Université Echahid Hama Lakhdar (El Oued)

Exercices d'Algèbre Linéaire

(Théorie des Anneaux et Modules)

A.A. YOUMBAI

Classe M1 Mathématiques

Exercice 0:
Soit $f : \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ le seul morphisme de groupes non trivial. Vérifiez si f est morphismes d'anneaux.

Exercice 1:
Soient A un anneau commutatif et $I \subset A$ un idéal de A. Démontrer les équivalences :
1. I est premier si et seulement si A=I est intègre.
2. I est maximal si et seulement si A=I est un corps.

Exercice 2:
Montrer les implications qui suivent:
1. Si A est un corps alors A est intègre.
2. Si A est intègre et fini alors A est un corps.

Exercice 3:
Un élément u de A est dit nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$. On appelle radical nilpotent ou encore nilradical de A l'ensemble $N(A) = \{u \in A; u \text{ est nilpotent}\}$.
1. Montrer que $N(A)$ est un idéal de A.
2. Soit $u \in N(A)$. Montrer que $(1 + u) \in A^{\times}$.

Exercice 4:
Soit M un $\mathbb{Z}$-module non nul sans sous-module non triviaux (un tel module est dit simple). Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que M soit isomorphe à $\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Exercice 5:
Soit A un anneau commutatif Soit M un A-module monogène (i.e. il existe un $m \in M$ tel que $M = Am$). Montrer que $End_A(M)$ est isomorphe à $A/Ann_A(M)$.

Exercice 6:
On suppose que A est un anneau intègre commutatif qui n'est pas un corps et soit $\mathbb{K}$ le corps des fractions de A. Montrer que le A-module $\mathbb{K}$ n'est pas libre.

Exercice 7:
Vérifier que $\{(2, 0, 0); (0, 1, 0)\}$ est une partie libre de $\mathbb{Z}^3$ mais qu'on ne peut pas la compléter en une base. Montrer que le système $S = \{(2, 0, 0); (3, 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$ engendre $\mathbb{Z}^3$ mais qu'on ne peut pas en extraire une base.

Exercice 8:
Existe-t'il des sous-$\mathbb{Z}$-modules non nuls M et N de $\mathbb{Z}$ tels que $\mathbb{Z} = M \oplus N$?