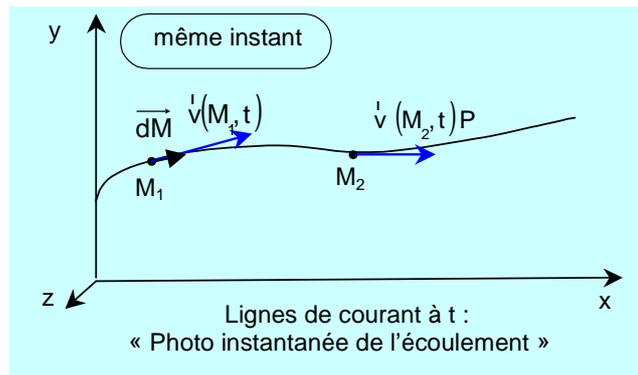
soit deux équations à trois variables (x, y, z) .

En effet, pour un déplacement  $d\vec{M}$  infiniment petit du point M sur une ligne de courant, on peut écrire :

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = 0$$

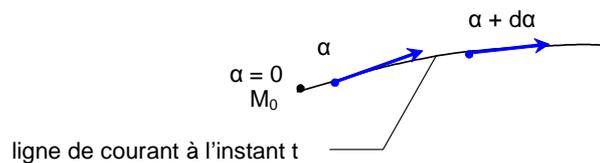
Ce qui s'écrit scalairement :

$$\begin{cases} vdz - wdy = 0 \\ wdx - udz = 0 \\ udy - vdx = 0 \end{cases}$$



Posant la valeur commune du rapport de l'équation différentielle encadrée égale à  $d\alpha$ ,  $\alpha$  désignant un réel quelconque, les équations paramétriques des lignes de courant passant, à tout instant, par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  pour  $\alpha = 0$  s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t, \alpha) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t, \alpha) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t, \alpha) \end{cases}$$

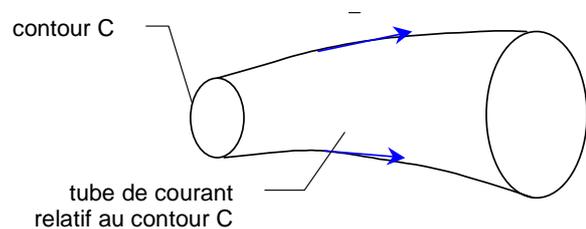


Les lignes de courant constituent ainsi une famille de courbes à deux paramètres ; elles varient dans l'espace (à travers le paramètre géométrique  $\alpha$ ) et dans le temps (par la variable temporelle t).

Tube de courant

On appelle **tube de courant** l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient, au même instant, sur un contour C fermé quelconque tracé dans le fluide.

Comme nous le verrons plus tard, l'introduction du tube de courant aura tout son intérêt dans l'étude des régimes stationnaires.



## Écoulement permanent

Un écoulement est dit **permanent** (ou **stationnaire**) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression, température, etc.), ce qui se traduit symboliquement par :

$$\text{Mouvement permanent} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Sur le plan cinématique, le champ de vitesse ne varie pas dans le temps. Dans ce cas :

- les lignes de courant sont fixes dans l'espace
- les trajectoires coïncident avec les lignes de courant

En effet, toutes les particules passées en M à un instant donné ont en ce point le même vecteur vitesse et donc la même trajectoire. La description et la prévision de l'écoulement sont beaucoup plus simples et de ce fait mieux connues.

Les écoulements qui ne sont pas stationnaires sont appelés tout naturellement instationnaires. Nous ne les traiterons pas ici. Leur description est mathématiquement complexe et dans la pratique on

recherchera un éventuel régime pseudo-stationnaire en définissant, si elle existe, une période  $T$  au bout de laquelle les paramètres de l'écoulement reprennent des valeurs identiques. À défaut, ils seront définis par leur valeur moyenne sur la durée  $T$ . C'est le cas des écoulements turbulents dont nous parlerons plus tard.

## Conservation de la masse

### Équation de continuité

L'équation de continuité traduit le **principe de conservation de la masse** : la variation de masse pendant un temps  $dt$  d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

On considère un élément de volume fixe de fluide :  $dV = dx dy dz$ .

Sa masse peut s'exprimer comme :  $\rho dV$ .

La variation de cette masse pendant  $dt$  s'écrit :  $dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$ .

Cette variation doit alors être égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces de l'élément de volume  $dV$ .

Suivant l'axe  $y$ , le fluide entre avec la vitesse  $v_y$  et sort avec la vitesse  $v_{y+dy}$ . Par conséquent, la masse entrant pendant le temps  $dt$  s'exprime par  $(\rho v dx dz dt)_y$  et la masse sortant par  $(\rho v dx dz dt)_{y+dy}$ .

Le bilan sur l'axe  $y$  donne :  $[(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz dt$ . Un développement au premier ordre permet d'écrire :

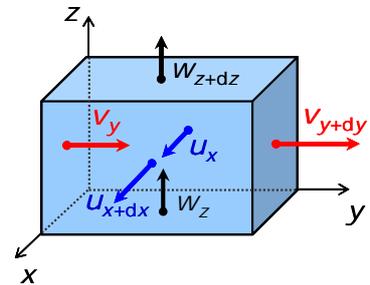
$$(\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy$$

Il reste alors :  $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz dt$  suivant l'axe  $y$ .

Par analogie sur les deux autres axes, on trouve :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \text{ suivant l'axe } x, \text{ et}$$

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy dt \text{ suivant l'axe } z.$$



Au total, à travers les six faces on a, puisque  $dx dy dz = dV$  :  $-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$

La conservation de la masse du volume  $dV$  s'écrit donc :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v})}$$

L'équation de continuité peut également s'établir à partir d'un bilan global. Lorsqu'on effectue un bilan non plus sur un volume élémentaire mais sur un volume fini de fluide, les quantités étudiées apparaissent sous forme d'intégrales de volume. On parle de **bilan global**. Ainsi, par exemple, la masse d'un volume de fluide contenue dans le volume  $V$  s'écrit :

$$m = \iiint_V \rho(M, t) dV$$

Calculons les **masses entrantes** pendant  $dt$  à travers la surface  $S$  limitant le volume  $V$  :

$$dm_e = - \left( \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt$$

et écrivons la conservation de la masse :

la variation de masse du volume  $V$  par unité de temps  $\frac{dm}{dt}$  est égale aux masses entrantes dans  $V$  (à

travers  $S$ ) par unité de temps  $\frac{dm_e}{dt}$ , soit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Le théorème de Green-Ostrogradski (voir note n° 7 de bas de page 8) permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

Ou, puisque le volume de contrôle  $V$  est fixe :

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Cette relation étant valable quelque soit  $V$ , elle entraîne l'équation de continuité, qui est une équation locale valable en tout point du fluide (voir note 8 de bas de page 9) :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0}$$

La divergence est négative si le fluide est en phase de compression ( $\partial \rho / \partial t > 0$ ), et la divergence est positive si le fluide est en phase de dilatation ( $\partial \rho / \partial t < 0$ ). S'il n'y a ni compression, ni dilatation (fluide isovolume) la divergence est nulle.

## Cas particuliers

Écoulement permanent

Dans ce cas, il n'y a pas de variation explicite avec le temps,  $\partial / \partial t = 0$ , d'où :

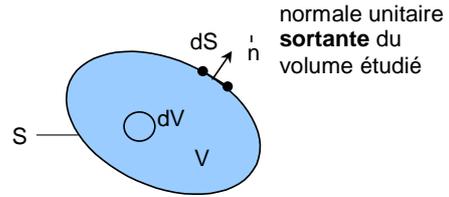
$$\boxed{\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0}$$

Fluide incompressible

Un écoulement est incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement. Les particules de fluide ayant une masse constante par construction, leur masse volumique est donc constante au cours de leur écoulement.

$\rho = \text{cte}$  lorsque l'on suit une particule dans son mouvement  $\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0}^{11}$$



<sup>11</sup> La démonstration rigoureuse sera faite dans le chapitre 4, lorsque l'on aura vu la notion de dérivée particulaire.

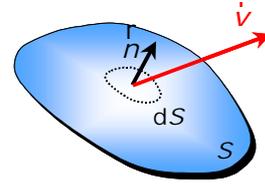
# Débits

## Débit-masse et débit-volume

Le **débit-masse** à travers une section  $S$  est la quantité de fluide qui traverse la section  $S$  par unité de temps. À travers la surface  $S$ , le débit-masse de fluide, noté  $q$  ou  $\dot{m}$ , est donné par :

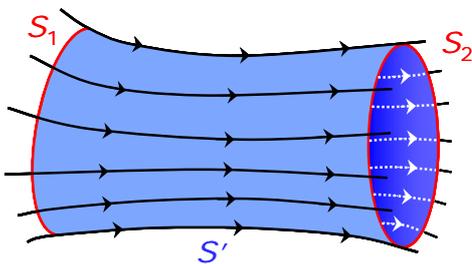
$$\dot{m} = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{en kg/s})$$

Les débits sont généralement comptés positivement dans le sens de l'écoulement :  $\mathbf{n}$  est donc orienté dans le sens de l'écoulement.



Le **débit-volume** à travers la surface  $S$ , noté  $q_v$  ou  $\dot{V}$ , est donné par :

$$\dot{V} = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{en m}^3/\text{s})$$



Nous avons vu que toutes les lignes de courant s'appuyant sur une même courbe fermée constituent une surface appelée tube de courant. **Si l'écoulement est permanent, alors le débit massique est conservé à travers toute section droite du tube de courant :**

$$\dot{m}(S_1) = \dot{m}(S_2)$$

Toutes les particules intérieures à ce tube à une certaine époque y resteront toujours intérieures du fait que leurs trajectoires stationnaires ne peuvent à aucun moment percer la surface latérale du tube de courant.

Plus précisément, appliquons l'équation de continuité en régime permanent,  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ , et intégrons la sur tout le volume  $V$  du tube :

$$\iiint_V \text{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

Transformons l'intégrale de volume en intégrale de surface par le théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{S_1+S_2+S'} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$\iint_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S'} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Les deux premiers termes du membre de gauche sont les débits massiques respectivement à travers les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (au signe près). Le troisième terme est nul par définition d'une ligne de courant (tangente à  $\mathbf{v}$ , donc telle que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  en chaque point de la surface latérale  $S'$ ). Soit :

$$-\dot{m}(S_1) + \dot{m}(S_2) = 0$$

### Remarque

Si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est aussi conservé. Pour la plupart des applications en hydraulique où l'eau est considérée comme un milieu incompressible, le débit est pris au sens volumique. En revanche, en aérodynamique la densité du gaz varie, seul le débit massique est significatif du flux de matière.

Notion de flux généralisé

Les débits massique et volumique sont des cas particuliers de **flux d'une grandeur à travers une surface**. Soit  $f(x,y,z,t)$  une fonction quelconque et  $S$  une surface fixe. Le flux élémentaire  $dF$  de la grandeur  $f$  à travers l'élément de surface  $dS$  de  $S$  sous l'action de la vitesse  $\vec{v}(M, t)$  vaut par définition :

$$dF = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Par convention, le vecteur directeur de la normale  $\vec{n}$  est orienté positivement vers l'extérieur, si bien qu'un flux « sortant » sera positif. Le flux total à travers  $S$  s'exprime par :

$$F = \iint_S dF = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

La valeur de cette intégrale dépend généralement de la fonction considérée  $f$ , de la surface limite  $S$  et du temps.

---

## Étude locale du champ de vitesse : rotation et déformation

Nous avons envisagé dans la première partie les représentations permettant la description cinématique du mouvement d'un fluide. Au sein de l'écoulement, chaque petit volume de fluide subit des changements de **position**, d'**orientation** et de **forme**. Ici nous allons introduire les éléments qui caractérisent ces changements. Pour cela, nous allons étudier la cinématique du changement de position d'un « petit volume » de fluide, sous l'hypothèse de « petits déplacements ». La nécessité d'une telle analyse n'est pas évidente a priori, mais nous verrons plus loin que les résultats obtenus ont une signification physique importante.

### Analyse de la variation spatiale du champ de vitesses

Considérons, à l'instant  $t$ , un point  $M(x_i)$  où la vitesse est  $\vec{v}(v_i)$  et un point infiniment voisin  $M'$  de coordonnée  $(x_i+dx_i)$  où la vitesse  $\vec{v}'$  a pour coordonnées  $v'_i = v_i + dv_i$ . Le vecteur variation spatiale  $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'}$  a pour coordonnées  $(dx_i)$ .

Les points  $M$  et  $M'$  étant infiniment voisins, nous pouvons effectuer un développement au 1<sup>er</sup> ordre des 3 composantes de la vitesse :

$$v'_i = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3$$

soit avec la règle de sommation d'Einstein<sup>12</sup> :

$$v'_i = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

Les 3 équations peuvent se mettre sous la forme tenso-vectorielle<sup>13</sup> suivante :

---

<sup>12</sup> Nous adopterons la règle de sommation d'Einstein qui permet d'éviter l'utilisation lourde des symboles  $\sum_{j=1}^n$ .

À chaque fois que, dans un monôme, un même indice figure deux fois, il représente une sommation de 1 à  $n$  (si l'espace de travail est de dimension  $n$ ). Les indices répétés sont appelés indices de sommation ou indices muets ; en effet ils ne jouent aucun rôle dans le résultat. En revanche, un indice non répété est appelé indice libre ou indice franc.

$$\vec{v}' = \vec{v} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{v}' - \vec{v} = d\vec{v} = \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M}}$$

La relation introduit le tenseur du second ordre **gradient du vecteur vitesse**, noté  $\overline{\text{grad}} \vec{v}$ , dont les composantes sont définies matriciellement par :

$$\overline{\text{grad}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

ligne ↗  
colonne ↘

$\overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M}$  est le produit contracté à droite, c'est-à-dire sur l'indice colonne, des deux tenseurs.

#### Remarque

La relation  $d\vec{v} = \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M}$  aurait pu être établie directement par définition de la différentielle d'un vecteur :

$$f \text{ scalaire : } df = \overline{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}$$

$$\vec{v} \text{ vecteur : } d\vec{v} = \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M}$$

Introduisons la décomposition du tenseur gradient de vitesse en partie symétrique et antisymétrique. Le tenseur  $\overline{\text{grad}} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  est la somme d'un tenseur symétrique  $\overline{D} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{v} + \overline{\text{grad}}^t \vec{v})$ , où l'indice

supérieur t indique la transposition, de composante générale :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

et d'un tenseur antisymétrique  $\overline{\Omega} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{v} - \overline{\text{grad}}^t \vec{v})$  de composante :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

## Mouvement infinitésimal d'un petit volume de fluide

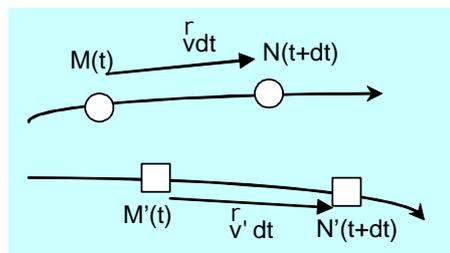
La signification de ces deux tenseurs apparaît lorsque l'on suit, pendant le pas de temps  $dt$ , le déplacement de deux points M et M' extrêmement voisins où les vitesses sont respectivement  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$ .

