كلية العلوم الدقيقة   جامعة الــوادي
قسم الرياضيات

سلسلة تمارين

التمرين 1:

ليكن a و b عددين مركبين، أثبت أن

1) $2|a||b| \leq |a|^2+|b|^2$

2) إستنتج أن

$$|a+b|^2 \leq 2(|a|^2+|b|^2)$$

الحل

1) لدينا $0 \leq (|a|-|b|)^2 = |a|^2+|b|^2-2|a||b|$

ومنه المطلوب $2|a||b| \leq |a|^2+|b|^2$

2) نعلم أن $|a+b| \leq |a|+|b|$

اذن $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|a||b|$

و بتطبيق السؤال الاول نجد المتراجحة المطلوبة:

التمرين 2.

ليكن $E = C([a,b],\mathbb{C})$ و $w:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

حيث $\forall t \in]a,b[, w(t) > 0$.

بين ان $(f,g) = \int_a^b w(t) f(t) \overline{g(t)}\,dt$

جداء سلمي على E.

الحل

1) $(f,f) = \int_a^b w(t)|f(t)|^2 dt \geq 0$

2) اذا كان $f=0$ فانه من الواضح ان $(f,f)=0$

اذا كان $(f,f)=0$ فان $w(t)|f(t)|^2=0$ من اجل كل t

و بما ان $w(t)>0$ فان $f(t)=0, \forall t \in [a,b]$ اي $f=0$

3) $\overline{(f,g)} = \overline{\int_a^b w(t) f(t) \overline{g(t)}\,dt}$

$$= \int_a^b w(t) \overline{f(t)} g(t)\,dt = (g,f)$$

4) $(\alpha f+\beta h, g) = \int_a^b w(t)(\alpha f(t)+\beta h(t))\overline{g(t)}\,dt$

$$= \alpha\int_a^b w(t) f(t)\overline{g(t)}\,dt + \beta\int_a^b w(t) h(t)\overline{g(t)}\,dt$$
$$= \alpha(f,g)+\beta(h,g).$$

التمرين 3.

$E = C^1([0,1],\mathbb{R})$

بين ان $(f,g) = f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$

هو جداء سلمي في E

الحل

يكفي أن نبرهن الخاصية الثانية للجداء السلمي

اذا كان $f=0$ فان $f(0)=0$ و $f'(t)=0$ و بالتالي

$(f,f)=0$.

اذا كان $(f,f)=0$ فان $f^2(0)=0$ و $|f'(t)|^2=0$

اذن $f'=0$ و $f(0)=0$ و بالتالي f ثابتة و $f(0)=0$

ومنه $\forall t \in [0,1]\ f(t)=0$

التمرين 4

نزود $\mathbb{R}^n$ بالنظيم $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

بين أن هذا النظيم ليس مولد من جداء سلمي

الحل.

نبرهن أن متطابقة متوازي الاضلاع غير محققة

نختار $x = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ، $y = (0, 1, 0, \dots)$

اذا $\|x+y\| = 2$ ، $x + y = (1, 1, 0, \dots)$

$\|x-y\| = 2$ ، $x - y = (1, -1, 0, \dots)$

$\|x\| = \|y\| = 1$

وبالتالي $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$

بينما $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$

التمرين 5

برهن أن متراجحة كوشي - شوارز تكون مساواة اذا وفقط اذا كان $x = \lambda y$ من اجل $\lambda \in \mathbb{C}$

الحل

* نفرض ان $x = \lambda y$ اذن

$$|(x,y)| = |(\lambda y, y)| = |\lambda| \|y\|^2 = |\lambda| \|y\| \|y\|$$
$$= \|\lambda y\| \|y\| = \|x\| \|y\|$$

* نفرض أن $|(x,y)| = \|x\| \|y\|$

ليكن كثير الحدود $P(t) = \|x + ty\|^2 = (x+ty, x+ty)$

$$P(t) = \|x\|^2 + 2t(x,y) + t^2 \|y\|^2$$

$$\Delta = 4|(x,y)|^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 = 0$$

اذن $P(t) = 0$ تقبل حلا t_0

ومنه $P(t_0) = \|x + t_0 y\|^2 = 0$

$$\Rightarrow x + t_0 y = 0 \Rightarrow x = -t_0 y$$

نضع $\lambda = -t_0$ يكون $x = \lambda y$

التمرين 6

لتكن $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

باستعمال متراجحة كوشي - شوارز برهن أن

1) $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ ، في أي حالة تكون المساواة

