TD2

Exercice 01 :

En considérant un pas $\Delta x = 0.1$, calculer par un schéma de différences finies :

(a) en avant, (b) en arrière (c) et centré la dérivée première de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x = 2$.

Calculer l'erreur de troncation pour chaque cas.

Solution :

On a :

$$x_i = 2\,,\ \Delta x = 0.1 \ \text{et}\ f(x_i) = x_i^2$$
$$x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2.1$$
$$x_{i-1} = x_i - \Delta x = 1.9$$
$$f_i = f(2) = 4$$
$$f_{i+1} = f(2.1) = 4.41$$
$$f_{i-1} = f(1.9) = 3.61$$
$$f''(x) = 2$$

(a) Différences premières en avant

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = 4.1$$
$$O(h) = -\frac{\Delta x}{2} f''(\xi) = -0.1$$

b) Différences en arrière

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = 3.9$$
$$O(h) = \frac{\Delta x}{2} f''(\xi) = 0.1$$

(a) Différences centrées

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = 4$$
$$O(h^2) = \frac{\Delta x^2}{6} f^{(3)}(\xi) = 0$$

Exercice 02 :

Soit T_0 la température du point de grille sur la frontière et T_1, T_2, T_3, … les températures aux points de grille voisins le long de la direction x positive (voir Fig.II.1). Le flux de chaleur à la frontière x = 0 est d'être déterminé à partir de sa définition donnée par :

$q_w = -k\,(\partial T / \partial x)_{x=0}$. Représenter la dérivée de la température à x = 0 avec des différences finies en utilisant approximations d'ordre $0(\Delta x)$, $0[(\Delta x)^2]$ et $0[(\Delta x)^3]$.

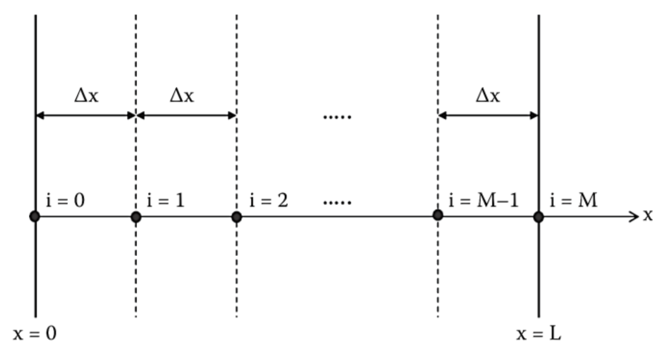


Fig.II.1: Exemple de discrétisation d'un domaine spatial unidimensionnel.

Solution :

Les schémas de différenciation avant doivent être utilisés car les points de grille i = 1, 2, 3, … par rapport au nœud frontière i = 0 sont situés le long de la direction x positive. Les représentations des différences finies directes, précises à l'ordre $0(\Delta x)$, $0[(\Delta x)^2]$ et $0[(\Delta x)^3]$, obtenues à partir des équations (II.17),(II.21) et (II.23), respectivement, sont donnés par :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_0}{\Delta x}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2\Delta x}(-3T_0 + 4T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{6\Delta x}(-11T_0 + 18T_1 - 9T_2 + 2T_3)$$

Exercice 03 :

Discrétiser l'équation de conduction thermique unidimensionnelle en régime permanent, à conductivité thermique constante, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x) = 0 \qquad \text{(II.31)}$$

en utilisant des différences finies centrales de second ordre.

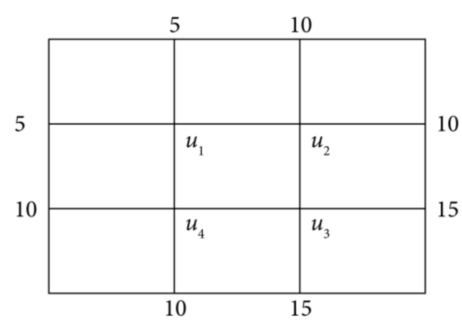
Solution :

En appliquant l'équation (II.26) et la notation $g_i = g(i\,\Delta x)$, l'équation (II.31) se réduit à :

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{g_i}{k} = 0$$

Exercice 04 :

Résoudre l'équation de Laplace $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ pour le maillage carré avec la frontière valeurs (conditions de Dirichlet) comme indiqué dans la figure suivante. Utiliser la méthode Gauss – Seidel jusqu'à ce que deux itérations consécutives ont les mêmes valeurs jusqu'à trois décimales.