Au temps  $(t + dt)$ , ces points M et M' se placent en N et N' tels que :

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \vec{v}' dt - \vec{v} dt$$

Compte tenu de ce qui précède, à savoir  $\vec{v}' - \vec{v} = \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M}$ , :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{NN'} &= \overrightarrow{MM'} + \overline{\text{grad}} \vec{v} \cdot d\vec{M} dt \\ &= \overrightarrow{MM'} + \overline{D} \cdot \overrightarrow{MM'} dt + \overline{\Omega} \cdot \overrightarrow{MM'} dt \end{aligned}}$$



<sup>13</sup> Nous utiliserons le plus souvent possible les écritures tensorielles. En effet une loi qui a pour objet de traduire un phénomène physique doit être intrinsèque, et donc en particulier s'exprimer indépendamment d'un choix de système de coordonnées. Cette écriture a de plus les mérites d'être moins encombrante et de faire apparaître directement certaines propriétés fondamentales de la loi (symétries, directions privilégiées, invariants, etc.).

$\overrightarrow{NN'}$  se déduit de  $\overrightarrow{MM'}$  par une translation pure (premier terme du second membre), par une déformation (second terme) et par une rotation (dernier terme). Cela s'éclaire en prenant  $\overrightarrow{MM'}$  disposé parallèlement à chacun des axes d'un repère orthonormé comme nous allons le faire.

Termes diagonaux : déformation cubique

En posant nuls tous les termes hors-diagonale, il reste :

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Pour comprendre physiquement à quoi correspondent ces termes diagonaux, analysons un volume parallélépipédique dans un écoulement plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . La distance AB subit la variation :

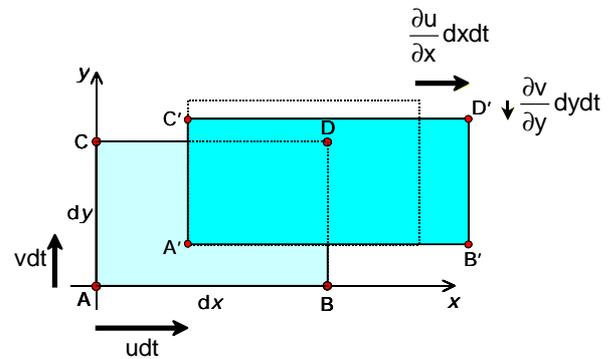
$$d(AB) = [u(B) - u(A)]dt = \left[ \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

Comme  $AB = dx$ , le taux de variation de longueur (= accroissement relatif) de AB vaut :

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

Il apparaît ainsi que la composante  $d_{11}$  représente le taux de vitesses d'élongation dans le sens des x :

$$d_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{AB} \frac{d(AB)}{dt}$$



On montrerait de même que  $d_{22}$  et  $d_{33}$  sont les taux de vitesses d'élongation suivant x et y. Cette variation de longueur des arêtes entraîne évidemment une variation de volume qui, pour une particule parallélépipédique de côtés AB, AC, AE s'exprime par :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dAB}{AB} + \frac{dAC}{AC} + \frac{dAE}{AE}$$

Compte tenu des résultats antérieurs, on obtient :

$$\frac{dV}{V dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = d_{ii} \equiv \text{trace}(\overline{D})$$

La variation relative de volume prise en suivant la particule au cours de son mouvement s'exprime simplement par :

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \text{div} \vec{v}$$

**La vitesse de variation cubique (dilatation ou compression) d'un élément de volume rapportée à l'unité de volume est égale à la divergence du champ de vitesse de l'écoulement.**

Selon que la vitesse de dilatation cubique est positive ou négative, il y a expansion ou réduction du volume du domaine fluide. Un cas particulier important est celui où cette vitesse de dilatation cubique est nulle. Il correspond à une **évolution isovolume** qui sera étudiée plus en détail dans la suite du

cours. L'évolution isovolume s'identifie avec la notion de fluide incompressible, comme nous l'avait déjà montré l'équation de continuité :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \rho = \text{cte} \quad (\text{dans le temps et dans l'espace})$$

Nous retiendrons donc que :

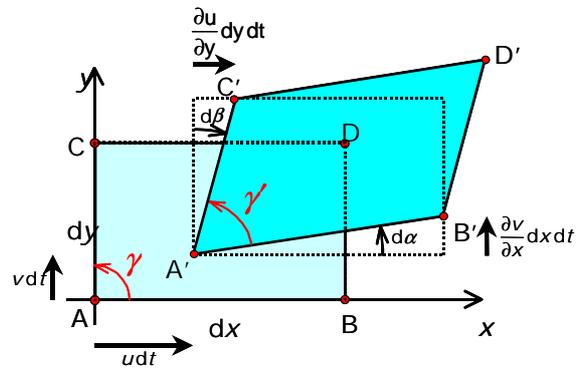
Les termes diagonaux de la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse mesurent les **taux de vitesse d'élongation** dans chacune des directions x,y,z. La trace est égale à la divergence du vecteur vitesse. Elle représente la **vitesse de dilatation cubique** (le taux de dilatation en volume) d'un domaine fluide élémentaire.

Termes hors diagonale de la partie symétrique : déformation angulaire

En posant nuls tous les termes diagonaux du tenseur symétrique  $\bar{\bar{D}}$ , il reste :

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

Pour interpréter ces termes, reconsidérons un écoulement dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . On remarque que dans ce cas, la composante u suivant x de la vitesse varie avec y, et que la composante v suivant y varie avec x.



Soumise aux effets des termes non-diagonaux, l'évolution de la facette ABCD du domaine fluide entre les instants t et t+dt est telle que celle schématisée à la figure ci-dessus. Comme sur la figure précédente, est schématisé également la translation globale de u dt suivant x et v dt suivant y. Mais on a en plus une **déformation angulaire** que nous analysons ici.

Le côté AB tourne d'un angle  $d\alpha$  que nous pouvons confondre avec sa tangente :  $d\alpha \approx \tan \alpha$ .

Or le déplacement du point B relativement au point A peut être estimé par :

$$v(B)dt - v(A)dt = \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dt - vdt = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

On en déduit :

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \approx d\alpha$$

De la même façon, le côté AC tourne d'un angle  $d\beta$  tel que  $d\beta \approx \frac{\partial u}{\partial y} dt$ .

Ainsi l'angle  $\gamma = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  varie d'une quantité  $d\gamma = \gamma' - \gamma = (\gamma - d\alpha - d\beta) - \gamma = -d\alpha - d\beta$  et l'on a :

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv -2d_{12}$$

On peut donc conclure que :

Les termes non-diagonaux de la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse représentent les **vitesse de déformations angulaires** d'un domaine fluide élémentaire.

Le tenseur  $\overline{\overline{D}}$ , partie symétrique du tenseur  $\overline{\overline{\text{grad}v}}$ , est appelé **tenseur des vitesses de déformation** ou tenseur des taux de déformation.

Partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse : rotation

Analysons au premier ordre la rotation pure (= rotation « en bloc ») du domaine ABCD autour d'un axe Az. Dans la limite de « petit déplacement », le choix de l'axe de rotation sur l'arête A et non au centre du domaine ABCD est sans conséquence sur la démonstration.

Le déplacement suivant l'axe y du point B relativement au point A vaut :

$$[v(B) - v(A)]dt = \left[ \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v \right] dt = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

$$D'où : d\alpha \approx \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

De façon tout à fait analogue, on établit le déplacement du point C et l'angle  $d\beta$  :

$$d\beta \approx \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$d\gamma = \gamma' - \gamma = 0 \text{ pour une rotation pure, soit : } d\alpha = -d\beta$$

On peut alors définir la vitesse de rotation angulaire autour de l'axe z :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \omega_{21}$$

On remarquera que  $\omega_{21}$  n'est autre que la moitié de la composante suivant z du rotationnel du vecteur vitesse au point A :

$$\text{rot}^r v = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

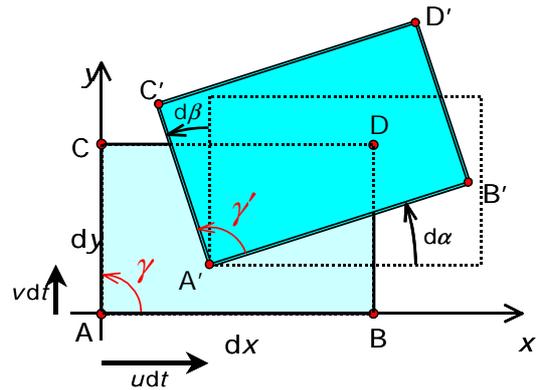
En généralisant, on définit  $\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2} \overline{\overline{\text{rot}v}}$ , c'est le **vecteur vitesse angulaire de rotation** (ou taux de rotation) ou **vecteur tourbillon**. Sa direction indique l'axe de rotation, son amplitude le taux de rotation locale.

Un tel résultat peut se retrouver en remarquant qu'au cours d'un tel mouvement le domaine se comporte comme un solide. Pour un corps indéformable en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe  $zz'$ , le vecteur vitesse en un point situé à  $\vec{r}$  de cet axe s'exprime par :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \omega \wedge \vec{r}$$

Le vecteur vitesse a ainsi pour composante en coordonnées cylindriques  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \omega r$ ,  $v_z = 0$  ce qui conduit à un rotationnel :

$$\overline{\overline{\text{rot}v}} = \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z$$



On peut donc retenir que :

La partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse caractérise la rotation « en bloc » (sans déformation). Le vecteur vitesse angulaire locale est donné par le vecteur tourbillon du champ de vitesse, moitié du vecteur rotationnel local.

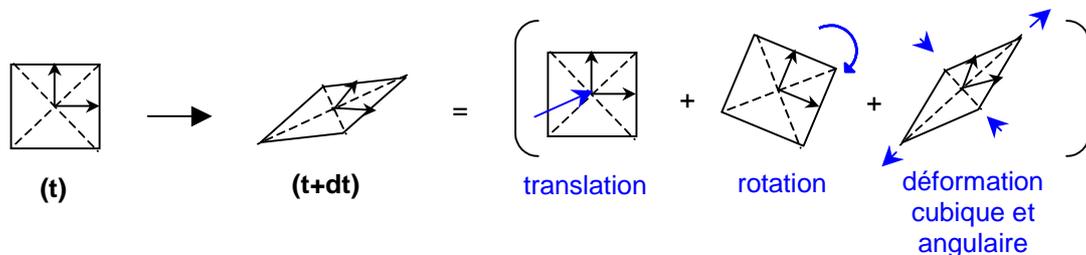
Le tenseur  $\overline{\overline{\Omega}}$ , partie antisymétrique du tenseur  $\overline{\overline{\text{grad}v}}$ , est appelé **tenseur des vitesses de rotation** ou tenseur des taux de rotation.

On peut remarquer que  $\overline{\overline{\Omega}} \cdot \overrightarrow{dM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{dM}$

Les trois mouvements élémentaires fondamentaux d'un petit parallélépipède rectangle sont résumés sur la figure ci-dessous qui schématise les changements de position, d'orientation et de forme. Ainsi la vitesse donnée par :

$$\overrightarrow{v}_{M'} = \overrightarrow{v}_M + \frac{1}{2} \text{rot}v \wedge \overrightarrow{MM'} + \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{MM'}$$

apparaît comme la somme d'une vitesse de translation, d'une vitesse de rotation et d'une vitesse de déformation.



## Types particuliers d'écoulement

### Écoulements isovolumes

Nous avons vu qu'une **évolution isovolume** s'identifie avec la notion de **fluide incompressible** ( $\rho = \text{cte}$ ). Le champ de vitesse de l'écoulement est à divergence nulle :

$$\text{div}v(M, t) = 0 \quad \forall M, \forall t$$

La condition traduit la **conservation du volume d'une particule fluide au cours de son déplacement**. En d'autres termes, translation, rotation et déformation de la particule s'effectuent sans compression ni expansion de son volume élémentaire.

On peut souvent traiter l'eau comme un fluide incompressible. Par contre, très généralement les gaz sont traités comme des fluides compressibles. Cependant, nous verrons qu'aux faibles vitesses d'écoulement (aux nombres de Mach petits devant un) on peut traiter l'écoulement à l'aide des équations qui régissent les écoulements incompressibles. Pour l'air, sous les conditions normales de température et de pression, la limite incompressible se situe en deçà d'une vitesse de l'ordre de 60 à 70 m/s (200 à 250 km/h).

### Écoulements irrotationnels. Écoulements potentiels

Les mouvements qui s'effectuent sans rotation sont appelés **écoulements irrotationnels**. Ils jouent un rôle théorique important et permettent une bonne approximation de nombreux écoulements réels. Nous

aurons l'occasion de les étudier plus en détail. La propriété distinctive de cette classe d'écoulements s'écrit naturellement :

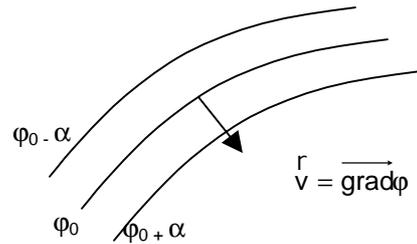
$$\boxed{\vec{\text{rot}}\vec{v}(M,t) = 0 \quad \forall M, \forall t}$$

Il s'agit d'une condition locale qui exprime que le déplacement de toute particule fluide a lieu sans rotation de celle-ci sur elle-même.

La condition d'irrotationnalité du vecteur vitesse assure l'existence d'une fonction de champ scalaire  $\varphi(M,t)$  telle que, à chaque instant  $t$  et en tout point  $M$  du champ, on ait<sup>14</sup> :

$$\vec{v}(M,t) = \text{grad}\varphi(M,t)$$

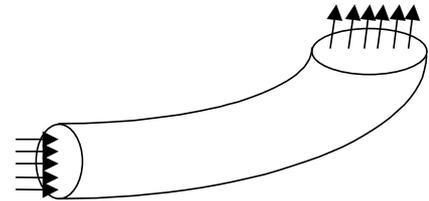
Le champ de vitesse dérive d'un potentiel et l'analyse de l'écoulement peut être effectuée à l'aide de la seule fonction  $\varphi$ . La fonction  $\varphi$  est appelée **fonction potentiel des vitesses** et l'écoulement est dit **écoulement potentiel**. Par définition donc,  $\vec{v}$  est un vecteur normal aux surfaces  $\varphi = \text{cte}$  dirigé vers les potentiels croissants<sup>15</sup>.



Lorsque l'écoulement est incompressible,  $\varphi$  est solution de l'équation de Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$ , puisque  $\text{div}\vec{v} = \text{div}(\text{grad}\varphi) = 0$ . L'étude des écoulements incompressibles irrotationnels est ainsi ramenée à la résolution d'un problème aux limites pour l'équation de Laplace.

## Écoulements unidimensionnels

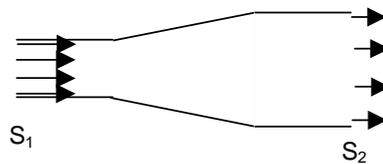
Dans un **écoulement unidimensionnel**, toutes les variables ne dépendent que d'une seule coordonnée d'espace. L'écoulement peut être rapporté à une abscisse curviligne le long de laquelle se fait l'écoulement. Il suppose que les composantes de la vitesse dans le plan orthogonal à cette abscisse soient très faibles et que la vitesse  $y$  soit uniforme<sup>16</sup> (ne dépende que de l'abscisse).



En **régime permanent**, l'équation de conservation de la masse appliquée à un tube de courant entre les sections droites fixes 1 et 2 se traduit par la conservation du débit massique (voir page 23) :

$$\int_{S_1} \rho v dS = \int_{S_2} \rho v dS$$

$$\boxed{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dot{m}}$$



<sup>14</sup> C'est la réciproque locale de l'identité  $\vec{\text{rot}}(\text{grad}f) = 0$  : si  $\vec{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0}$ , alors  $\exists$  localement  $f$  tel que  $\vec{A} = \text{grad}f$ , et ceci s'étend à tout domaine simplement connexe.

