كلية العلوم الدقيقة قسم الرياضيات	جـــامعة الشهيد حمة لخضر - الوادي	الاسم واللقب:................ ....
السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي	امتحان الدورة الاستدراكية في مقياس الجبر 01	الفوج :................... المدة :ساعة ونصف

ملاحظة: الدقة ووضوح الإجابة ونظافة الورقة تؤخذ بعين الاعتبار كما أن المكان المخصص للإجابة كاف تماما .

تمرين01: (05نقطة) ليكن التطبيق f المعرف بما يلي : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ و $f(n)=n$ مجموع أرقام العدد
(مثلا: $f(253)=2+5+3=10$)

1) حدد المجموعات التالية

$$f(\{13;27;216;1000\}) = \{f(13),f(27),f(216),f(1000)\}=\{4,9,1\}$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{x\in\mathbb{N}; f(x)=1\}=\{1,10,100,1000,\ldots\}=\{10^n; n\in\mathbb{N}\}$$
$$f^{-1}(\{4\})\cap[1;100]=\{x\in\mathbb{N};\ f(x)=4\ \wedge x\in[1;100]\}=\{4,13,22,31,40\}$$

2) - هل f متباين ؟ (برر إجابتك) لدينا $f(13)=f(22)=4$ و $13\neq 22$ ومنه f ليس متباينا .

- أثبت أن f غامر لدينا من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ يوجد على الأقل $n\in\mathbb{N}$ بحيث : مجموع أرقام n هو p أي : $f(n)=p$

خذ مثلا : $n=\underbrace{1111\ldots1}_{p\text{مرة}}$. ومنه f غامر .

تمرين 02 (04 نقط) : نعرف في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ العلاقة $\mathcal{R}$ كما يلي : $\mathcal{R}(z,z')\Leftrightarrow |z|=|z'|$

1) أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{C}$

- من أجل كل عدد مركب z لدينا : $|z|=|z|$ لأن العلاقة = انعكاسية في $\mathbb{R}$ ومنه $\mathcal{R}(z,z)$ اذا $\mathcal{R}$ علاقة انعكاسية.
- من أجل كل $(z,z')\in\mathbb{C}^2$

$\mathcal{R}(z,z')\Rightarrow |z|=|z'|$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$)

$\Rightarrow |z'|=|z|$ (لأن العلاقة = تناظرية)

$\Rightarrow \mathcal{R}(z',z)$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$) .

اذا $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية .

- ليكن $z,z',z"$ ثلاثة أعداد مركبة

$\mathcal{R}(z,z')\wedge\mathcal{R}(z',z")\Rightarrow(|z|=|z'|)\wedge(|z'|=|z"|)$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$)

$\Rightarrow |z|=|z"|$ (لأن العلاقة = متعدية)

$\Rightarrow \mathcal{R}(z',z'')$ (حسب تعريف العلاقة $\mathcal{R}$)

ومنه العلاقة $\mathcal{R}$ متعدية. اذا $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ لنها تحقق الخواص الثلاثة المذكورة

2) حدد صنف تكافؤ العنصر: $i+1$

صنف تكافؤ العدد $i+1$ هو مجموعة الأعداد المركبة z التي تحقق : $\mathcal{R}(z, i+1)$ أي

اذا $|z|=|i+1|=\sqrt{2}$ $\overline{i+1}=\{\sqrt{2}\, e^{i\theta};\ \theta\in[0;2\pi[\}$.

تمرين 03 (06 نقط) 1) املأ الجدول التالي

القضية P	قيمة حقيقتها	نفي القضية P
$\left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}\right) \vee (\sqrt{2}\in\mathbb{Q})$	0	$\left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}\neq 1-\sqrt{2}\right)\wedge(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q})$
$\forall m\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{Z};\quad m+n=15$	1	$\exists m\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{Z};\quad m+n\neq 15$
$\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R};\ a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$	1	$\exists a\in\mathbb{R},\exists b\in\mathbb{R};\ (\ a^2+b^2=0)\wedge[(a\neq 0)\vee(b\neq 0)]$

2) A ، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E. *أثبت أن :* $(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{C}=\mathrm{A}-\mathrm{B}\cup\mathrm{C}$. $x\in(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{C}$

$\Leftrightarrow[x\in(\mathrm{A}-\mathrm{B})]\wedge(x\notin C)$ *(تعريف الفرق بين مجموعتين)*

$\Leftrightarrow[(x\in A)\wedge(x\notin B)]\wedge(x\notin C)$ *(تعريف الفرق بين مجموعتين)*

$\Leftrightarrow(x\in A)\wedge[(x\notin B)\wedge(x\notin C)]$ *(رابطة الوصل تجميعية)*

$\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B\cup C)$ (نفي $(x\in B\cup C)$)

$\Leftrightarrow x\in A-(B\cup C)$ *(تعريف الفرق بين مجموعتين)*

تمرين 04 (05 نقط) نعرف في المجموعة $\mathbb{R}$ العملية الداخلية Δ كما يلي: $x\Delta y=\ln(e^x+e^y)$.

1. هل العملية Δ تبديلية ؟ بما أن

$$x\Delta y=\ln(e^x+e^y)$$

$$=ln(e^y+e^x)$$ لأن الجمع عملية تبديلية لذلك $e^x+e^y=e^y+e^x$

$$=y\,\Delta\,x$$

ومنه Δ عملية تبديلية في $\mathbb{R}$.

2. هل العملية Δ تجميعية ؟ بما أن

$x\,\Delta\,(y\,\Delta\,z)=ln(e^x+e^{y\Delta z})$ (حسب تعريف العملية Δ)

$=ln\left(e^x+e^{ln(e^y+e^z)}\right)$ (حسب تعريف العملية Δ)

$=ln\left(e^x+(e^y+e^z)\right)$

$=ln\left((e^x+e^y)+e^z\right)$ (لأن الجمع عملية تجميعية في $\mathbb{R}$)

$=ln\left(e^{ln(e^x+e^y)}+e^z\right)$

$=ln(e^{x\Delta y}+e^z)$ (حسب تعريف العملية Δ)

$=(x\,\Delta\,y)\,\Delta\,z$ (حسب تعريف العملية Δ)

ومنه Δ عملية تجميعية.

3. هل للعملية Δ عنصر حيادي؟ اذا كان $s \in \mathbb{R}$ عنصرا حياديا للعملية التبديلية Δ فإنه يحقق :

$$\forall x \in \mathbb{R};\ x \,\Delta\, s = x$$

أي: $ln(e^x + e^s) = x = lne^x$ ومنه $e^x + e^s = e^x$ أي $e^s = 0$ وهذا مستحيل اذل ليس للعملية Δ عنصرا حياديا .

4. عين مجموعة العناصر الاعتيادية بالنسبة للعملية Δ

اذا كان $a \in \mathbb{R}$ عنصرا اعتياديا فإنه يحقق من أجل كل عددين حقيقيين y, x

$$\begin{aligned} x \,\Delta\, a = y \,\Delta\, a &\Rightarrow\ ln(e^x + e^a) = ln(e^y + e^a) \\ &\Rightarrow e^x + e^a = e^y + e^a \\ &\Rightarrow e^x = e^y \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

ومنه كل الأعداد الحقيقية اعتيادية.