Prendre la première approximation, $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = u_4^{(0)} = 0$.

Solution :

Dirichlet conditions (function value, $u(x, t)$) are given at both the boundaries for the variables x and y. It is easy to apply standard 5-points formula (16.73)

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

Using the function values $u(x, t)$ at the nodal points, we get following four equations

$$u_1 = \frac{1}{4}\left(5+5+u_2+u_4\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(10+10+u_1+u_3\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\left(15+15+u_2+u_4\right)$$

$$u_4 = \frac{1}{4}\left(10+10+u_1+u_3\right)$$

On solving this system of simultaneous linear equations by Gauss–Seidel method with initial approximation $[0, 0, 0, 0]^T$, the following iterations $\left[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\right]$ are obtained.

Iteration 1

2.500000	5.625000	8.906250	7.851562

Iteration 2

5.869141	8.693848	11.636353	9.376373

Iteration 3

7.017555	9.663477	12.259962	9.819380

Iteration 4

7.370714	9.907669	12.431763	9.950619

Iteration 5

7.464572	9.974084	12.481175	9.986437

Iteration 6

7.490130	9.992826	12.494816	9.996237

Iteration 7

7.497266	9.998020	12.498564	9.998958

Iteration 8

7.499245	9.999453	12.499602	9.999712

Iteration 9

7.499791	9.999848	12.499890	9.999920

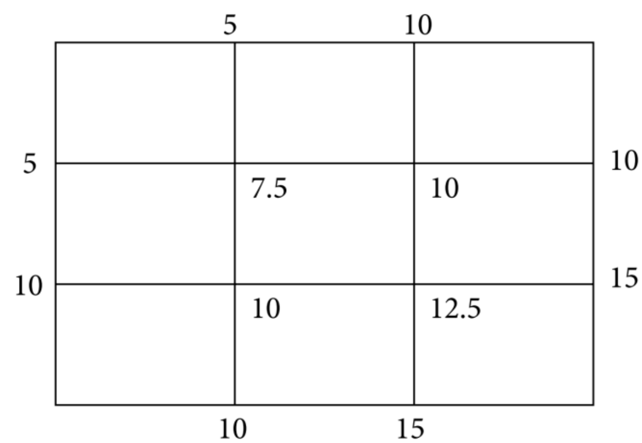
Iteration 10

7.499942	9.999958	12.499969	9.999978

The last two iterations are equal up to three decimal digits. So the solution is given by values at 10th iteration. Note that exact answer is given by

$u_1 = 7.5 \quad u_2 = 10 \quad u_3 = 12.5 \quad u_4 = 10$

Note: The result can be justified by the following figure. The standard 5-points formula is exactly true for each nodal point.



Exercice 05 :

L'équation de Laplace $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ est défini sur la région carrée $\{0 \leq x \leq 0.6; 0 \leq y \leq 0.6\}$ Les conditions aux limites sont définies par :

i) $u = 0$ sur les arêtes $x = 0, y = 0$ et $y = 0.6$ (Condition de Dirichlet).

ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ au bord $x = 0.6$ (Condition de Neumann).

Trouver les valeurs de u (x, y) aux points nodaux de la région carrée avec une longueur de désordre 0.2 à l'aide de la méthode de sur-relaxation. Remplacer la condition aux limites dérivée par leur approximation de différence centrale.

Solution :

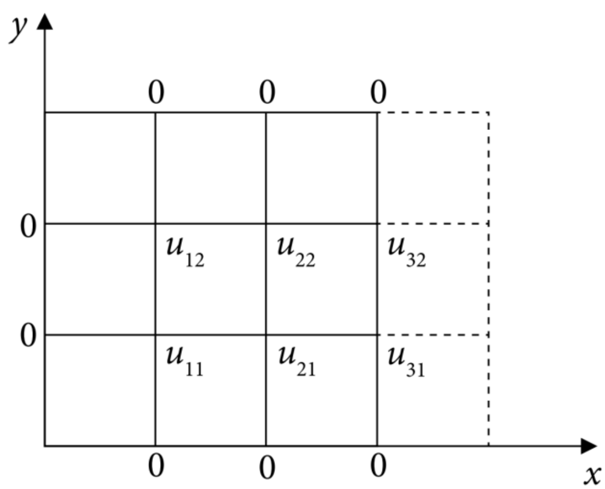
The nodal points of the square region $\{0 \le x \le 0.6;\ 0 \le y \le 0.6\}$ with mess length 0.2 are given by