<sup>15</sup> C'est un usage malheureux en mécanique des fluides car, par analogie avec de nombreux autres domaines de la physique (champ électrique  $\vec{E}$  ...), c'est la fonction  $-\varphi$  qui aurait dû être appelée potentiel des vitesses. En effet, dans le langage mathématique, si une force  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel  $U$ , on écrit  $\vec{F} = -\text{grad}U$  et  $\vec{F}$  est un vecteur normal aux surfaces  $U = \text{cte}$ , dirigé vers les potentiels décroissants. De toutes façons, les surfaces  $\varphi = \text{cte}$  sont des surfaces équipotentielles.

<sup>16</sup> En absence de viscosité, à la paroi, la vitesse  $v$  diffère de celle de la paroi. On admet alors que la vitesse est constante sur une normale à la paroi. Ainsi, dans une canalisation cylindrique, la vitesse est constante sur une section droite.

# Dynamique des fluides parfaits

Nous nous proposons maintenant de faire de la dynamique, c'est-à-dire de considérer non seulement des mouvements, mais aussi des **efforts**, une **loi de comportement** et d'appliquer le **principe fondamental de la dynamique**.

Dans les problèmes de mécanique des fluides, il importe souvent de comprendre la structure de l'écoulement et de calculer les répartitions de variables comme la pression, la vitesse, la température et la masse volumique dans le milieu fluide. Dans les applications technologiques, le fluide s'écoule autour de corps solides ou dans des conduites ; la connaissance des **distributions de pression et de vitesses** au voisinage des parois est particulièrement utile. On cherche aussi dans beaucoup de cas à déterminer les **contraintes** ou des quantités intégrées comme la **force** et le **moment** qui s'exercent sur un corps solide fixe ou en mouvement.

Nous nous limiterons dans ce chapitre aux mouvements des **fluides parfaits**, c'est-à-dire **sans frottement** (fluides non visqueux) **et sans échange de chaleur**, ou encore un fluide dont les transformations sont thermodynamiquement réversibles. Nous étudierons tout particulièrement le cas de fluides incompressibles.

## Bilan de quantité de mouvement : équation d'Euler

La quantité de mouvement d'une particule matérielle de masse  $m$  et de vitesse instantanée  $\vec{v}$  est  $m\vec{v}$ . Son accélération est  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ .

Comme nous l'avons vu, l'idée directrice de la description eulérienne est celle de l'observation, en un point quelconque fixe de l'écoulement, des propriétés de toute particule fluide qui passe en ce point. Les variables d'Euler n'étant pas liées à une même particule fluide au cours du temps, le problème se pose de savoir exprimer, avec cette formulation, des variations prises en suivant le mouvement d'une seule et même particule. Par définition, de telles variations seront dites **particulières** et l'on parlera de **dérivation particulière** (ou dérivée matérielle) chaque fois qu'il en sera ainsi.

### Accélération d'une particule fluide. Dérivée particulière

Dérivation particulière d'une fonction scalaire

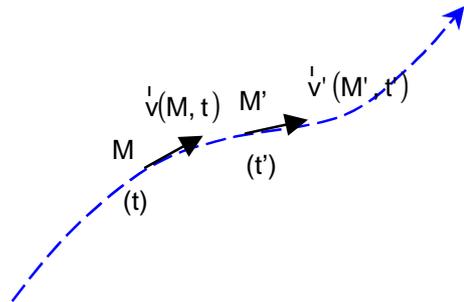
Soit  $f(x, y, z, t)$  une fonction des variables d'Euler  $x, y, z, t$ . Sa différentielle vaut :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

ce qui s'écrit encore, en introduisant les vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  et  $d\vec{M} = (dx, dy, dz)$  :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$$

Comme l'illustre la figure ci-contre, on ne pourra parler de dérivée particulaire qu'à condition que le vecteur d'accroissement spatial  $\overrightarrow{dM}$  se confonde avec celui des positions prises successivement par la particule aux instants  $t$  et  $t + dt$ . Cette condition impose donc de fixer  $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v} dt$ , où  $\overrightarrow{v}$  désigne le vecteur vitesse de la particule au point  $M$  à l'instant  $t$ .



On obtient alors l'expression générale de la dérivation particulaire d'une fonction scalaire :

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f}} \quad 17$$

ou ses formes équivalentes :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

La relation ci-dessus dégage, en variables d'Euler, deux contributions additives dans l'expression de la variation d'une fonction prise en suivant le mouvement :

- la première est qualifiée de **variation temporelle** et traduit le caractère **instationnaire** de l'écoulement ;
- la seconde résulte du **déplacement** du fluide (vitesse  $\overrightarrow{v}$ ) et de l'inhomogénéité spatiale de la fonction ( $\overrightarrow{\text{grad}f}$ ) dans une direction non exclusivement orthogonale au déplacement. Elle est qualifiée de variation **convective**.

Application : équation de continuité d'un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible, la masse volumique des particules de fluide est constante au cours de leur écoulement. En d'autres termes, la dérivée de la masse volumique par rapport au temps, lorsque l'on suit la particule dans son mouvement, est nulle :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\rho} = 0$$

Or l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \overrightarrow{v}) = 0$$

soit, en développant la divergence :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\rho} = 0$$

ou, par définition de la dérivée particulaire :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \overrightarrow{v} = 0$$

<sup>17</sup> La dérivée particulaire de  $f$  est parfois notée  $\frac{Df}{Dt}$  au lieu de  $\frac{df}{dt}$ .

$$\boxed{\text{Fluide incompressible} \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{v} = 0} \text{ que l'écoulement soit stationnaire ou non.}$$

Dérivation particulaire d'une fonction vectorielle

Soit  $\vec{A}(x, y, z, t)$  une fonction vectorielle quelconque des variables d'Euler, de composantes  $A_i(x, y, z, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En appliquant l'expression de la dérivation particulaire d'une fonction scalaire à chaque composante, on obtient en notation indicielle :

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \text{ avec } i = 1, 2, 3$$

qui est une égalité vectorielle, l'indice  $j$  étant muet par convention de sommation, mais l'indice  $i$  demeurant libre, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ \frac{dA_2}{dt} = \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{dA_3}{dt} = \frac{\partial A_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \end{cases}$$

La relation introduit le tenseur du second ordre gradient du vecteur  $\vec{A} : \overline{\text{grad}} \vec{A} = \partial A_i / \partial x_j$ . La relation peut encore se mettre sous la forme tenso-vectorielle suivante :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{A}$$

Application : expression de l'accélération

C'est, par définition, la dérivée de la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au temps lorsque l'on suit la particule dans son mouvement. L'expression de l'accélération en variables d'Euler se déduit immédiatement des relations précédentes en y faisant  $\vec{A} = \vec{v}$  :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{v}}$$

Le premier terme du membre de droite, qui correspond à la dérivée par rapport au temps au point considéré, est une **dérivée locale**. Le deuxième terme, qui apparaît comme le taux de variation de la vitesse dû au mouvement (à la convection de la particule), est une **dérivée convective**.

En explicitant les relations en composantes, on pourra vérifier que l'accélération se met également sous la forme purement vectorielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

## Principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide parfait

Le principe fondamental de la dynamique exprime que la variation dans le temps de la quantité de mouvement d'un **système matériel à nombre constant de particules** est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées.

Pour un fluide, on va appliquer la loi fondamentale de la dynamique à un **domaine matériel que l'on suit dans son mouvement**. Cela se traduira par :

La **dérivée particulaire** de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures appliquées au domaine.

Considérons un **volume matériel** fini de fluide  $V(t)$  regroupant un ensemble donné de particules fluides d'un écoulement quelconque, de frontière  $S(t)$  et de normale extérieure unitaire  $\vec{n}$ .

Au cours du mouvement, ce domaine va changer de position, de forme, de dimension, mais restera constitué des mêmes particules fluides (il n'échange pas de masse avec le reste du fluide).

La résultante des quantités de mouvement du volume  $V$  est :

$$\iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse d'un point matériel (particule fluide) par rapport au référentiel fixe.

Sa variation dans le temps vaut <sup>18</sup> :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV \right) = \iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

où  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  est l'accélération d'une particule fluide par rapport au référentiel fixe.

Dans le recensement des forces exercées sur  $V$ , il faut distinguer :

- les forces de volume s'exerçant à distance en tout point  $M$  du volume : la densité des forces par unité de volume exercées par le champ de gravité est  $\rho \vec{g}$  ; la résultante sur  $V$ , c'est-à-dire « le poids », vaut :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

- les forces de surface qui sont transmises par le fluide extérieur au domaine en tout point  $P$  de la surface de contact  $S$  limitant ce domaine : la densité des forces par unité de surface est  $-\vec{p} \cdot \vec{n}$  ; sa résultante, la « force de pression », vaut :

$$\iint_S -\vec{p} \cdot \vec{n} dS$$

<sup>18</sup> On montre que la variation dans le temps de la résultante des quantités de mouvement,  $\rho \vec{v}$  par unité de volume, est égale à la résultante des quantités d'accélération,  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$  par unité de volume, c'est-à-dire que :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV \right) = \iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

Pour ne pas alourdir l'établissement de l'équation fondamentale de la dynamique, nous démontrerons cette relation à la fin du paragraphe.

La variation dans le temps de la quantité de mouvement s'exprime alors par :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iint_S -p \vec{n} dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV$$

ou bien encore, en appliquant le théorème d'Ostrogradski, déjà rencontré en hydrostatique, et en faisant passer tout dans le même membre :

$$\iiint_{V(t)} \left( \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\text{grad}} p - \rho \vec{g} \right) dV = 0$$

La relation est valable quel que soit le domaine fluide V. En outre, nous pouvons sans problème supposer l'intégrand continu<sup>19</sup>. Alors l'intégrand est identiquement nul (voir note n° 8 en bas de page 9), et il vient l'expression locale du bilan de quantité de mouvement, nommée **équation d'Euler** :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g}}$$

C'est une équation locale dont les différents termes sont homogènes à une force par unité de volume et s'expriment donc en N/m<sup>3</sup>.

Indications sur la démonstration de l'expression de la variation de la quantité de mouvement (voir note 18).

On montre que la dérivée particulière d'une intégrale de volume, c'est-à-dire d'un volume que l'on suit dans son mouvement, s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} G dV = \iiint_{V(t)} \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}(G\vec{v}) \right] dV$$

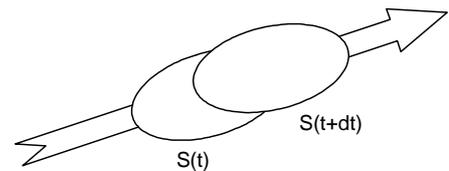
où G(M, t) est une fonction volumique des variables (x, t) attachée au domaine V contenant un ensemble de particules fluides se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$ . Plutôt que de faire ici la démonstration mathématique rigoureuse de ce théorème, appelé théorème de transport, nous donnons ci-après une interprétation physique.

En application du théorème d'Ostrogradski à l'intégrale de volume portant sur le terme de divergence, on a :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} G dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} G \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

La variation de l'intégrale de volume peut être décomposée en deux contributions :

- une variation temporelle, à volume fixé :  $\iiint_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV$
- une variation spatiale, à t fixé, due au déplacement de la frontière S à la vitesse  $\vec{v}$  :  $\iint_{S(t)} G \vec{v} \cdot \vec{n} dS$  ; c'est ce déplacement qui conduit à la variation d'occupation spatiale des particules fluides qui transportent la quantité G.



Si nous sommes amenés à faire le bilan en volume d'une grandeur f massique (comme la plupart des grandeurs que nous manipulons), la fonction pf doit être substituée à G dans les relations précédentes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho f dV &= \iiint_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \text{div}(\rho f \vec{v}) \right] dV \\ &= \iiint_V \left[ \left( \rho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \left( f \text{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} f \right) \right] dV \\ &= \iiint_V \left[ \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f \right) + f \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) \right] dV \end{aligned}$$

La dernière intégrale du second membre est identiquement nulle, en vertu de l'équation de continuité. Il reste alors :

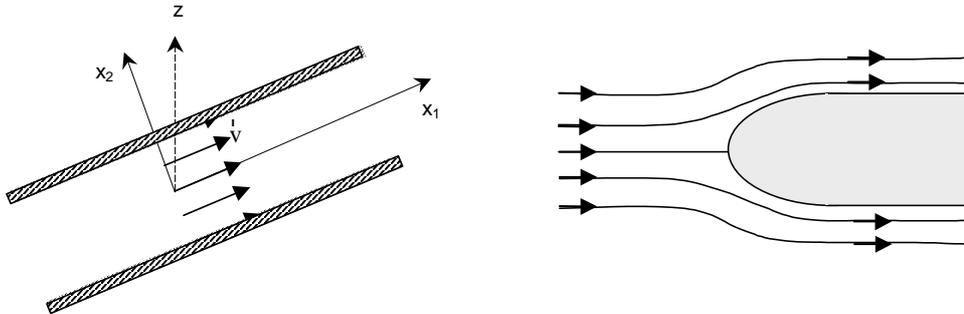
$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{V(t)} \rho f dV \right) = \iiint_{V(t)} \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f \right) dV = \iiint_{V(t)} \rho \frac{df}{dt} dV$$

<sup>19</sup> Sans problème, à condition qu'une interface du type liquide-atmosphère ou liquide-liquide ne s'avise pas de traverser V.

## Cas particulier d'un écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible

Lorsque l'écoulement est rectiligne, on parle d'**écoulement unidirectionnel**. Il est tel que la vitesse est en tout point parallèle à une direction unique fixe.

Les trajectoires sont des droites parallèles à l'axe  $x$  de l'écoulement. C'est le cas, par exemple, d'un écoulement dans une canalisation cylindrique, ou d'un écoulement libre dans les zones non perturbées par un obstacle.



L'équation d'Euler s'écrit pour un **fluide incompressible** dans le champ de pesanteur :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} p + \rho \vec{g} = -\text{grad} p - \rho g \text{grad} z = -\text{grad} p - \text{grad}(\rho g z) = -\text{grad}(p + \rho g z)$$

où  $z$  est l'altitude (comptée positivement suivant la verticale ascendante) et  $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$  pour un écoulement unidimensionnel (les composantes de  $\vec{v}$  dans le plan perpendiculaire à la direction de cet écoulement sont nulles).

L'hypothèse d'écoulement rectiligne implique la colinéarité de  $\vec{v}$  et  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , donc de  $\vec{v}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho g z)$  :  
 $\overrightarrow{\text{grad}}_{\perp}(p + \rho g z) = 0$  où  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\perp}$  rappelle que le gradient est pris dans la direction perpendiculaire.

Par conséquent, **l'expression  $(p + \rho g z)$  reste constante quand on se déplace normalement aux trajectoires ; la répartition des pressions est hydrostatique.** Ce résultat peut sembler évident car lorsque la vitesse du fluide n'intervient pas, l'hydrostatique remplace la dynamique.

Si, de plus, l'écoulement est **permanent**, les composantes de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(p + \rho g z) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial x_2}(p + \rho g z) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial x_3}(p + \rho g z) \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation de conservation de la masse :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

on conclut que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho g z) = 0$$

soit  $(p + \rho g z) = \text{cte}$  dans tout l'écoulement unidirectionnel.