2) نفرض ان $x_k > 0$ من اجل كل k و أن $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

برهن أن

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

في أي حالة تكون المساواة

الحل

نطبق متراجحة كوشي - شوارز في $\mathbb{R}^n$ على

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (1, 1, \dots, 1)$ اذن

$$|(x,y)| = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = |\sum x_k|$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} 1^2 = n$$

وبالتالي $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$

نكتب

$$\left|\sum x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{n}$$

بالتربيع نجد

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

من التمرين السابق تكون المساواة اذا كان $x = \lambda y$

اي $x_k = \lambda y_k$ وبالتالي $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \lambda$

2) نطبق متراجحة كوشي-شوارز على

$$y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}) \text{ و } z = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$$

اذن

$$|(y,z)| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}} = n$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

ومنه

$$n^2 \leq 1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

المساواة تكون في حالة $y = \lambda z$ اي

$$\sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}} \Rightarrow x_k = \lambda, \forall k = 1, \dots, n$$

التمرين 7

X فضاء شبه هلبرتي مزود بجداء سلمي $(\cdot,\cdot)$

برهن ان x و y تكونان متعامدتان اذا وفقط اذا كان

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

الحل

* نفرض أن $(x,y) = 0$ اذن

$$\|x + \lambda y\|^2 = (x + \lambda y, x + \lambda y) = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

وبالتالي $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$

* نفرض أن $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ اذن $\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$

اي $\|x\|^2 + 2\lambda(x,y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

وبالتالي $\|y\|^2\lambda^2 + 2\lambda(x,y) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ثنائي الحد $\|y\|^2\lambda^2 + 2(x,y)\lambda$ لا يغير اشارته اذا

كان $\Delta \leq 0$ أي $4|(x,y)|^2 \leq 0$ وهذا غير

ممكن الا اذا كان $(x,y) = 0$

التمرين 8

X فضاء شبه هيلبرتي على $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$

برهن ان x و y تكونان متعامدتان اذا وفقط اذا كان

$$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

الحل

$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \iff \|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$$
$$\iff (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x-\alpha y, x-\alpha y)$$
$$\iff \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2 + 2Re(\alpha(y,x))$$
$$= \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2 - 2Re(\alpha(y,x))$$
$$\iff 4Re(\alpha(y,x)) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

باختيار $\alpha = (x,y)$ يكون

$$Re(\alpha(y,x)) = |(x,y)|^2 = 0 \iff (x,y) = 0$$

التمرين 9

نزود الفضاء $X = C([0,1], \mathbb{R})$ بالجداء السلمي

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

لتكن $F = \{f \in X,\ f(0) = 0\}$.

أثبت أن $F^\perp = \{0\}$

الحل

لتكن $g \in F^\perp$ ولتكن $f(t) = t\,g(t)$

اذن $f \in F$ و $(f,g) = 0$ أي

$$\int_0^1 t\,g^2(t)\,dt = 0$$

بما أن $t\,g^2(t)$ لا تغير أشارتها على $[0,1]$

فإن $t\,g^2(t) = 0,\ \forall t \in [0,1]$ وبالتالي

$$\forall t \in]0,1],\ g(t) = 0$$

وبما أن g مستمرة على $[0,1]$ فإن

$g(0) = \lim_{t \to 0} g(t) = 0$ اذن $g = 0$

وعليه $F^\perp = \{0\}$.

التمرين 10

في $\mathbb{R}^3$ نعتبر الأساس $v_1 = (3,4,0)$

$$v_2 = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{33}}{5}\right),\ v_3 = (0,1,-1)$$

انشئ أساس متعامد ونظامي.

الحل

$\|v_1\| = 5$ اذن نضع $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

$$e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

$$b_2 = v_2 - (v_2, e_1)e_1 = \left(-1, 0, \frac{33}{25}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$
$$= \left(\frac{-16}{25}, \frac{9}{25}, \frac{\sqrt{33}}{5}\right)$$

$$\|b_2\| = \sqrt{\frac{1225}{625}} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$$e_2 = \frac{5}{7}\left(\frac{-16}{25}, \frac{9}{25}, \frac{\sqrt{33}}{5}\right)$$

$$e_2 = \left(\frac{-16}{35}, \frac{9}{35}, \frac{\sqrt{33}}{7}\right)$$

$$b_3 = v_3 - (v_3, e_1)e_1 - (v_3, e_2)e_2$$
$$= (0,1,-1) - \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) + \left(\frac{9}{35} + \frac{\sqrt{33}}{7}\right)\left(\frac{-16}{35}, \frac{9}{35}, \frac{\sqrt{33}}{7}\right)$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}$$

التمرين 11

الحل

نزود $X=\ell^2$ بالجداء السلمي العادي، ولتكن A
$$A=\{(x_n)\in\ell^2,\ x_{2k}=0,\forall k\in\mathbb{N}^*\}$$
عين $A^\perp$.

