وزارة التعليم العالي | جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
سنة أولى ماستر رياضيات | **السنة الدراسية:** 2020/2021

السلسلة الثانية في التوزيعات (فضاء التوزيعات $D'(\Omega)$)

التمرين 1:

أعط شرطا كافيا على المتتالية (a_n) حتى يعرف التطبيق

$$\varphi \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \varphi(\frac{1}{n})$$

توزيعا على $\mathbb{R}$.

التمرين 2:

1. ليكن $\varphi \in D(\mathbb{R})$. بين أن العبارة $I_\varepsilon(\varphi) = (\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)ln(\varepsilon))$ معرفة جيدا من أجل كل $\varepsilon > 0$ و أنها تقبل نهاية منتهية لما $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
2. بين أن $\varphi \longmapsto lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$.

نرمز لهذا التوزيع ب $Pf(\frac{H}{x})$, حيث H تابع هيسفايد.

التمرين 3:

1. عين توزيع مقتصر توزيع ديراك على $\mathbb{R}^*$: $\delta|_{\mathbb{R}^*}$.
2. نفرض أنه يوجد $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}),\ <\delta,\varphi>= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

أثبت أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^*$. وأستنتج أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$.
هل هنالك تناقض؟؟

التمرين 4:

أثبت أن العبارات التالية تعرف توزيع على $\mathbb{R}$:

1. $<T,\varphi>= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\varphi(\frac{1}{n})$
2. $<T,\varphi>= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0))$
3. $<T,\varphi>= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\varphi(\frac{1}{n}) + \varphi(-\frac{1}{n}) - 2\varphi(0))$
4. $<Pf(\frac{1}{x^2}),\varphi>= lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\int_{|\varepsilon|\geq 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)ln(\varepsilon))$.

التمرين 5:

عين حامل كل من التوزيعات التالية:

1. $T = \delta$.
2. $<T,\varphi>= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi(n), \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.
3. $<T,\varphi>= \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx,\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

4. $< T,\varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} exp(x)\varphi'(x)dx,\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.
5. $< T,\varphi >= \int_{0}^{2\pi} \varphi(cos(\theta), sin(\theta))d\theta,\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.
6. $< T,\varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,-x)dx,\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

التمرين 6:

تأكد أن (T_n) متتالية من التوزيعات على $\mathbb{R}$ و أدرس تقاربها:

$$T_n = \frac{n}{1+n^2x^2}, \quad T_n = \frac{sin(nx)}{x}, \quad T_n = n\ sin(nx)H(x)$$

$$T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}), \quad T_n = \frac{n}{2}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x), \quad T_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta^{(k)}.$$

التمرين 7:

1. لنعتبر التابعين $x \longmapsto |x|sin(x)$ و $x \longmapsto |x|cos(x)$.

(أ) بين أن كلا من التابعين يعرف توزيعا على $\mathbb{R}$.

(ب) أحسب المشتق الأول و الثاني لهذه التوزيعات.

2. تأكد في كل حالة من الحالات التالية أن T توزيع على $\mathbb{R}$ و أحسب مشتقه:

$$T_1 = H(x),\ T_2 = vp(\frac{1}{x}),\ T_3 = sgn(x),$$

$$T_4 = (1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x),\ T_5 = H(x)sgn(x),\ T_6 = H(x)ln(|x|).$$

التمرين 8:

نعتبر المتتالية f_j المعرفة ب:

$$f_j(x) = \begin{cases} ln(|x|), & |x| > \frac{1}{j} \\ -ln(j), & |x| \le \frac{1}{j}. \end{cases}$$

1. أرسم بيانات f_1, f_2, f_3.
2. أثبت أن $f_j \longrightarrow ln(|x|)$ في $D'(\mathbb{R})$.
3. أثبت أن $(ln(|x|)' = vp(\frac{1}{x})$.

التمرين 9:

1. (أ) ليكن $\varphi \in D(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi(0) = 0$.

- تأكد من أن $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\int_0^1 \varphi'(tx)dt$.
- استنتج أنه يوجد ψ من $D(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi = x\psi$.

(ب) ليكن $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ بحيث $\varphi_0(0) = 1$.أثبت أن

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}),\ \exists\psi \in D(\mathbb{R}):\ \varphi = \varphi(0)\varphi_0 + x\psi.$$

2. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.

(أ) نفرض أن $xT = 0$. بين أنه يوجد ثابت بحيث $T = c\delta$.

(ب) استنتج أنه إذا كان $(x-a)T = 0$, فإنه يوجد ثابت α بحيث $T = \alpha\delta_a$.

3. ليكن T توزيعا على $\mathbb{R}$.

(أ) بين أن $x\ vp(\frac{1}{x}) = 1$.

(ب) حل المعادلة $xT = 1$.

التمرين 10:

ليكن $T \in D'(\mathbb{R})$.

1. أحسب $(xT)'$ ثم استنتج حلول المعادلة التفاضلية: $xT' + T = 0$
2. أحسب $(x^2T)'$ ثم استنتج حلول المعادلة التفاضلية: $2xT + x^2T' = 0$

التمرين 11 :

ليكن $n \times m \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1. أحسب $x^n\delta^m$.
2. حل في $D'(\mathbb{R})$ المعادلة التفاضلية $x^nT = 0$ ثم أستنتج حلول $x^nT = \delta$.

التمرين 12:

نضع $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > |x|\}$ و $f(x, y) = \chi_\Omega(x, y)$

أحسب في $D'(\mathbb{R}^2)$ العبارة $\frac{d^2f}{d^2y} - \frac{d^2f}{d^2x}$. (حيث χ_Ω هي الدالة المميزة للمجموعة Ω).