## Système complet d'équations

La résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la définition du système matériel, particules de fluide à l'intérieur d'une surface fermée. Un ensemble cohérent d'équations aux dérivées partielles permettant de résoudre le problème (qui comprend généralement quatre inconnues scalaires :  $v_1, v_2, v_3$  et  $p$ ) est constitué par :

- l'**équation de conservation de la masse**, soit une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v})$$

- l'**équation de la dynamique**, alias équations d'Euler, soit trois équations aux dérivées partielles scalaires :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

- des conditions aux limites : **sur une paroi<sup>20</sup>, en fluide parfait, on admet que le fluide glisse sans frottement** ; on impose seulement qu'il ne pénètre pas dans la paroi (rigide) et qu'il n'en décolle pas non plus, c'est-à-dire finalement que **la vitesse normale relative du fluide par rapport à la paroi  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  est nulle**.

Ces équations aux dérivées partielles ne peuvent être généralement intégrées que par recours à des méthodes numériques. Les champs des grandeurs caractéristiques du fluide ( $v, p, \dots$ ) sont alors connus dans tout le volume de contrôle.

Dans la plupart des problèmes, on n'étudie pas en général le mouvement des fluides à partir de ces diverses équations différentielles car, moyennant certaines conditions, il est possible d'en donner tout de suite une intégrale première soit sous forme du théorème de Bernoulli - que nous allons étudier dans la partie suivante - soit sous la forme du théorème d'Euler - que nous verrons dans la troisième partie.

---

## Théorème de Bernoulli et ses applications

Dans toute la suite nous nous limiterons à un **fluide incompressible** ( $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ).

### Établissement de l'équation de Bernoulli

Hypothèses

1. Le fluide est parfait (c'est-à-dire non visqueux).
2. La densité volumique des forces extérieures dérive d'un potentiel ; c'est le cas des forces de gravité  $\rho \mathbf{g}$  qui peuvent s'écrire :  $-\rho g \mathbf{e}_z = -\rho \text{grad}(gz)$ ,  $\mathbf{e}_z$  étant le vecteur vertical unitaire ascendant.
3. Le fluide est incompressible.
4. L'écoulement est stationnaire.

---

<sup>20</sup> Sur une interface avec un autre fluide, les choses sont plus complexes : on a une inconnue de plus (la forme de la surface libre) mais deux conditions aux limites (la continuité de la vitesse normale et de la pression) au lieu d'une.

Conclusion

$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z = \text{cte}$  sur chaque ligne de courant ou sur chaque trajectoire ; c'est pareil, ici, puisque l'écoulement est stationnaire. Tous les termes s'expriment en pascal.

Démonstration

Repartons de l'équation de la dynamique pour un fluide parfait :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} p + \rho \vec{g}$$

et tenons compte des hypothèses 2 et 3, à savoir :

$$\rho \vec{g} = -\text{grad}(\rho g z)$$

Après division par  $\rho = \text{cte}$ , il vient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} \frac{p}{\rho} - \text{grad} g z$$

Multiplions scalairement l'accélération par  $\vec{v}$ , sachant que  $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} - \vec{v} \cdot \text{grad} g z$$

Or, d'après l'expression de la dérivée particulière vue en début de chapitre, on a :

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \bullet = \vec{v} \cdot \text{grad} \bullet \text{ puisque, l'écoulement étant stationnaire (hypothèse 4), } \frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = 0$$

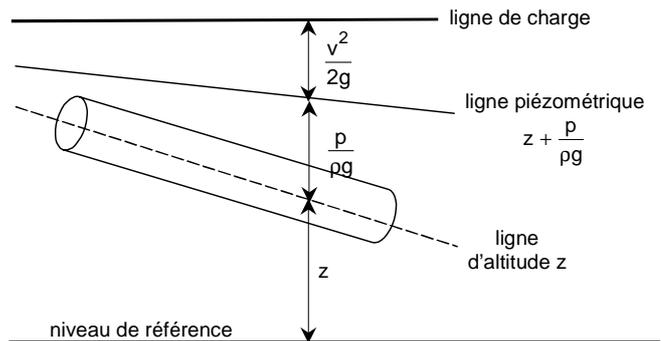
c'est-à-dire la quantité entre parenthèses est constante sur chaque ligne de courant (ou trajectoire).

$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$  est une grandeur homogène à une **hauteur de liquide** :

- $z$  est l'altitude,
- $z + \frac{p}{\rho g}$  est appelée la **charge piézométrique (ou hauteur piézométrique)**,
- $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$  est la **charge totale**.

Le théorème de Bernoulli peut alors s'interpréter graphiquement à partir des évolutions des différentes hauteurs le long du circuit. Comme l'illustre la figure, quand on suit l'unité de poids de fluide dans son mouvement le long de la trajectoire, on peut tracer trois lignes différentes :

- la **ligne d'altitude** qui représente la trajectoire du fluide,
- la **ligne piézométrique**, distante de la trajectoire de la quantité  $p/\rho g$ ,
- la **ligne de charge**, obtenue en ajoutant  $v^2/2g$  à la ligne piézométrique. Le théorème de Bernoulli conduit à une ligne de charge horizontale (charge totale = cte). **Il n'y a pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait.**



## Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli

Multiplions tous les termes de l'équation de Bernoulli par un volume  $V$  :

$$\rho V + \rho g z V + \frac{1}{2} \rho v^2 V = \text{cte}$$

- $\rho V$  est le travail des forces de pression : c'est l'**énergie potentielle** due aux forces de pression,
- $\rho g z V = mgz$  est l'**énergie potentielle** due aux forces de pesanteur,
- $\frac{1}{2} \rho v^2 V = \frac{1}{2} m v^2$  est l'**énergie cinétique**,
- $\text{cte} \cdot V = E_m$  est l'**énergie mécanique** totale.

Par conséquent,  $\boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{E_m}{V}}$  correspond à une énergie mécanique par unité de volume.

L'énergie mécanique reste alors constante le long d'une ligne de courant (il n'y a pas de dissipation d'énergie).

L'équation de Bernoulli peut également s'interpréter en termes de pression<sup>21</sup> (énergie par unité de volume) :

- $p$  est la **pression statique** (elle existe même s'il n'y a pas de mouvement),
- $p + \rho g z$  est la **pression motrice** ; elle génère le mouvement ( $\rho g z$  est la pression de pesanteur),
- $\frac{1}{2} \rho v^2$  est la **pression cinétique (ou pression dynamique)** ; elle résulte du mouvement,
- $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_t$  est la **pression totale**.

L'équation de Bernoulli montre alors que la pression totale reste constante le long d'une même ligne de courant (il n'y a pas de perte de pression dans l'écoulement d'un fluide parfait).

<sup>21</sup> Pour les applications aérodynamiques, où l'on considère le mouvement de gaz dans le champ de pesanteur terrestre, on considère généralement les pressions. En hydrodynamique, on travaille généralement avec les charges, homogènes à des hauteurs de liquide.

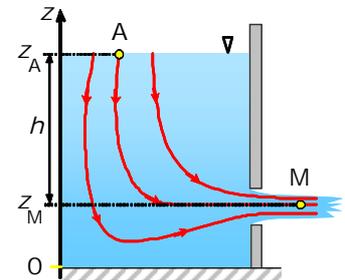
# Applications du théorème de Bernoulli

Dans les applications qui vont suivre, nous considérons des **écoulements permanents de fluides parfaits incompressibles**.

Écoulement par un orifice. Formule de Toricelli

Une des applications les plus simples du théorème de Bernoulli est celle conduisant à la vitesse de vidange d'un réservoir à surface libre par un orifice de section très petite devant celle du réservoir. Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point A de la surface libre et un point M du jet :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2$$



Comme il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface jet-atmosphère, la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique, qui est également celle de la surface libre. Par conséquent :

$$p_A = p_M = p_{atm}$$

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet ; la surface (point A) est pratiquement au repos :

$$v_A \ll v_M$$

Par conséquent :

$$\rho g (z_A - z_M) \approx \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

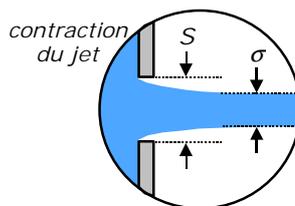
D'où la **formule de Toricelli** reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au dessus de l'orifice :

$$v_M = \sqrt{2gh}$$

Le débit volumique vaut :

$$\dot{V} = \sigma v_M = \sigma \sqrt{2gh}$$

où  $\sigma = C_c S$

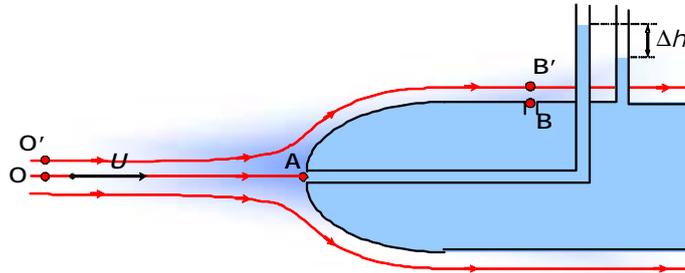


Le coefficient de contraction,  $C_c$ , dépend de la géométrie de l'orifice. De manière générale,  $C_c$  est déterminé expérimentalement et tabulé :

parois minces $C_c = 0,61$	orifice à bords profilés $C_c = 1,00$	orifice à bords rentrants $C_c = 0,50$

## Tube de Pitot. Mesure de la vitesse d'un écoulement libre

Soit un écoulement uniforme de vitesse  $U$  et de pression  $p$ . Plaçons, parallèlement aux filets fluides, une sonde se présentant sous forme d'un corps cylindrique, de section circulaire, comportant une extrémité localement hémisphérique. Elle comprend une première prise de pression au centre de l'hémisphère et une seconde prise implantée à la périphérie du corps cylindrique, à distance convenable de l'extrémité amont.



Supposant l'écoulement incompressible, le mouvement permanent, les forces de volume négligeables et le fluide parfait, l'application du théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant passant par le point  $O$  situé loin en amont et le point  $A$  où la vitesse est nulle (**point d'arrêt** généré sur le front d'attaque de l'objet) :

$$p_o + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

En  $O$  et  $O'$ , l'écoulement est uniforme et les lignes de courant sont rectilignes et parallèles ; la pression est donc la même en  $O$  et  $O'$  puisque l'on néglige les forces de volume :  $p_o = p_{o'}$ .

Pour les mêmes raisons, la pression est la même en  $B$  et  $B'$  :  $p_B = p_{B'}$ .

Appliquons Bernoulli entre  $O'$  et  $B'$ , situés sur la même ligne de courant :

$$p_{o'} + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2$$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de l'objet :  $v_{B'} = U$  ; d'où :  $p_{o'} = p_{B'}$ .

Or, on a vu que :  $p_o = p_{o'}$  et  $p_B = p_{B'}$ . Par conséquent :  $p_o = p_B$  et :

$$p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

La vitesse de l'écoulement se déduit donc de la mesure de la différence de pression  $p_A - p_B$  :

$$U = \sqrt{2 \frac{p_A - p_B}{\rho}}$$

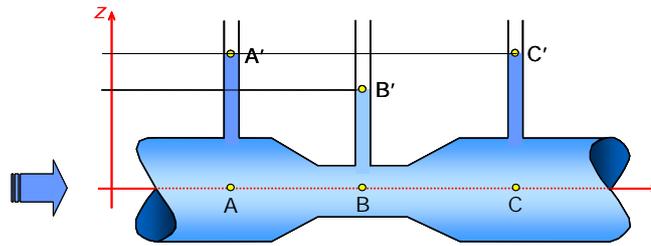


Différents types de sondes de Pitot

## Phénomène de Venturi. Mesure de débit

Le tube de Venturi joue, pour la mesure de la vitesse d'un écoulement en conduite, un rôle équivalent à celui du tube de Pitot en écoulement libre. Il consiste simplement à aménager une réduction de section comme le montre la figure ci-dessous.

L'écoulement est supposé permanent et le fluide incompressible et non pesant, c'est-à-dire un fluide pour lequel  $\rho g$  est négligeable<sup>22</sup>.



On dispose de trois sondes de pression (manomètres) placées :

- en amont du rétrécissement
- au niveau du rétrécissement
- en aval du rétrécissement (sonde facultative)

En dessous de chaque prise de pression, les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles : dans la direction perpendiculaire (dans chacune de ces sections) la pression statique est donc constante.

Les hypothèses du théorème de Bernoulli sont vérifiées ; appliquons le sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Le régime étant permanent la conservation de la masse se traduit par la conservation du débit massique. De plus, les profils de vitesse étant uniformes dans chacune des sections A, B et C, il vient :

$$\dot{m} = \rho v_A S_A = \rho v_B S_B$$

**Lorsque la section diminue**, la vitesse augmente à cause de la conservation du débit, de là **la pression diminue** à cause du théorème de Bernoulli :  $S_A > S_B \Rightarrow v_A < v_B \Rightarrow p_A > p_B$ .  
rétrécissement      accélération      dépression

En éliminant la vitesse  $v_B$  entre les deux relations, la valeur de la vitesse  $v_A$  se déduit du rapport des sections  $\sigma = S_A/S_B$  et de la mesure de la différence des pressions statiques  $\Delta p = p_A - p_B$ , conformément à la relation :

$$v_A = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(\sigma^2 - 1)}}$$

Le débit dans la conduite s'obtient par :

$$\dot{m} = \rho S_A \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(\sigma^2 - 1)}} = \pi \frac{D^2}{4} \sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{(D/d)^2 - 1}}$$

où D est le diamètre de la conduite et d celui du rétrécissement.

<sup>22</sup> Cette hypothèse, faite ici pour simplifier la démonstration et mettre en évidence le principe, n'est pas nécessaire. Nous verrons en TD que la prise en compte du terme  $\rho g z$  dans l'équation de Bernoulli ne modifie pas le résultat.

# Bilan global des quantités de mouvement

L'équation fondamentale de la dynamique qui traduit le bilan de quantité de mouvement a été établie en adoptant une approche Lagrangienne, c'est-à-dire liée à un domaine matériel que l'on suit dans son mouvement, ce qui nous a conduit à une loi locale exprimée en fonction de la dérivée particulaire de la vitesse, l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g}$$

dans laquelle la dérivée particulaire de la vitesse  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{v}$$

ou en notation indicielle :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Le premier terme du membre de droite correspond à la dérivée par rapport au temps au point considéré. Le deuxième terme apparaît comme le taux de variation de la vitesse dû au mouvement (au fait que la particule traverse un champ de vitesse variable dans l'espace).

Une analyse de mécanique des fluides peut être conduite à deux échelles différentes : l'une, qui s'applique à un volume élémentaire de fluide, demande la résolution (généralement numérique) des équations aux dérivées partielles ci-dessus en y adjoignant celle relative à la conservation de la masse ainsi que les conditions aux limites du volume étudié. Cette analyse permet de connaître le champ de vitesse et le champ de pression en tout point du fluide. L'autre analyse, relative à un volume macroscopique de fluide, appelé volume de contrôle, convient à l'ingénieur qui cherche une solution globale.

Pour les applications, il est souvent préférable de raisonner en considérant un **volume de contrôle fixe**, choisi arbitrairement (ou judicieusement suivant le problème que l'on se pose) dans l'écoulement, sous la seule restriction d'avoir une surface limite entièrement constituée de particules fluides. Nous allons donc dans cette partie donner une nouvelle formulation du bilan de quantité de mouvement. Nous nous placerons en **régime permanent**.