لتكن $y\in\ell^2$، $y=(y_k)$ و $y\in A^\perp$

اذن $\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n=0 \iff (y,x)=0$

وعليه $\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k-1}\,x_{2k-1}=0$

من اجل y من الشكل $y_{2k-1}=0$ من اجل كل $k\in\mathbb{N}^*$

يكون $(y,x)=0$ اي ان
$$\{y\in\ell^2,\ y_{2k-1}=0\ \forall k\in\mathbb{N}^*\}\subset A^\perp$$
من جهة ثانية لتكن $y\in A^\perp$

لدينا $e_{2k-1}\in A$ وبالتالي
$$\forall k\in\mathbb{N}^*\ (y,e_{2k-1})=0=y_{2k-1}$$
وعليه $A^\perp=\{y\in\ell^2,\ y_{2k-1}=0\ \forall k\in\mathbb{N}^*\}$

التمرين 12

الحل

ليكن H فضاء هيلبرت و X و Y فضائين جزئيين منه
$$X+Y=\{x+y,\ x\in X, y\in Y\}$$
بين أن $(X+Y)^\perp=X^\perp\cap Y^\perp$

بداية لدينا $X\subset X+Y \Rightarrow (X+Y)^\perp\subset X^\perp$

$Y\subset X+Y\Rightarrow (X+Y)^\perp\subset Y^\perp$

وعليه $(X+Y)^\perp\subset X^\perp\cap Y^\perp$

من جهة ثانية لتكن $z\in X^\perp\cap Y^\perp$

اذن من اجل كل $t=x+y$، $t\in X+Y$

يكون $(z,t)=(z,x+y)=(z,x)+(z,y)$

بما أن $z\in X^\perp$ فان $(z,x)=0$ وبما أن $z\in Y^\perp$ فان $(z,y)=0$

ومنه $\forall t\in X+Y,\ (z,t)=0$ اي $z\in(X+Y)^\perp$

وبالتالي $X^\perp\cap Y^\perp\subset(X+Y)^\perp$

التمرين 13

الحل

A جزء من فضاء هيلبرتي H.

أثبت أن $A^\perp=\bar{A}^\perp$

لدينا $A\subset\bar{A}$ اذن $\bar{A}^\perp\subset A^\perp$

من جهة ثانية لتكن $x\in A^\perp$ اذن $\forall y\in A, (x,y)=0$

لتكن $z\in\bar{A}$ اذن توجد متتالية $(y_n)\subset A$ حيث

$z=\lim y_n$ وبالتالي $(x,z)=\lim(x,y_n)=0$

وعليه $x\in\bar{A}^\perp$ اذن $A^\perp\subset\bar{A}^\perp$ ومنه $A^\perp=\bar{A}^\perp$

التمرين 14

الحل

ليكن H فضاء هيلبرتي و $y \neq 0$ من H

و لنكن $S = \{x \in H, (x,y) = 0\}$ اي ان $S = \{y\}^{\perp}$

ولنكن $A = \{\alpha y, \alpha \in \mathbb{C}\}$ نبين ان $S^{\perp} = A$

لنكن $x \in S$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ اذن $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) = 0$

اذن $x \in A^{\perp}$ اي ان $S \subset A^{\perp}$

من جهة ثانية اذا كان $x \in A^{\perp}$ فان $(x, \alpha y) = 0$

و بالتالي $(x,y) = 0$ اي $x \in S$ و منه $S = A^{\perp}$

بما أن A ذو بعد واحد فهو مغلق اذن $A^{\perp\perp} = A$

و بالتالي $S^{\perp} = A$.

