CH I — Cinématique

Il s'agit de l'étude des fluides en mouvement : on s'attachera à faire une description des écoulements sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu.

1 - Définitions

a) La particule fluide

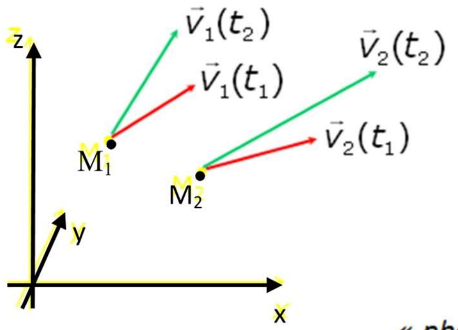
La *particule fluide* est choisie comme *entité élémentaire* permettant une description complète des écoulements :

Il s'agit d'un « paquet » de molécules entourant un point M donné ; celles-ci sont alors supposées avoir toutes la même vitesse au même instant.

b) Descriptions d'*Euler* et de *Lagrange*

Description d'Euler

Cette description de l'écoulement consiste à établir à un **instant *t*** donné l'ensemble des **vitesses associées à chaque point** de l'espace occupé par le fluide.

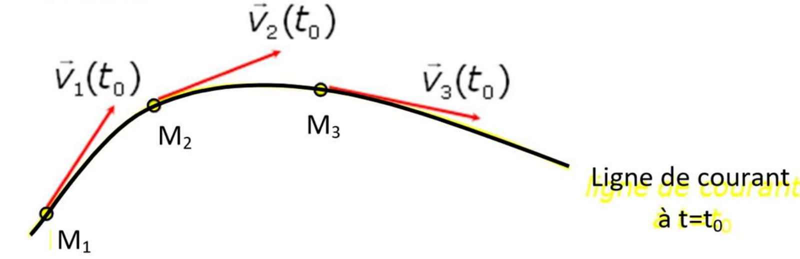


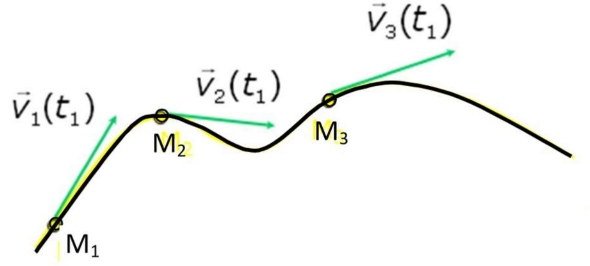
La vitesse $\vec{V}_M(t)$ associée au point M évolue au cours du temps.

A chaque instant *t*, l'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un **champ de vecteurs vitesse**.

« photo instantanée de l'écoulement »

Dans cette description d'*Euler*, on appelle « **ligne de courant** » la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente aux vecteurs vitesse.





Ligne de courant à $t=t_1$

Remarque :

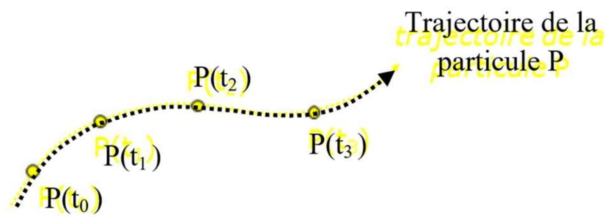
Les lignes de courant évoluent dans le temps, au même titre que le champ de vecteurs vitesse

Description de Lagrange :

Cette description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide.

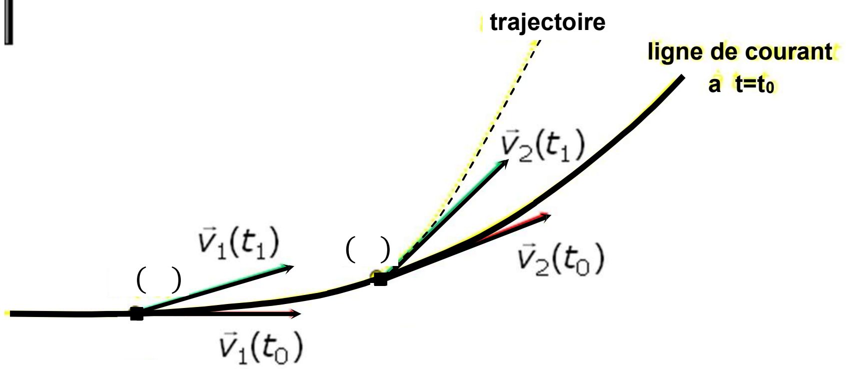
Ici, c'est l'évolution de la position des particules qui permet la description de l'écoulement.