## Équation intégrale de la quantité de mouvement : théorème d'Euler (ou théorème des quantités de mouvement)

En **régime permanent**, l'équation d'Euler s'écrit :

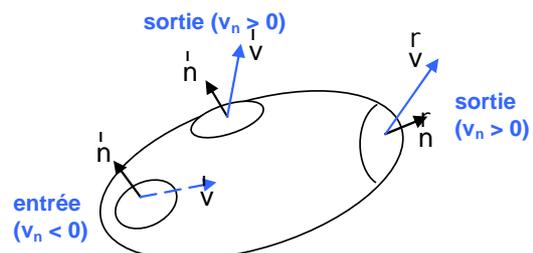
$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{v} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g}$$

Prenons l'intégrale sur un domaine de contrôle quelconque  $V$  de l'écoulement délimité par la surface fermée  $S$  de normale extérieure  $\vec{n}$  ; la surface  $S$  comprend une surface solide imperméable au fluide ( $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$  est nul en tous ses points) et des surfaces traversées par le fluide : aux entrées  $v_n$  est négatif tandis qu'aux sorties  $v_n$  est positif.

$$\iiint_V (\rho \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{v}) dV = \iiint_V -\vec{\text{grad}} p dV + \iiint_V \rho \vec{g} dV$$

et appliquons le théorème d'Ostrogradski :

$$\boxed{\iint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S -p \vec{n} dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV}$$



C'est l'expression vectorielle du **théorème d'Euler**, encore appelé **théorème des quantités de mouvement**, qui stipule que :

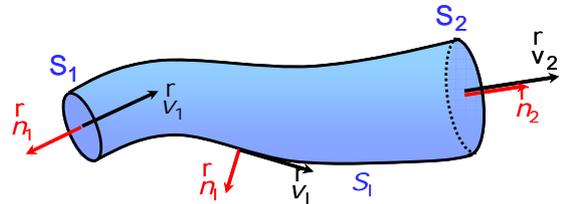
Le flux de quantité de mouvement à travers une surface de contrôle fixe d'un **écoulement permanent** est égal à la résultante des forces extérieures appliquées au fluide dans le domaine limité par cette surface.

En effet, le premier terme de l'équation est le flux des quantités de mouvement ( $\rho \vec{v}$  par unité de volume) sortant algébriquement de S par les ouvertures, le premier terme du membre de droite est la résultante des forces de pression qui sont appliquées au fluide et le dernier terme la résultante des forces de gravité (c'est-à-dire le poids du volume V :  $m\vec{g}$ ).

## Cas d'un tube de courant

Appliquons le théorème à une portion de **tube de courant** d'un **fluide parfait** pour lequel **les vitesses sont constantes dans chacune des sections droites**.

Pour cela nous définissons le domaine de contrôle limité par la surface  $S = S_1 + S_1 + S_2$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les deux sections droites situées respectivement à l'entrée et à la sortie du tube et  $S_1$  la surface latérale formée des lignes de courant s'appuyant sur  $S_1$  et  $S_2$ . Les vecteurs unitaires des normales à ces surfaces, orientés positivement vers l'extérieur du domaine, sont désignés respectivement par  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_1$ .



En appliquant l'expression vectorielle du théorème d'Euler au domaine que nous venons de définir et en décomposant les surfaces, on a :

$$\vec{v}_1 \iint_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_1 dS + \vec{v}_2 \iint_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_2 dS = \iint_{S_1} -p_1 \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} -p_2 \vec{n}_2 dS + \iint_{S_1} -p \vec{n}_1 dS + \iiint_V \rho g dV$$

Les deux premiers termes du membre de gauche peuvent s'exprimer en fonction du débit massique qui, en régime permanent, se conserve à travers un tube de courant :

$$\dot{m} = - \iint_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_2 dS$$

Si l'on suppose, pour simplifier, que les pressions sont également uniformes sur les sections  $S_1$  et  $S_2$ <sup>23</sup>, l'expression peut se mettre sous la forme :

$\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$	$=$	$-p_1 S_1 \vec{n}_1 - p_2 S_2 \vec{n}_2$	$+$	$\iint_{S_1} -p \vec{n}_1 dS$	$+$	$m \vec{g}$
variation du débit de		forces de pression exercées		forces de pression exercées		forces extérieures
quantité de mouvement		par le fluide extérieur		sur le fluide par les		de pesanteur
		en contact avec lui au niveau		parois latérales du tube		
		des sections droites $S_1$ et $S_2$				

On retiendra :

$$\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{ext}$$

qui est la traduction directe du théorème d'Euler pour un tube de courant que nous citons de nouveau :

<sup>23</sup> Si, en entrée et en sortie, l'écoulement est rectiligne les pressions piézométriques  $p + \rho g z$  y sont constantes. La variation d'altitude ayant un effet énergétique négligeable, les pressions  $p$  sont constantes.

Le flux (= débit) de quantité de mouvement **sortant d'un tube de courant d'un écoulement permanent,  $\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$** , est égal à la résultante des forces extérieures,  $\vec{F}_{ext}$ , appliquées au fluide dans le domaine limité par cette surface.

Remarque : cette équation nécessite l'hypothèse d'un écoulement permanent, le fluide pouvant être compressible ou incompressible.

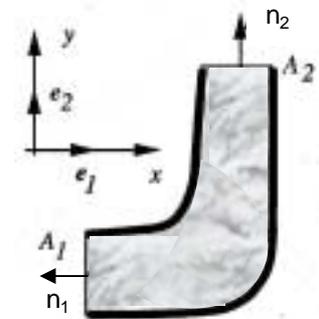
## Applications du théorème d'Euler

En pratique, le théorème d'Euler permet de calculer la résultante des forces extérieures de surface alors que leur répartition locale sur la surface limitant le domaine reste inconnue. Il suffit pour cela de choisir le domaine de contrôle  $V$  tel que l'on connaisse le flux de quantité de mouvement à travers sa surface limite.

Ce théorème est d'un usage très large tant pour des applications hydrauliques qu'aérodynamiques. Certaines, parmi les plus classiques sont présentées ci-après.

### Effort exercé par un fluide sur une conduite

Soit une conduite présentant un coude. L'expérience commune réalisée avec des conduites souples enseigne que le passage d'un débit de fluide dans une telle géométrie s'accompagne d'efforts sur le conduit. C'est la résultante de ces efforts de pression que l'on se propose de calculer en **régime permanent, en négligeant les effets visqueux** et en supposant le **fluide incompressible**.



Le domaine de contrôle limité par deux sections droites situées respectivement à l'entrée et à la sortie du coude et la surface latérale formée des particules fluides en contact avec la périphérie intérieure du tube constitue un tube de courant.

En appliquant l'expression vectorielle du théorème d'Euler précédemment établie pour un tube de courant, on a :

$$\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2 + \iint_{A_1} -p \vec{n}_1 dA + m\vec{g}$$

La résultante des **efforts exercés par la conduite sur le fluide** à travers la surface périphérique  $A_1$  est :

$$\vec{R} = \iint_{A_1} -p \vec{n}_1 dA$$

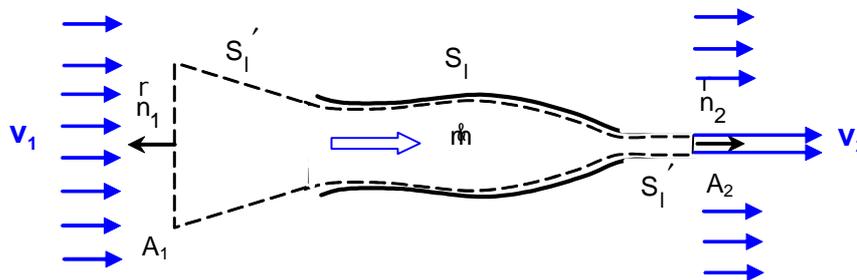
La résultante des **forces exercées par le fluide intérieur sur la surface**  $S_1$  de la conduite vaut  $-\vec{R}$  (d'après le théorème de l'action et de la réaction). D'où finalement en remplaçant  $\dot{m}$  par  $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$  :

$$-\vec{R} = \underbrace{m\vec{g}}_{\substack{\text{poids du liquide} \\ \text{contenu dans la} \\ \text{canalisation et} \\ \text{transmis à celle-ci}}} + \underbrace{\left[ (\rho v_1^2 + p_1) A_1 \vec{n}_1 + (\rho v_2^2 + p_2) A_2 \vec{n}_2 \right]}_{\substack{\text{poussée dynamique liée au} \\ \text{changement de direction dû} \\ \text{au coude de la canalisation} \\ (\vec{n}_1 \neq -\vec{n}_2)}}$$

## Poussée d'un réacteur

Le fonctionnement d'un turboréacteur peut être décrit de façon très schématique de la façon suivante. Un débit massique de fluide  $\dot{m}$  est admis en entrée de la machine. Il y est ensuite comprimé puis reçoit un débit  $\dot{m}_c$  de carburant. Le mélange est alors brûlé dans une chambre de combustion ce qui a pour effet d'en augmenter la température et donc l'énergie (l'enthalpie totale en fait). Une part de cette énergie sert à actionner une turbine qui entraîne le compresseur, l'autre part est émise, après détente dans une tuyère, sous forme cinétique et thermique dans le jet de sortie de la machine. C'est cette quantité de mouvement ainsi libérée qui est à l'origine, par réaction, de la poussée de l'engin qu'il s'agit de calculer.

Considérons un domaine de contrôle tel que celui représenté en pointillés sur la figure ci-dessous. En négligeant le débit de carburant ( $\dot{m} \gg \dot{m}_c$ ), tout se passe, du point de vue du bilan de quantité de mouvement, comme si le débit massique  $\dot{m}$  de fluide subissait une accélération axiale, passant d'une vitesse d'admission  $v_1$  à une vitesse d'éjection  $v_2 \gg v_1$  (dans le rapport des sections  $A_1/A_2$ ).



Nous avons prolongé la surface  $S_1$  du réacteur en contact avec le flux intérieur par une surface de courant  $S_1'$  en amont et en aval du réacteur, jusqu'à une distance du réacteur telle que l'écoulement :

- ait une direction fixe (celle de l'axe  $\vec{x}$ ),
- soit uniforme, de vitesse  $\vec{v}_1$ , en amont, par rapport au réacteur (le réacteur avance par rapport à l'atmosphère avec la vitesse  $-\vec{v}_1$  de l'avion).

En aval, la vitesse du fluide est égale à  $\vec{v}_1$  sauf dans le jet du réacteur, où elle est égale à  $\vec{v}_2$ , avec  $\vec{v}_2$  parallèle à  $\vec{v}_1$  et de même sens, et  $v_2 > v_1$ . Le jet étant uniforme, la pression y est constante et égale à la pression atmosphérique,  $p_a = \text{cte}$ . Plus généralement, sur  $S_1'$ , ainsi que dans les sections d'entrée  $A_1$  et de sortie  $A_2$ , nous admettons que la pression vaut  $p_a$ .

Le théorème d'Euler appliqué au domaine limité par la surface  $S = A_1 + A_2 + S_1' + S_1$  donne, en négligeant le poids du fluide (car on travaille dans un gaz et non un liquide) :

$$\dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = - \iint_{A_1} p_a \vec{n} dS - \iint_{A_2} p_a \vec{n} dS - \iint_{S_1'} p_a \vec{n} dS - \iint_{S_1} p \vec{n} dS$$

où  $-\iint_{S_1} p \vec{n} dS$  est la résultante des efforts exercés par la conduite sur le fluide.

La résultante des forces exercées par le **fluide intérieur sur la machine** vaut donc :

$$\vec{F}_{\text{int}} = \iint_{S_1} p \vec{n} dS = \dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) - \iint_{A_1} p_a \vec{n} dS - \iint_{A_2} p_a \vec{n} dS - \iint_{S_1'} p_a \vec{n} dS$$

Par ailleurs, le **fluide extérieur** exerce sur la face externe de la surface  $S_1$  une résultante de pression qui vaut :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \iint_{S_1} -p_a \vec{n} dS$$

de sorte que la résultante des forces appliquées à la machine par le fluide tant interne que externe vaut :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}} \\ &= \iint_{S_1} (p - p_a) \vec{n} dS = \\ &= -\dot{m}(v_2 - v_1) - \iint_{A_1} p_a \vec{n} dS - \iint_{A_2} p_a \vec{n} dS - \iint_{S_1'} p_a \vec{n} dS - \iint_{S_1} p_a \vec{n} dS \end{aligned}$$

Or les quatre derniers termes valent  $\iint_S -p_a \vec{n} dS$  où  $S = A_1 + A_2 + S_1' + S_1$  est une surface fermée.

Leur somme est donc nulle. Il apparaît ainsi que l'ensemble des contributions mettant en jeu la pression  $p_a$  est nul puisque regroupé sur la même surface fermée  $S$ . On en déduit que la poussée du réacteur vaut finalement :

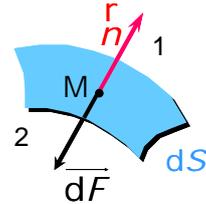
$$\vec{F} = -\dot{m}(v_2 - v_1) = -\dot{m}(v_2 - v_1)\vec{x}$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont les modules des vecteurs vitesses.

La poussée d'un réacteur est égale à l'accroissement de la quantité de mouvement du fluide qui le traverse. Elle est d'autant plus grande que la vitesse d'éjection  $v_2$  est plus grande. Comme elle doit être dirigée vers l'avant de l'avion (suivant  $-\vec{x}$ ), on doit avoir  $v_2 > v_1$ . La vitesse de l'avion est donc a priori majorée par la vitesse d'éjection.

## Viscosité. Lois de comportement

Le chapitre précédent a été consacré aux « fluides parfaits », fluides imaginaires pour lesquels les actions intérieures exercées de part et d'autre d'une surface  $S$  non matérielle, par une partie 1 sur une partie 2, se réduisent à une contrainte (force par unité de surface) normale =

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = -p\vec{n}$$


Il s'agit, en fait, d'une approximation dans laquelle les forces d'inertie et les forces dues au champ de pression  $p$  sont prépondérantes devant les **forces exercées tangentiellement** par le côté 1 sur le côté 2, appelées **forces de cisaillement**. Cette approximation est généralement valable pour la plupart des écoulements industriels, en dehors de zones dans un voisinage immédiat des parois, appelées **couches limites**. Les contraintes tangentielles, négligées en fluide parfait, sont dues à une propriété physique du fluide appelée **viscosité**.

### Le phénomène de viscosité

Lorsqu'on soumet un fluide réel à une contrainte de cisaillement, le fluide se déforme avec un certain **taux de déformation**, qui, comme nous l'avons défini en cinématique, est la variation relative de la distance entre deux points par unité de temps. Si le fluide est **newtonien**, la relation entre la contrainte et le taux de déformation est linéaire, et on peut définir le coefficient de viscosité (ou encore la **viscosité dynamique**) comme le rapport de la contrainte de cisaillement au taux de déformation associé au cisaillement :

$$\mu = \frac{\text{contrainte de cisaillement}}{2 \times \text{taux de déformation associé au cisaillement}}$$

Une définition élémentaire de la viscosité peut être donnée à partir de l'expérience décrite ci-dessous, connue sous le nom d'**expérience de Couette**.

