السلسلة رقم 4

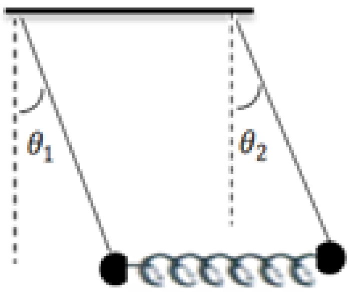
التمرين الأول :

نعتبر نواسين متماثلين (نفس الكتلة m والطول l) مترابطين بواسطة نابض ثابت مرونته k كما هو موضح في الشكل 1 .

1- أوجد عبارة لاغرانج لهذه الجملة من اجل الازاحات الصغيرة, و ذلك باعتبار وضع التوازن عند $\theta_1 = \theta_2 = 0$

2- استنتج معادلتي الحركة.

3- أوجد الأنماط الطبيعية الاساسية للحركة ومثلها.



الشكل 1

التمرين الثاني :

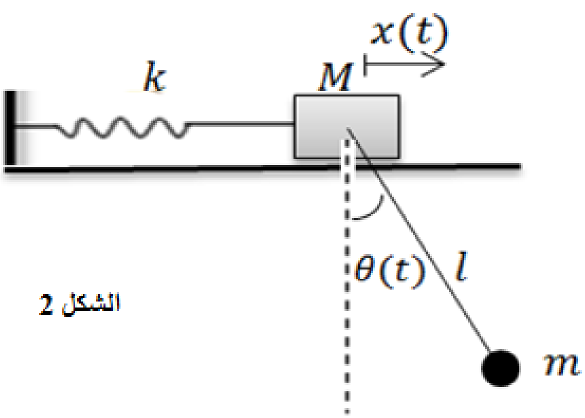
نعتبر الجملة في الشكل 2 المقابل بحيث يتعلق نواس ذو الكتلة m بالكتلة M ويمكنه الحركة بطريقة حرة ، باعتبار الاهتزازات صغيرة فـ:

1- أوجد الطاقة الحركية T .

2- أوجد الطاقة الكامنة U.

3- أوجد دالة لاغرانج L ثم المعادلات التفاضلية للحركة.

4- اذا علمت أن $k = mg/l$ و $M = 2m$ فأوجد التوترات الزاوية للحركة.



الشكل 2

حل السلسلة 4

التمرين الأول :

1. دالة لاغرانج

النظام ذو درجتي حرية و الاحداثيين المعممين هما θ_1 و θ_2

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta_1) + mgl(1 - \cos\theta_2) + \frac{1}{2} k\,(l \sin\theta_2 - l \sin\theta_1)^2$$

$$1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2} \quad , \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$U = mgl\, \frac{\theta_1^2}{2} + mgl\, \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2} kl(\theta_2 - \theta_1)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2 - mgl\, \frac{\theta_1^2}{2} - mgl\, \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{1}{2} kl(\theta_2 - \theta_1)^2$$

2. المعادلات التفاضلية للحركة

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\theta}_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

3. أنماط الحركة :

$$\begin{cases}\theta_1 = \Theta_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2 = \Theta_2 \cos(\omega t + \varphi)\end{cases} \implies \begin{cases}\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-ml^2\theta_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ -ml^2\theta_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\Theta_1 - \frac{k}{m}\Theta_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}\Theta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\Theta_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta_1 \\ \Theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

الحل يكون في وضع : $det = 0$

$$det = \begin{vmatrix}\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\begin{cases}\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \\ \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 - \frac{k}{m} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{l} \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m} \end{cases}$$

النمط الأول :

$$\omega = \omega_1 \Longrightarrow \Theta_1 = \Theta_2$$

الحركة على توافق

النمط الثاني :

$$\omega = \omega_2 \Longrightarrow \Theta_1 = -\,\Theta_2$$

الحركة على تعاكس

التمرين الثاني :

1. الطاقة الحركة

$$T = T_M + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta})^2$$

2. الطاقة الكامنة :

$$U = U_k + U_m$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mgl\,\theta^2$$

3. دالة لاغرانج :

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mgl\,\theta^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

$$M = 2m \text{ و } k = \frac{mg}{l}$$

$$\begin{cases} l\ddot{\theta} + 3\ddot{x} + + \frac{g}{l}x = 0 \\ l\ddot{\theta} + g\theta + \ddot{x} \;= 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 l\theta_0 + \left(\frac{g}{l} - 3\omega^2\right)A = 0 \\ (g - \omega^2 l)\theta_0 - \omega^2 A = 0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} -\omega^2 l & g - \omega^2 l \\ g - \omega^2 l & -\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2l\omega^4 - 4g\omega^2 + \frac{g^2}{l} = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = (2+\sqrt{2})\frac{g}{l} \\ \omega_2^2 = (2-\sqrt{2})\frac{g}{l} \end{cases}$$