Ainsi, le **lieu géométrique des positions successives** occupées par une particule constitue ce qu'on appelle la « **trajectoire** » de cette particule.



« photo avec temps de pause infini »

Attention : il ne faut pas confondre *ligne de courant* et *trajectoire*. Ce sont deux notions bien différentes.

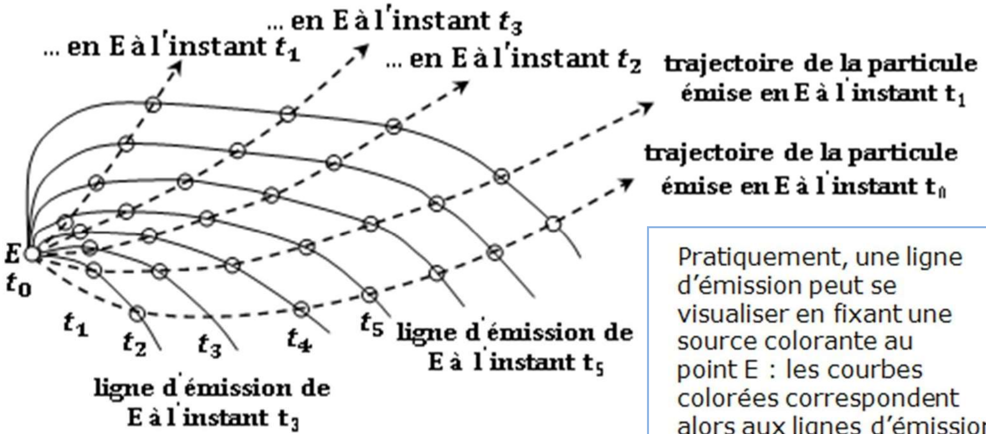


Remarque :

Si l'écoulement est stationnaire, le champ de vecteurs vitesse est constant dans le temps : il y a coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.

c) Ligne d'émission

Toutes les particules qui sont passées par un même point E sont situées, à l'instant t, sur une courbe appelée « **Ligne d'émission** » relative au point E.



Pratiquement, une ligne d'émission peut se visualiser en fixant une source colorante au point E : les courbes colorées correspondent alors aux lignes d'émission

d) Ecoulement permanent

Un écoulement est dit *permanent* (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique : il ne varie pas dans le temps.

Dans ce cas :

- les lignes de courant sont fixes dans l'espace ;
- les trajectoires coïncident avec les lignes de courant ;
- les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

lignes de courant ≡ *trajectoires* ≡ *lignes d'émission*

⇒ plus rien ne dépend explicitement du temps.

2 - Equation de Continuité

a) Cas général

L'équation de continuité doit traduire le *principe de conservation de la masse*.

La variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle de fluide sortant.

On considère alors un élément de volume fluide : $dV = dx\,dy\,dz$

Sa masse peut s'exprimer comme : $m = \rho\,dx\,dy\,dz$

Pendant le temps dt, la variation de cette masse s'écrit :

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt$$

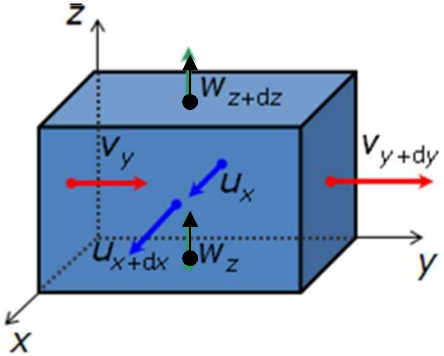
$$dm = \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

Cette variation doit alors être égale à :

(i) la somme des masses de fluide qui entre et sort par les 6 faces de l'élément de volume dV.

(ii) la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de dV.

(i) la somme des masses de fluide qui entre et sort par les 6 faces de l'élément de volume dV.



$\vec{V} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y + w\,\vec{e}_z$

Suivant l'axe y, le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse v_{y+dy}.

Par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime :

$$\left[\rho v\,dx\,dz\,dt\right]_y$$

On a, par ailleurs, pour la masse sortant : $\left[\rho v\,dx\,dz\,dt\right]_{y+dy}$

Le bilan sur l'axe y donne alors : $\left(\left[\rho v\right]_y - \left[\rho v\right]_{y+dy}\right)dx\,dz\,dt$

Un développement au 1er ordre permet d'écrire : $\left[\rho v\right]_{y+dy} = \left[\rho v\right]_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy$

Il reste alors : $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dx\,dz\,dt$ suivant l'axe y.