Un fluide au repos se trouve entre deux plaques parallèles de grandes dimensions et initialement au repos. On applique à la plaque supérieure une force  $F$ , parallèle à la plaque, qui met cette plaque en mouvement à une vitesse constante  $v_0$ . Les particules fluides en contact avec la plaque supérieure se déplacent à la vitesse  $v_0$  et celles qui se trouvent contre la plaque inférieure restent immobiles. Les particules fluides se déforment et un profil de vitesse se développe par transfert de quantité de mouvement entre les couches adjacentes. Après un certain temps, le profil de vitesse devient linéaire et la vitesse est proportionnelle à la cote  $y$  :

$$v(y) = v_0 \frac{y}{h}$$

Lorsque le régime stationnaire est atteint, on constate que la force  $F$  est proportionnelle à la surface  $S$  de la plaque. Cette force est aussi une fonction monotone croissante du rapport  $v_0/h$ . Si le fluide est newtonien, la relation entre ces deux quantités est linéaire et on peut écrire :

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{v_0}{h}$$

Le rapport  $F/S$  est dans cette expérience la contrainte de cisaillement appliquée au fluide. On désigne cette contrainte par  $\tau_{xy}$  où l'indice  $y$  désigne la normale à la surface sur laquelle la contrainte est appliquée et  $x$  représente la composante de la contrainte suivant l'axe des  $x$ . Ici donc :

$$\tau_{xy} = \frac{F}{S} = \mu \frac{v_0}{h}$$

D'autre part, on peut remplacer  $v_0/h$  par  $dv_x/dy$  et l'expression devient :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Nous avons vu, dans le chapitre 3, que le taux de déformation associé au cisaillement s'exprime dans le cas général sous la forme :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ c'est-à-dire, avec nos notations, } d_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

Ici  $\partial v_y / \partial x = 0$ , et la relation prend la forme :

$$\tau_{xy} = 2\mu d_{xy}$$

Cette relation est identique à la définition donnée précédemment pour le coefficient de viscosité.

La viscosité dépend de la nature du fluide, de sa température, mais ne dépend pas de l'écoulement.

Les dimensions du coefficient de viscosité sont celles d'une force par unité de surface divisée par un taux de déformation :

$$[\mu] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

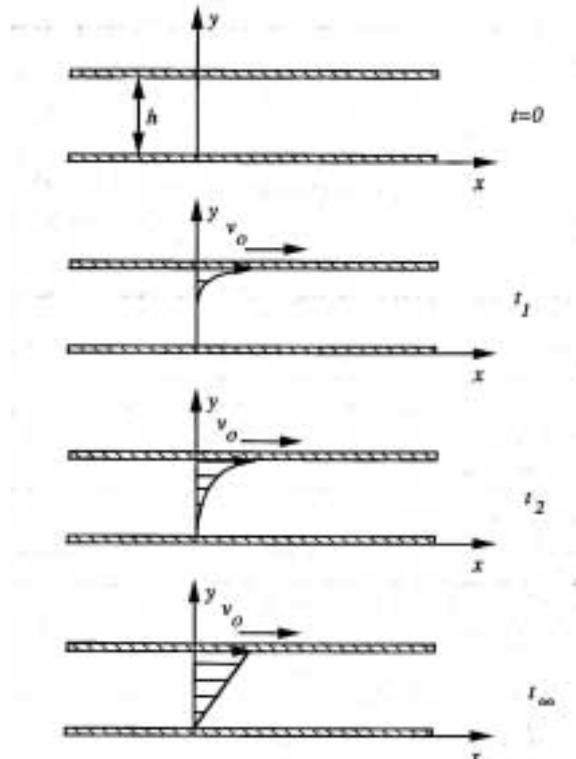
Dans le système international,  $\mu$  est donné en  $kgm^{-1}s^{-1}$  et cette unité a reçu le nom de **poiseuille**.

Dans beaucoup de problèmes où les contraintes visqueuses doivent être prises en compte, il est plus commode d'utiliser, au lieu du coefficient de viscosité  $\mu$ , la **viscosité cinématique**  $\nu$  obtenue en divisant  $\mu$  par la masse volumique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

D'une manière générale, la viscosité absolue (viscosité dynamique)  $\mu$  des liquides est beaucoup plus grande que celle des gaz, mais leur viscosité cinématique  $\nu$  peut être inférieure car les gaz ont une faible masse volumique.

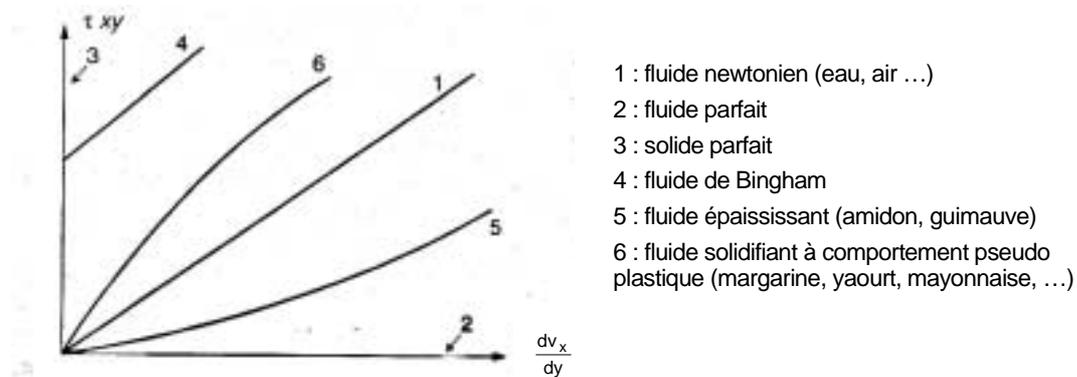
Dans le système international, la viscosité cinématique s'exprime en  $m^2/s$ . À titre d'exemple, les valeurs de  $\mu$  et  $\nu$ , à la température ambiante (20 °C) sont :



pour la glycérine :	$\mu = 0,8 \text{ PI}$	$\nu = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
pour l'huile :	$\mu = 0,3 \text{ PI}$	$\nu = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
pour l'alcool :	$\mu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ PI}$	$\nu = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
pour l'eau :	$\mu = 10^{-3} \text{ PI}$	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
pour l'air :	$\mu = 18 \cdot 10^{-6} \text{ PI}$	$\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

## Lois de comportement des fluides réels

Les fluides ne vérifiant pas la loi de frottement simple  $\tau_{xy} = 2\mu d_{xy}$ , c'est-à-dire la proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation, sont qualifiés de non newtoniens. Dans la majorité de ces cas, la connaissance d'une loi générale liant les contraintes aux taux de déformation est trop complexe pour être explicitée. On est amené à utiliser des lois approchées appelées lois de comportement. Dans le cas où la seule composante de la vitesse est  $v_x(y)$ , la relation contrainte – taux de déformation se réduit à  $\tau_{xy} = \mu dv_x/dy$ . Des exemples de lois de comportement sont donnés sur la figure ci-dessous. Citons, par exemple, les fluides de Bingham pour lesquels  $\tau_x = \tau_{0x} + \mu dv_x/dy$ , qui ne peuvent être mis en mouvement que si  $\tau > \tau_0$ .



Tous les fluides que l'on étudiera pourront être considérés newtoniens.

Remarque : Dans le cas de solides réels, traités par la théorie de l'élasticité, les contraintes sont liées aux déformations par des relations linéaires. Dans les fluides, au contraire, les contraintes tangentielles dépendent de la vitesse à laquelle la déformation s'est effectuée et, par suite, elles sont nulles dans un fluide au repos. Dans la mesure où la limite d'élasticité n'a pas été dépassée, un solide reprend sa forme initiale lorsque l'on cesse de lui exercer des efforts. C'est différent pour les fluides, ils n'ont pas la mémoire du passé et viennent occuper le volume qui leur est offert.

## Dynamique des fluides visqueux incompressibles : équation de Navier Stokes

### Forces de surface. Tenseur des contraintes

Nous considérons ici les forces qui s'exercent au sein d'un fluide avec pour objectif de développer une analyse des forces qui interviennent au « second membre » de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans un volume matériel  $V(t)$  limité par la surface  $S(t)$  :

- les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme :  $\int_{V(t)} \rho g dV$
- les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface  $S(t)$  :  $\int_{S(t)} d\vec{F}$

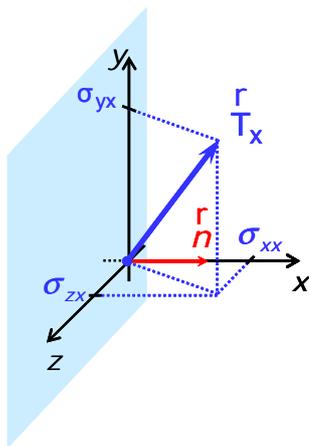
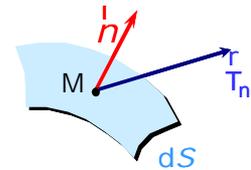
Les forces s'exerçant sur le volume sont facilement prises en compte. Une étude plus détaillée est nécessaire pour comprendre la nature des forces de surface.

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des **contraintes tangentielles** dues à la viscosité (frottements).

En un point M d'une surface  $dS$ , la force de surface s'exprime comme :

$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS$$

où  $\vec{T}_n$  est le **vecteur contrainte** qui s'exerce sur la surface de normale  $\vec{n}$ .



Considérons une surface perpendiculaire à l'axe  $x$ . La normale à cette surface est :  $\vec{n} = \vec{e}_x$ .

La contrainte exercée sur cette surface est alors notée  $\vec{T}_x$  et peut se décomposer comme :

$$\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z$$

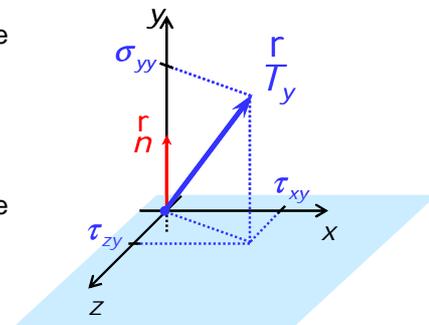
On remarque que les composantes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  sont des composantes tangentielles : on les notera plutôt  $\tau_{yx}$  et  $\tau_{zx}$  pour les distinguer de la composante normale  $\sigma_{xx}$ .

On peut de même considérer la surface perpendiculaire à l'axe  $y$ . On a ainsi la contrainte :

$$\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z$$

Et pour la surface perpendiculaire à l'axe  $z$ , la contrainte s'exprime par :

$$\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z$$



Considérons maintenant une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

Dans ce cas, la contrainte s'exerçant sur cette surface s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \vec{T}_n &= n_x \vec{T}_x + n_y \vec{T}_y + n_z \vec{T}_z \\ &= n_x (\sigma_{xx} \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z) + n_y (\tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z) + n_z (\tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z) \\ &= (n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \vec{e}_x + (n_x \tau_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{yz}) \vec{e}_y + (n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \sigma_{zz}) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\vec{r} \cdot \vec{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{T}_n = \vec{T} \cdot \vec{n}}$$

tenseur des contraintes

La force élémentaire est  $d\vec{F} = \vec{T}_n dS = \vec{T} \cdot \vec{n} dS$ .

Le tenseur des contraintes peut alors se décomposer en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur de trace nulle :

$$\vec{T} = \alpha \vec{I} + \vec{T}'$$

où  $\alpha \vec{I} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{T}' = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$

tenseur des contraintes de viscosité

Ainsi :

$$\vec{T}_n = \vec{T} \cdot \vec{n} = \alpha \vec{I} \cdot \vec{n} + \vec{T}' \cdot \vec{n} = \alpha \vec{n} + \vec{T}' \cdot \vec{n}$$

$$d\vec{F} = \vec{T} \cdot \vec{n} dS = \alpha \vec{n} dS + \vec{T}' \cdot \vec{n} dS$$

Le premier terme du membre de droite,  $\alpha \vec{n} dS$ , est une force normale à la surface ; c'est donc la force de pression hydrostatique :  $\alpha = -p$ .

La force s'exerçant sur la surface élémentaire  $dS$  s'exprime donc par :

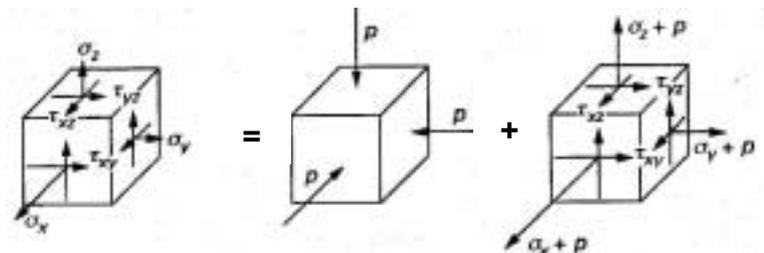
$$\boxed{d\vec{F} = -p \vec{n} dS + \vec{T}' \cdot \vec{n} dS}$$

et le tenseur des contraintes par :

$$\vec{T} = -p \vec{I} + \vec{T}'$$

Ses composantes sont :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$



Cette décomposition du tenseur des contraintes peut encore s'écrire, avec les notations du schéma ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}}_{\text{tenseur isotrope}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z + p \end{pmatrix}}_{\substack{\text{tenseur de viscosité} \\ (\text{nul lorsque les contraintes tangentielles} \\ \text{le sont; } \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p)}}$$

La **pression** agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les **contraintes visqueuses** sont au contraire essentiellement liées à l'état de **déformation du fluide**.

## Principe fondamental de la dynamique

La quantité de mouvement contenu dans un volume matériel  $V(t)$  est :

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV$$

Rappelons que le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}$$

soit, en décomposant  $\mathbf{F}$  en forces de volume et forces de surface :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV$$

Le passage de cette équation globale à une équation locale se fait en déroulant les mêmes étapes que celles établies pour le fluide parfait (voir Principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide parfait page 34). Nous ne les développerons pas ici ; elles consistent à exprimer la variation dans le temps de la quantité de mouvement en s'appuyant sur l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

et à transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$\int_{S(t)} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}} dV \quad ^{24}$$

Il vient alors l'expression locale du bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}} + \rho \mathbf{g}$$

dans laquelle  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{v}$ .

On peut faire apparaître les deux parties du tenseur des contraintes (tenseur des contraintes associées à la pression + tenseur des contraintes visqueuses) :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = -p \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}' \text{ de composantes } \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}} = -\overrightarrow{\text{div}} p \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}}' = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}}'$$

Soit finalement l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}}' + \rho \mathbf{g}$$

<sup>24</sup> La divergence du tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ,  $\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}}$ , est un vecteur dont la composante suivant l'axe  $i$  est  $\left( \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \right)_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ , c'est-à-dire

est la divergence du vecteur de composantes  $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3})$  qui sont les composantes de la ligne  $i$  du tenseur des contraintes visqueuses (voir formulaire).

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quantité d'accélération} \\ \text{par unité de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{forces associées} \\ \text{à la pression} \\ \text{par unité de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{contraintes} \\ \text{visqueuses} \\ \text{par unité de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{forces de volume} \\ \text{par unité de volume} \end{array} \right\}$$

C'est une équation locale, valable à chaque instant en tout point du fluide, dont les différents termes sont des forces par unité de volume qui s'expriment en  $N/m^3$ .

## Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

D'une façon générale, la viscosité intervient dès qu'il y a déformation, c'est-à-dire dès que :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad}v}} + \overline{\overline{\text{grad}v}^t} \right) \neq \overline{\overline{0}}$$

Par définition, les fluides newtoniens sont ceux pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes de viscosité  $\overline{\overline{T}}$  dépendent linéairement des composantes du tenseur des taux de déformation pure  $\overline{\overline{D}}$ .

Considérons les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{D}}$  :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

On rappelle que ce tenseur est symétrique car  $d_{ij} = d_{ji}$ .