التمرين 15

أثبت ان

$$C = \{C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, C_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, n \in \mathbb{N}^*\}$$

هي أساس متعامد و نظامي لـ $L^2_{\mathbb{C}}[0,\pi]$

الحل

$$(C_n(x), C_m(x)) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

si $n = m$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx + 1}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos 2nx + 1) \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2n}\sin 2nx + x\right]_0^{\pi} = 1$$

si $m \neq n$ $(C_n(x), C_m(x)) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x\right]_0^{\pi} = 0$$

ثم نبرهن ان الفضاء المولد بـ C كثيف في $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

1) لدينا من اجل كل $\varepsilon > 0$, $f \in L^2$ يوجد $g \in C([0,\pi])$ حيث

$$\|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من جهة ثانية لدينا من اجل $\varepsilon > 0$ $\exists g_1 \in \mathrm{Vect}\, C$ حيث

$$\|g_1 - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و بالتالي من اجل كل $f \in L^2$ و من اجل كل $\varepsilon > 0$

توجد $g_1 \in \mathrm{Vect}\, C$ حيث $\|g_1 - f\| < \varepsilon$

اي ان الفضاء المولد بـ C ($\mathrm{Vect}\, C$) كثيف

في $L^2([0,\pi])$.

تمارين حول المؤثرات

التمرين 1

ليكن T تطبيق معرّف كما يلي

$$T : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Tf = \int_0^1 f(t)\,dt$$

بين أن T محدود (مستمر).

التمرين 2

ليكن $T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ حيث

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

أثبت أن T محدود.

التمرين 3

لتكن $h \in L^\infty([0,1])$.

1. بين أنه من أجل كل $f \in L^2([0,1])$ فإن $fh \in L^2([0,1])$.
2. نعرف المؤثر T كالتالي

$$T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$$

$$Tf = fh$$

أثبت أن T محدود (مستمر).

التمرين 4.

$T : l^2 \longrightarrow l^2$ حيث

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$$

1) بين أنه من اجل $(x_1, x_2, \dots) \in l^2$ فإن $T(x_1, x_2, \dots x_n, \dots) \in l^2$

2) أثبت ان T محدود.

الحل

التمرين 1

$$|Tf| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

$$\leq \sup|f(t)| \int_0^1 dt = \|f\|_\infty$$

التمرين 2

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left|\int_0^x 1 \cdot f(t)\,dt\right|^2 dx$$

بتطبيق متراجحة كوشي - شوارز

$$\leq \int_0^1 x \int_0^x |f(t)|^2\,dt\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2\,dt\,dx \leq \int_0^1 \|f\|\,dx = \|f\|$$

التمرين 3

يكون $fh \in L^2$ اذا كان $\int_0^1 |fh|^2 dx < \infty$

$$\int_0^1 |f(t)h(t)|^2 dt \le \sup_{t\in[0,1]} |h(t)|^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

$$\le \|h\|_\infty^2 \|f\|_{L^2}^2$$

2) $$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(t)h(t)|^2 dt$$

$$\le \|h\|_\infty^2 \|f\|_{L^2}^2$$

اذن $\|Tf\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$

التمرين 4

1) $$\|(0,4x_1,x_2,4x_3,\dots)\|_{\ell^2}^2 = 0^2+(4x_1)^2+x_2^2+(4x_3)^2+\dots$$

$$\le 16\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 16\|(x_n)\|_{\ell^2}^2 < \infty$$

2) بنفس الطريقة

$$\|T(x_n)\|_{\ell^2}^2 \le 16\|(x_n)\|_{\ell^2}^2$$

اذن T محدود.

حساب نظيم كل مؤثر

التمرين 1: برهنا أن $\|Tf\| \le \|f\|$ اذن $\|T\| \le 1$

من جهة ثانية من اجل $g(x) = 1$ لدينا

$\|g\| = \sup|g(x)| = 1$ و $|Tg| = \int_0^1 1\,dt = 1$

وبما أن

$$\|Tg\| \le \|g\|\,\|T\|$$

فان $\|T\| \ge 1$ ومنه المساواة.

التمرين الثاني: $\|T\|_{\ell^2} \le \|h\|_\infty$

التمرين 4: $\|T(x_n)\| \le 4\|(x_n)\|$

اذن $\|T\| \le 4$

من جهة ثانية نأخذ $x = (1,0,0,\dots)$

يكون لدينا $T(x) = (0,4,\dots)$

$|T(x)| = 4$

وعليه $4 = \|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$

$\le \|T\|\,1$

وبالتالي $\|T\| \ge 4$

ومنه $\|T\| = 4$