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\underbrace{dy\,dx\,dz}_{dV}\,dt \quad \text{suivant l'axe } y.$$

Et par analogie sur les autres axes, on trouve :

x

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}\,dt \quad \text{suivant l'axe } x,$$

$$\text{et} \quad -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\underbrace{dz\,dx\,dy}_{dV}\,dt \quad \text{suivant l'axe } z.$$

Au total, à travers les 6 faces on a : $-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dV\,dt$

Donc : $dm = \frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dV\,dt +$ (ii)

(ii) la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de dV.

Si on appelle q_v le débit volumique de fluide créé ($q_v>0$: source) ou détruit ($q_v<0$: puits) par unité de volume, alors :

$\rho\,q_v\,dV\,dt$ correspond à la masse de fluide créée ou détruite pendant le temps dt dans le volume dV.

En généralisant, comme il peut y avoir plusieurs sources ou puits dans un même volume dV, on écrit plutôt :

$$\text{(ii)} = \sum_i \rho\,q_{v_i}\,dV\,dt$$

Bilan global :

$$dm = \frac{\partial\rho}{\partial t}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{\cancel{dV}}\,\cancel{dt} = -\underbrace{\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]}_{\vec{\nabla}(\rho\vec{V})}\cancel{dV}\,\cancel{dt} + \sum_i \rho\,q_{v_i}\,\cancel{dV}\,\cancel{dt}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\quad}{\quad} = -\vec{\ }(\ \vec{\ }) +}$

C'est l'**équation de continuité** (*équation locale qui traduit le principe de conservation de la masse*)

b) Cas particuliers

¤ Ecoulement **permanent** (ou stationnaire) :

Dans ce cas, il n'y a pas de variation explicite avec le temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\quad = \quad}$$

¤ Ecoulement d'un fluide **incompressible** :

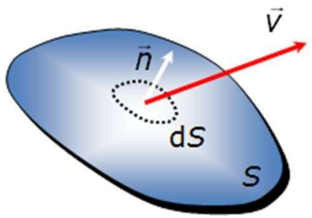
$$\rho = C^{te} \quad \forall \vec{r}, \forall t \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \vec{v} \end{cases}$$

d'où $\boxed{\quad = \quad}$

¤ Ecoulement **conservatif** : Il n'y a ni puits ni source $\Rightarrow \sum_i q_{v_i} = 0$

Et s'il s'agit en outre d'un fluide incompressible : $\boxed{\quad = \quad}$

c) Débits

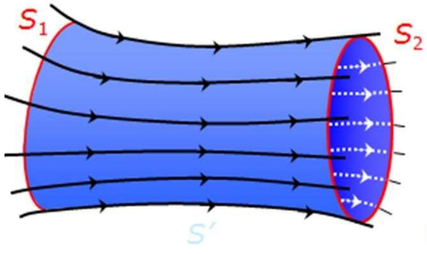


A travers la surface S, le **débit massique** de fluide est donné par :

$$q_m = \int_S \rho \vec{v}.\vec{n} \, \mathrm{d}S$$

A travers la surface S, le **débit volumique** de fluide est donné par :

$$q_v = \int_S \vec{v}.\vec{n} \, \mathrm{d}S$$



Toutes les lignes de courant s'appuyant sur une même courbe fermée constituent une surface (S') appelée « tube de courant ».

Si l'écoulement est permanent (le tube n'évolue pas dans le temps), alors le débit massique est conservé : $q_m(S_1) = q_m(S_2)$

Si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est conservé.

3 - Analyse du mouvement d'un élément de volume fluide - Déformations

Au sein de l'écoulement, chaque particule fluide subit des changements de *position*, d'*orientation* et de *forme*.

Afin d'analyser ces changements, considérons 2 points appartenant à la même particule fluide :

$$M(x,y,z) \quad \text{et} \quad M'(x+dx, y+dy, z+dz)$$

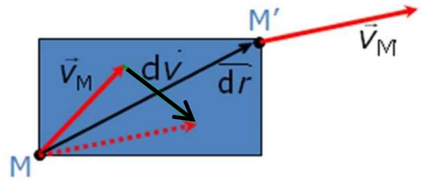
Soient $\vec{v}_M(u,v,w)$ la vitesse au point M,

et $\vec{v}_{M'}(u',v',w')$ la vitesse au point M'.

Exprimons $\vec{v}_{M'}$ en fonction de $\vec{v}_M$ et de $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{MM'}$:

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r})}_{\vec{v}_M} + \underbrace{\mathrm{d}\vec{v}}_{\text{accroissement de vitesse}}$$

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + \mathrm{d}\vec{v}$$



Effectuons un développement au 1er ordre des 3 composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z \\ w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + \overline{\overline{G}}\,\mathrm{d}\vec{r}$$