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 0.2,\ y_2 = 0.4,\ y_3 = 0.6$$

The Dirichlet condition ($u = 0$) is given at $x = 0,\ y = 0,\ y = 0.6$, and Neumann condition $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1\right)$ is given at the edge, $x = 0.6$. The values of $u(x,\ y)$ have to be determined at the mess points and boundary ($x = 0.6$).

Let $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Now, we have to compute the values $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}$.

To replace the derivative boundary condition at $x = 0.6$ with central difference, we have to extend the boundary at $x = 0.6$.



On replacing the boundary condition $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ at any point $(x_i,\ y_j)$ with central difference, we get

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_i, y_j)} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 1$$

At the edge $x = 0.6\,(i = 3)$ and for $j = 1,\ 2$, we have

$$\frac{u_{4,1} - u_{2,1}}{2(0.2)} = 1 \qquad \Rightarrow u_{4,1} = 0.4 + u_{2,1} \tag{16.76}$$

$$\frac{u_{4,2} - u_{2,2}}{2(0.2)} = 1 \qquad \Rightarrow u_{4,2} = 0.4 + u_{2,2} \tag{16.77}$$

On applying standard 5-points formula for calculations at each nodal point, we have

At (1, 1) $\quad u_{21}+u_{12}-4u_{11}=0$

At (2, 1) $\quad u_{31}+u_{11}+u_{22}-4u_{21}=0$

At (3, 1) $\quad u_{21}+u_{32}+u_{41}-4u_{31}=0$

$u_{21}+u_{32}+(u_{21}+0.4)-4u_{31}=0$ From Eq. (16.76)

At (1, 2) $\quad u_{22}+u_{11}-4u_{12}=0$

At (2, 2) $\quad u_{12}+u_{21}+u_{32}-4u_{22}=0$

At (3, 2) $\quad u_{31}+u_{22}+u_{42}-4u_{32}=0$

$u_{31}+u_{22}+(0.4+u_{22})-4u_{32}=0$ From Eq. (16.77)

Equations (16.76) and (16.77) are used to replace values of u_{41} and u_{42} from equations at nodes (3, 1) and (3, 2). Now, we are left with following six equations.

$$u_{11}=\frac{1}{4}\left(u_{21}+u_{12}\right)$$

$$u_{21}=\frac{1}{4}\left(u_{31}+u_{11}+u_{22}\right)$$

$$u_{31}=\frac{1}{4}\left(u_{21}+u_{32}+u_{21}+0.4\right)$$

$$u_{12}=\frac{1}{4}\left(u_{22}+u_{11}\right)$$

$$u_{22}=\frac{1}{4}\left(u_{12}+u_{21}+u_{32}\right)$$

$$u_{32}=\frac{1}{4}\left(u_{31}+u_{22}+0.4+u_{22}\right)$$

These equations are diagonally dominant, so we can apply Gauss–Seidel method. On solving this system by Gauss–Seidel with initial approximation $[0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, we get following iterations

Iteration 1

0.000000 0.000000 0.100000 0.000000 0.000000 0.125000

Iteration 2

0.000000 0.025000 0.143750 0.000000 0.037500 0.154687

Iteration 3

0.006250 0.046875 0.162109 0.010938 0.053125 0.167090

Iteration 4

0.014453	0.057422	0.170483	0.016895	0.060352	0.172797

Iteration 5

0.018579	0.062354	0.174376	0.019733	0.063721	0.175454

Iteration 6

0.020522	0.064655	0.176191	0.021061	0.065292	0.176694

Iteration 7

0.021429	0.065728	0.177037	0.021680	0.066026	0.177272

Iteration 8

0.021852	0.066229	0.177432	0.021969	0.066368	0.177542

The final solution of the Laplace equation is given by

$$u_{11} = 0.021852 \qquad u_{21} = 0.066229 \qquad u_{31} = 0.177432$$
$$u_{12} = 0.021969 \qquad u_{22} = 0.066368 \qquad u_{32} = 0.177542$$