On admettra alors que, pour un fluide isotrope, les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{D}}$  sont liés par la relation suivante<sup>25</sup> :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \mu' (d_{11} + d_{22} + d_{33}) \delta_{ij}$$

↑ viscosité dynamique     
 ↑ viscosité de dilatation     
 ↑ symbole de Kronecker

On remarque que :

$$(d_{11} + d_{22} + d_{33}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div}^r v$$

Donc, si le fluide est incompressible, on a  $\text{div}^r v = 0$  et dans ce cas :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} \Rightarrow \boxed{\overline{\overline{T}} = 2\mu \overline{\overline{D}}}$$

Puisque  $\overline{\overline{D}}$  est symétrique, le tenseur des contraintes est également symétrique :  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\overline{\overline{\text{grad}p}} + \overline{\overline{\text{div}T}} + \rho \overline{\overline{g}}$$

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

<sup>25</sup> Une rotation pure n'engendre aucune déformation : par conséquent il n'y a pas de contrainte. C'est pourquoi  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{\Omega}}$  ne sont pas liés.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}p + 2\mu\overline{\text{divD}} + \rho\vec{g}$$

$$\text{Or, } \overline{\text{divD}} = \frac{1}{2} \overline{\text{div}} \left( \overline{\text{grad}}\vec{v} + \overline{\text{grad}}^t\vec{v} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2\vec{v} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla^2\vec{v}$$

Ce qui conduit à l'**équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien** ( $\overline{\text{T}} = 2\mu\overline{\text{D}}$ ) **incompressible** ( $\text{div}\vec{v} = 0$ ), appelée **équation de Navier-Stokes** :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}}^{26}$$

Pour résoudre l'équation de Navier-Stokes et l'équation de continuité, des conditions aux limites et des conditions initiales appropriées doivent être utilisées.

## Conditions aux limites

Cas d'une paroi solide

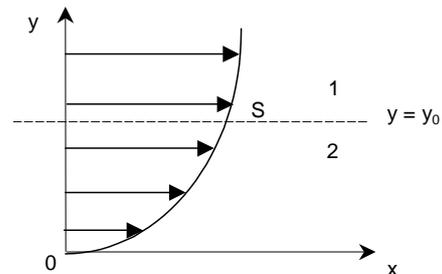
Reprenons un écoulement plan qui s'effectue suivant l'axe des x dans le plan xOy.

La loi de frottement visqueux s'écrit :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

L'action de 1 ( $y > y_0$ ) sur 2 ( $y < y_0$ ) a pour expression :

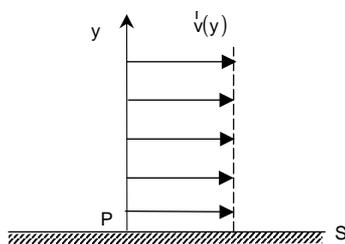
$$\vec{T}_y = -p\vec{e}_y + \tau_{xy}\vec{e}_x$$



En conclusion, les filets fluides « rapides » entraînent les « lents », et les « lents » freinent les « rapides ». Lorsqu'il y a une discontinuité de vitesse tangentielle,  $dv_x/dy \rightarrow \infty$  et la force d'entraînement  $\tau_{xy}\vec{e}_x \rightarrow \infty$ , de sorte que la discontinuité de vitesse ne peut se maintenir. C'est ce qui

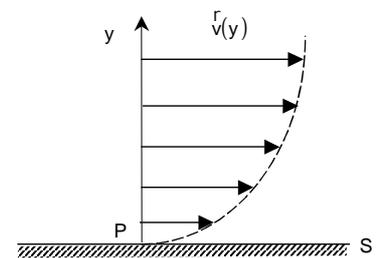
explique la **condition aux limites** à écrire sur une paroi pour un écoulement de fluide visqueux, encore appelée **condition d'adhérence** :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_{\text{paroi}} \quad \forall P \in \text{paroi}$$



Impossible en fluide visqueux, pour une paroi immobile.

Seul un fluide parfait en contact avec une surface « glisse » sur cette surface.



Adhérence du fluide sur la paroi.

Si la paroi S est immobile, la vitesse du fluide à la paroi est nulle :

$$\boxed{\vec{v}(P) = 0 \quad \forall P \in S, \text{ paroi immobile}}$$

<sup>26</sup> Le Laplacien du vecteur  $\vec{v}$  a pour coordonnées le Laplacien des composantes du vecteur  $\vec{v}$  seulement en coordonnées cartésiennes. Sinon il faut se souvenir que :  $\nabla^2\vec{v} = \overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{v}) - \text{rot}(\text{rot}\vec{v})$ . Comme par ailleurs les coordonnées du rotationnel en cylindrique ou sphérique ne sont pas évidentes, il vaut mieux utiliser des formules.

Cas d'une surface de contact entre deux fluides

La composante normale de la vitesse relative de chacun des milieux par rapport à S est nulle ; cela signifie qu'aucun fluide ne traverse S. On admet, en outre, que le vecteur contrainte  $\vec{T}_n$  est continu à la traversée de S, d'après le théorème de l'action et de la réaction.

Dans le cas particulier d'une surface en contact avec l'atmosphère (**surface libre**), on a donc continuité de la pression,  $p = p_a$ , et nullité de la contrainte visqueuse,  $\tau = 0$ . Cette dernière condition est une **condition de non frottement sur une surface libre** qui, si la surface est horizontale, se traduit par :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0} = 0$$

# Écoulements laminaires et écoulements turbulents. Pertes de charge

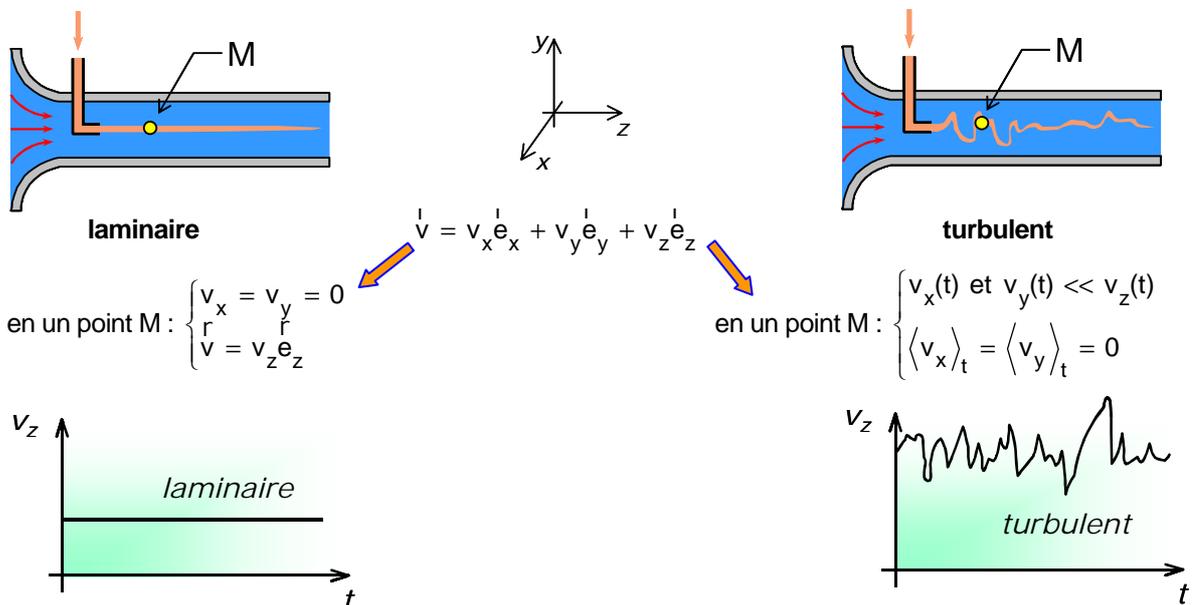
## Différents régimes d'un écoulement

Étudier l'écoulement d'un fluide réel revient à résoudre l'équation de Navier-Stokes. Mais en pratique, cette équation ne peut se résoudre analytiquement qu'en posant des hypothèses simplificatrices. Notamment, on distingue deux grands types d'écoulement : le **régime laminaire** et le **régime turbulent**.

On dit qu'un écoulement est **laminaire** lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est **turbulent** lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide.

L'une des premières analyses de la transition d'un régime laminaire vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements en conduit cylindrique effectuées par Reynolds en 1883.

Le montage expérimental comporte un réservoir de liquide sous pression débouchant sur un conduit cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre que celle-ci fluctue de façon aléatoire dans l'espace et dans le temps.



Comment caractériser le régime d'écoulement ?

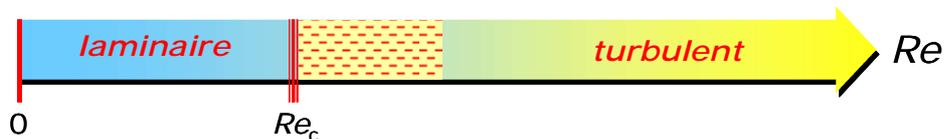
Une étude systématique du régime d'écoulement a été réalisée en fonction des différents paramètres intervenant dans le problème : la masse volumique du fluide, sa viscosité, la géométrie de la conduite, etc. Reynolds a montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend pas séparément de chacun des paramètres mais d'**une seule grandeur les regroupant tous** : le **nombre de Reynolds** :

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho : \text{masse volumique } [\rho] = \text{ML}^{-3} \\ \mu : \text{viscosité } [\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} \\ \nu = \mu/\rho : \text{viscosité cinématique } [\nu] = \text{L}^2\text{T}^{-1} \\ v : \text{vitesse } [v] = \text{LT}^{-1} \\ D : \text{diamètre } [D] = \text{L} \end{array} \right\} [Re] = 0$$

Le nombre de Reynolds est donc une grandeur sans dimension. On constate généralement que la transition d'un régime laminaire à un régime turbulent s'effectue lorsque  $Re \approx 2000 = Re_c$ , **nombre de Reynolds critique**.

Pour  $Re < 2000$ , l'écoulement reste laminaire et une perturbation localisée introduite dans l'écoulement est progressivement dissipée. Dans un intervalle de  $Re$  de 2000 à 3000, des « paquets » turbulents sont convectés dans le conduit de façon intermittente. Aux nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement devient turbulent dans son ensemble ; c'est-à-dire que les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour empêcher les inévitables perturbations d'engendrer des tourbillons qui se superposent à l'écoulement global.



## Écoulement laminaire et pertes de charge régulières

Partons de l'équation de Navier-Stokes obtenue pour un **fluide newtonien incompressible**.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}p} + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Multiplions scalairement l'accélération par  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

et tenons compte du fait que le fluide est incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ) :

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}p} + \vec{v} \cdot \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}p} \vec{g}$$

Or, d'après l'expression de la dérivée particulaire, on a :

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bullet$$

Pour un **écoulement stationnaire** on a  $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$ , d'où :

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{r} \cdot \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho g z$$

Finalement, on obtient <sup>27</sup>:

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z \right) = \vec{r} \cdot \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Projetons sur chacun des trois axes d'un repère cartésien :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \nabla^2 v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \nabla^2 v_z \end{cases}$$

$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_t$  est la **pression totale**, terme que nous avons déjà rencontré lors de l'établissement de l'équation de Bernoulli, somme de la pression motrice  $p + \rho g z$  et de la pression cinétique  $\frac{1}{2} \rho v^2$ . La pression totale est encore appelée **charge** <sup>28</sup>.

Supposons que l'écoulement laminaire s'effectue suivant l'axe x. Dans ces conditions, on a :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (P_t) = \mu \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial}{\partial y} (P_t) = \mu \nabla^2 v_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (P_t) = \mu \nabla^2 v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_t(x, y, z) = P_t(x) \\ \frac{dP_t}{dx} = \mu \nabla^2 v_x \end{cases}$$

Mais d'après l'équation de continuité :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

<sup>27</sup> Remarque : Si  $\mu = 0$  (fluide parfait), on retrouve le théorème de Bernoulli qui indique que la quantité

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z$$

est constante sur chaque ligne de courant, c'est-à-dire que

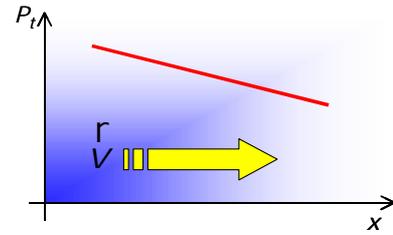
$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0 \text{ puisque } \vec{v} \text{ est en tout point tangent à une ligne de courant.}$$

<sup>28</sup> La charge est en réalité un terme homogène à une hauteur de liquide : c'est  $\frac{1}{g} \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho g} + z$  (mesuré en m). Par

abus de langage, on emploie ce terme également pour la pression totale, soit  $\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z$  (mesuré en Pa).

$$\text{D'où : } \frac{dP_t}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \text{cte} \quad \forall (x, y, z)$$

fonction de x                      fonction de y et z

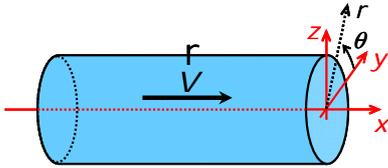


On peut en déduire que **la pression totale (ou charge) varie linéairement** avec la distance parcourue par le fluide.

Pour caractériser plus précisément le gradient de pression totale  $dP_t/dx$ , il faut connaître le profil de vitesse  $v_x(x, y, z)$ . Ce dernier est déterminé par les conditions aux limites. Nous allons donc traiter le problème complet sur un exemple typique.

### Écoulement de Poiseuille

Considérons l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique horizontale, de rayon R.



$\vec{v} = v \vec{e}_x \Rightarrow v_r = v_\theta = 0$  ; pour alléger les écritures nous écrivons  $v$  (sans indice  $x$ ) la seule composante non nulle de  $\vec{v}$

A priori  $v$  dépend de  $x, y$  et  $z$  ou  $x, r$  et  $\theta$ .

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \nabla^2 v$$

Par ailleurs l'équation de continuité impose :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

La géométrie du système est telle qu'il y a symétrie de révolution :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

Donc finalement :  $v(x, r, \theta) = v(r)$

Par conséquent, le Laplacien s'exprime comme :

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

Et il s'en suit :

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \text{cte} = A$$

fonction de x                      fonction de r

Il est alors possible d'en déduire le profil de vitesse  $v(r)$  par simple intégration :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{A}{\mu} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{A}{\mu} r \Rightarrow r \frac{dv}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{2} + B \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \Rightarrow$$

$$v(r) = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{4} + B \ln r + C$$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites.

Au contact des parois de la conduite, en  $r = R$ , le fluide est immobile (condition d'adhérence) :

$$v(R) = 0 \Rightarrow \frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4} + B \ln R + C = 0$$

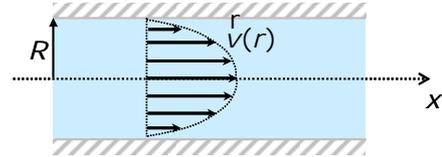
Sur l'axe de la conduite, en  $r = 0$ , la vitesse est nécessairement de valeur finie :

$$v(0) \neq \infty \Rightarrow B \ln 0 + C \neq \infty \Rightarrow B = 0$$

$$\text{D'où : } B = 0 \text{ et } C = -\frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4}$$

Le **profil de vitesse** est donc **parabolique** :

$$v(r) = -\frac{A}{4\mu} (R^2 - r^2)$$



Pour avoir  $v(r) > 0$ ,  $\forall r < R$ , il faut que  **$A < 0$** . Par conséquent :

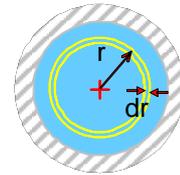
$$A = \frac{dP_t}{dx} < 0 : \text{ la } \textbf{pression totale} \text{ (la charge) } \textbf{diminue} \text{ avec la progression du fluide.}$$

La constante A, qui détermine entièrement la valeur du gradient de pression totale et le profil de vitesse est reliée au débit massique de fluide circulant dans le conduit.

Par définition, le débit massique à travers une section droite S est :  $\dot{m} = \int_S \rho v dS$ .

$$\dot{m} = \int_0^R \rho v(r) 2\pi r dr = -\frac{A\rho}{4\mu} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$\dot{m} = -\frac{A\rho}{4\mu} 2\pi \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = -\frac{A\rho}{4\mu} 2\pi \frac{R^4}{4} = -\pi \frac{A\rho}{8\mu} R^4 \Rightarrow A = -\frac{8\mu}{\pi R^4 \rho} \dot{m}$$



On peut donc exprimer le gradient de pression totale en fonction du diamètre D de la conduite et de la viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$  du fluide :

$$\frac{dP_t}{dx} = A = -\frac{128\nu}{\pi D^4} \dot{m}$$

ainsi que le profil de vitesse :

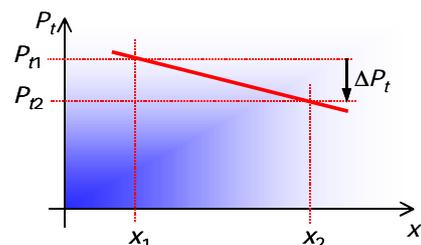
$$v(r) = \frac{8\dot{m}}{\rho\pi D^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Puisque la pression totale varie linéairement, on peut écrire entre deux abscisses  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\frac{dP_t}{dx} = \frac{P_{t2} - P_{t1}}{x_2 - x_1} = -\frac{\Delta P_t}{x_2 - x_1}$$

où la **perte de charge**<sup>29</sup>  $\Delta P_t$  est comptée positivement.

$$P_{t2} = P_{t1} - \Delta P_t$$



<sup>29</sup> Le terme « **perte de charge** » vient de la comparaison avec un écoulement de fluide parfait pour lequel la « charge »  $p + \rho v_m^2/2 + \rho g z$  serait une constante d'après la relation de Bernoulli.

La perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue ; on dit que **la perte de charge est régulière**.

Si on considère une conduite de longueur L, la perte de charge totale s'exprime par :

$\Delta P_t = - \frac{dP_t}{dx} L = \frac{128\nu}{\pi} \frac{\dot{m}L}{D^4}$  et réciproquement le débit massique découlant d'une perte de pression totale donnée s'écrira :

$$\dot{m} = \frac{\pi D^4}{128\nu} \frac{\Delta P_t}{L}$$

Il s'agit de la **formule de Poiseuille**.

On peut encore exprimer la perte de charge en fonction de la **vitesse moyenne de l'écoulement**

$$v_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr$$

La vitesse moyenne, encore appelée **vitesse débitante**, est la vitesse uniforme qui donnerait le même débit :  $\dot{m} = \rho v_m S$ . La **formule de Poiseuille** s'écrit alors :

$$\Delta P_t = \frac{32\mu L v_m}{D^2}$$

Coefficient de perte de charge

La perte de charge par unité de longueur,  $\Delta P_t / L$ , s'exprime généralement sous forme d'un coefficient sans dimension, dit **coefficient de perte de charge** défini par :

$$\lambda = \frac{\Delta P_t / L}{\frac{1}{2} \rho v_m^2 / D}$$

Pour un **écoulement laminaire** dans une conduite, on a :

$$\frac{\Delta P_t}{L} = \frac{32\mu v_m}{D^2} = \left( \frac{32\mu v_m}{D^2} \frac{2}{\rho v_m^2} \right) \frac{1}{2} \rho v_m^2 = \left( \frac{64\mu}{\rho D^2 v_m} \right) \frac{1}{2} \rho v_m^2$$

On voit apparaître le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v_m D}{\mu}$$

D'où le coefficient de perte de charge régulière d'un écoulement laminaire en conduite :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Remarque : ceci n'est valide que pour  $Re < 2000$ .

On montre que la diminution de  $P_t = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$  caractérise l'irréversibilité de l'écoulement. C'est de cette perte de charge due aux frottements visqueux que provient la nécessité de fournir constamment de l'énergie au fluide pour maintenir un écoulement permanent. En remarquant que la quantité  $\frac{P_t}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + g z$  a pour dimension  $[L^2 T^{-2}]$ , c'est-à-dire un travail par unité de masse, on

constate qu'il faut fournir au fluide, à l'aide d'une pompe, une puissance  $\dot{W} = \dot{m} \lambda \frac{1}{2} v^2$ , où  $\dot{m}$  est le

débit massique qui passe dans la conduite. Cela provient du fait que chaque particule fluide est obligée de fournir un travail pour vaincre les pertes de charge.

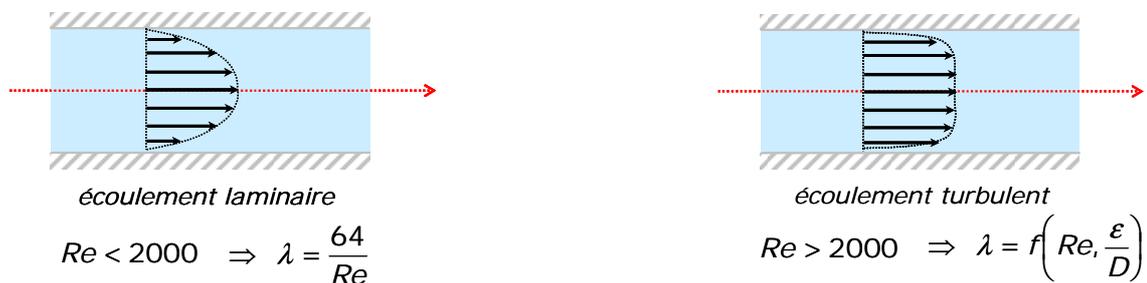
Il faut remarquer, par ailleurs, que l'écoulement est rotationnel :

$$\vec{\text{rot}}v = -\frac{\partial v}{\partial r} e_\theta = \frac{A}{2\mu} r e_\theta$$

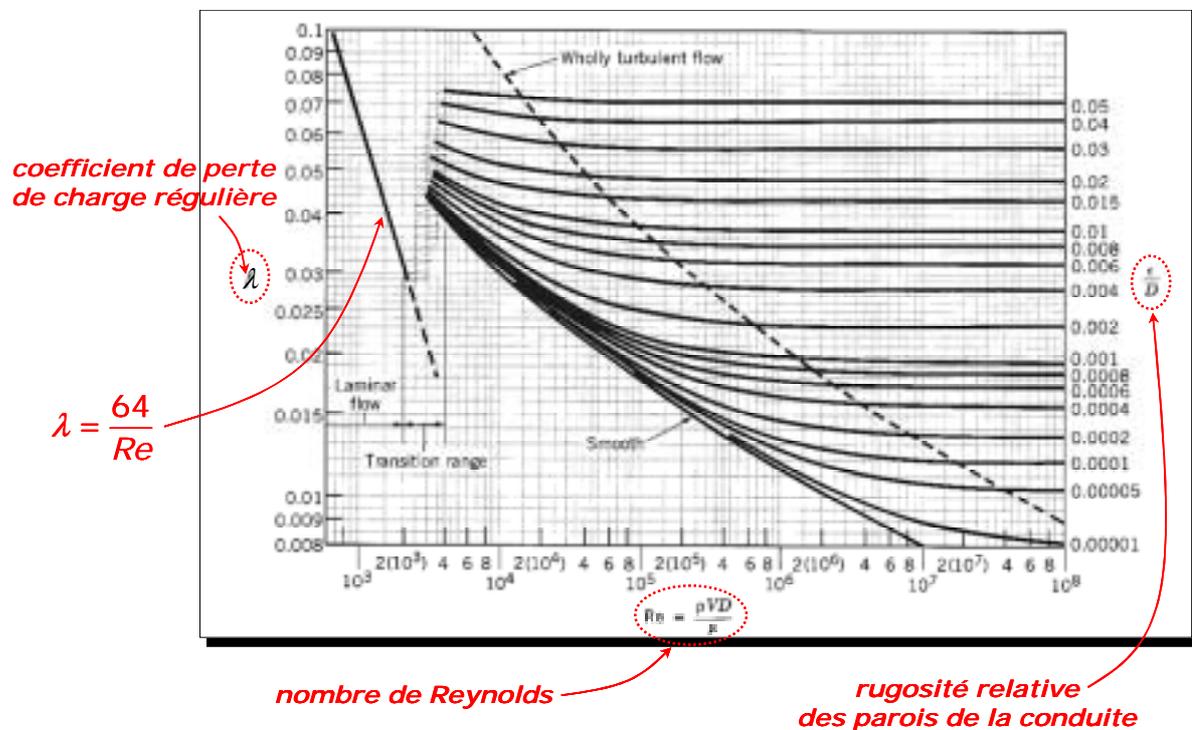
ce qui est une propriété générale des écoulements quand les phénomènes de viscosité ne sont pas négligés.

## Pertes de charge en régime turbulent

En régime turbulent, le profil de vitesse dans une conduite cylindrique n'est plus parabolique ; à cause des turbulences, les vitesses sont uniformisées sur un large domaine. On observe une brusque variation de vitesse au voisinage des parois.



Les coefficients de perte de charge régulière  $\lambda$  devront être **déterminés expérimentalement, ou bien tirés d'abaques**, comme le diagramme de Moody reproduit ci-dessous, ou de lois empiriques.



Les frottements exercés par le fluide sur les parois sont beaucoup plus importants en écoulement turbulent qu'en laminaire. En régime turbulent établi, l'essentiel des frottements est dû à l'existence

d'une toute petite zone au voisinage des parois, appelée **couche limite** visqueuse, où les gradients de vitesse sont très élevés, donc où les phénomènes de viscosité jouent un très grand rôle.

Puisque les pertes de charge sont liées aux contraintes de frottement à la paroi de la conduite, elles dépendent non seulement des paramètres de l'écoulement, mais de l'état de surface (plus ou moins lisse ou rugueux) de cette paroi. On qualifie ordinairement cet état par une seule dimension géométrique  $\epsilon$ , qui est d'un ordre de grandeur comparable à la hauteur géométrique moyenne des aspérités de cette paroi. Typiquement pour un tuyau en acier neuf  $\epsilon = 0,03$  à  $0,1$  mm.

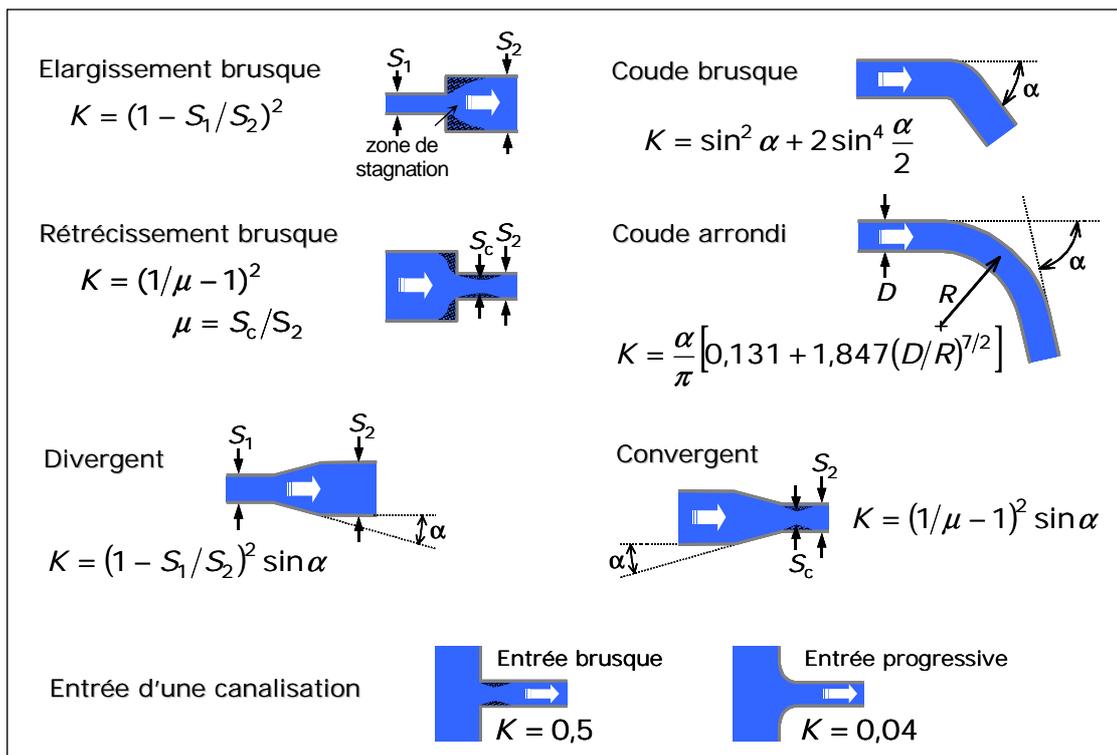
## Pertes de charge singulières

La présence d'une singularité (d'un obstacle) sur l'écoulement dans une conduite comme un coude, un diaphragme, un élargissement brusque, une contraction, etc. crée un  $\Delta P$  local appelé **perte de charge singulière**.

Dans la pratique industrielle, cette perte de charge est écrite sous la forme :

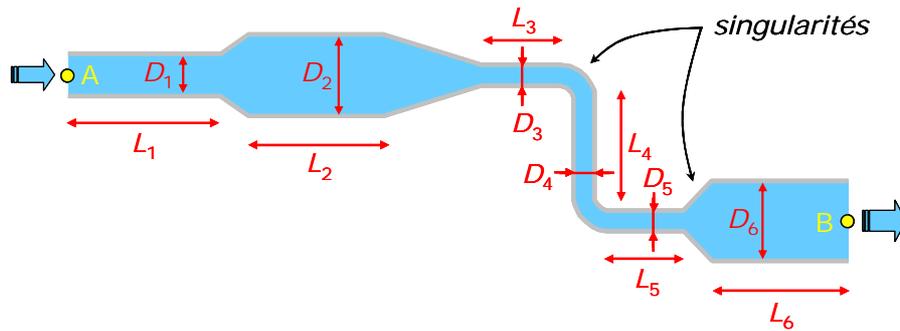
$$\Delta P_t = K \frac{1}{2} \rho v^2$$

où le coefficient de perte de charge  $K$ , qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds, est donné dans des formulaires appelés « dictionnaires de pertes de charge ». Quelques singularités typiques sont reproduites ci-dessous.



Dû à son inertie, le fluide ne suit pas complètement les changements brusques de direction : il se crée des **zones de turbulences** où il y a dissipation d'énergie. Ces zones, où le fluide est globalement stagnant, sont responsables des pertes de charge singulières.

On peut alors **généraliser l'équation de Bernoulli** :



$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \sum_j K_j \frac{1}{2} \rho v_j^2$$

coefficients de perte de charge singulière associés à chaque singularité rencontrée au cours de l'écoulement

---

## BIBLIOGRAPHIE

Patrick CHASSAING, Mécanique des fluides - Éléments d'un premier parcours, Collection Polytech.

Sébastien CANDEL, Mécanique des fluides, Dunod Paris.

R COMOLET, Mécanique expérimentale des fluides - Statique et dynamique des fluides non visqueux, Masson.

Stéphane CHAUSSEMENT, Cours de mécanique des fluides, Université d'Angers.