1

تمارين اجابة حول الحركيات

تمرين ①: نقطة مادية M تتحرك في المستوى xoy وفق القانون:

$$\begin{cases} x(t) = 3t + 1 \\ y(t) = 4t + 1 \end{cases}$$

① أوجد معادلة المسار

② أحسب شعاع السرعة والتسارع وماهي طبيعة الحركة.

الحل: ① معادلة المسار

$$x = 3t + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{3} = t$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{4(x-1)}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = \frac{4x}{3} - \frac{1}{3}$$

هي عبارة عن معادلة خط مستقيم.

② $\vec{v} = \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \quad |\vec{v}| = 5 m/s$

$\vec{a} = \vec{0}$.

الحركة مستقيمة منتظمة.

تمرين ②: تتحرك نقطة مادية في المستوى (xoy) بالاحداثيات:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$$

عين:

① معادلة المسار

② السرعة والتسارع في اللحظة $t = \frac{\pi}{2} s$.

③ الزاوية المحصورة بين شعاع السرعة والتسارع في $t = \frac{\pi}{2} s$.

الحل ②:

نستعمل العلاقة المثلثية:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

$$= \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$= \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2x^2 - 1}$$

المسار هو قطع مكافئ

2/

② ايجاد $\vec{v}, \vec{a}$

$$\vec{v}\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = -2\sin 2t \end{cases}$$

$$\vec{v} = -\sin t\,\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{i}$$

$$\vec{a} = -\cos t\,\vec{i} - 4\cos 2t\,\vec{j}\ ,\quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\vec{j}$$

③ ايجاد الزاوية:

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = a\cdot v\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{a\cdot v}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin t\cdot\cos t + 8\sin 2t\cdot\cos 2t}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{v}}$$

$$\cos\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{\sqrt{}} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$$

تمرين ③: في الاحداثيات الاسطوانية حركة النقطة M معرفة بمركبات شعاع الموضع $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = a\,\vec{u_\rho} + bt\,\vec{k}\ ,\quad \theta = c\cdot t^2$$

حيث: a, b, c ثوابت

عين:

① السرعة والتسارع

② احسب a_T و a_N ونصف قطر الانحناء بعد دورة كاملة حول المحور Oz:

الحل ③:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

لدينا من علاقة شعاع الموضع:

$$\vec{v} = 2ct\cdot a\,\vec{u_\theta} + b\vec{k}$$

$$\rho = a\ ,\quad z = bt\ ,\quad \theta = ct^2$$

$$\begin{cases} \rho = a & z = bt & \theta = ct^2 \\ \dot{\rho} = 0 & \dot{z} = b & \dot{\theta} = 2ct \end{cases}$$

$$\rho'' = 0 \qquad z'' = 0 \qquad \theta'' = 2c$$

3/ $\vec{a} = (\rho'' - \rho\theta'^2)\vec{u_\rho} + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\vec{u_\theta} + z''\vec{k}$

$= (0 - 4(cta)^2)\vec{u_\rho} + (0 + 2ca)\vec{u_\theta} + 0\vec{k}$

$\vec{a} = 2ac\vec{u_\theta} - 4a(ct)^2\vec{u_\rho} = 2ac(\vec{u_\theta} - 2ct^2\vec{u_\rho})$

$|\vec{a}| = 2ac\sqrt{1 + 4c^2t^4}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}$

② حساب $a_T, a_N, R \Leftarrow$

$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\cancel{2}\cdot 4a^2c^2t}{\cancel{2}\sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}} = \frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2+b^2}}$

$a_N = \frac{v^2}{R}$, $a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2$

$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{2ac(16a^2c^4t^6 + 4b^2c^2t^4 + b^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}}$

$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(4a^2c^2t^2 + b^2)^{3/2}}{4ac(16a^2c^4t^6 + 4b^2c^2t^4 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$

$t = 2\pi$ نعوضها مباشر

التمرين ④ :

نعرف الاحداثيات الديكارتية التالية:

حيث:

$x = R\cos\omega t$

$y = R(1 - \cancel{\cos\omega t}\ \sin\omega t)$

$z = h\omega t$

R, h, ω ثوابت

عين:

- معادلة المسار,
- شعاع السرعة, التسارع
- أوجد الاحداثيات الاسطوانية (ρ, θ, z)

4

8 4 / A

- معادلات المسار :

$x = R.\cos\omega t$

1 $y = R(1 - \sin\omega t) = R - R\sin\omega t$

$z = h\omega t$

نعرف معادلة المسار في المستوى xoy :

$x = R.\cos\omega t$

$y = R - R\sin\omega t$

$\Rightarrow$

$(x)^2 = (R\cos\omega t)^2 \longrightarrow ①$

$(y-R)^2 = (R\sin\omega t)^2 \longrightarrow ②$

بجمع طرفي الطرف :

$x^2 + (y-R)^2 = R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$ = 1

$x^2 + (y-R)^2 = R^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-R)^2 = R^2$

هي معادلة دائرة مركزها $C(0,R)$ ونصف

قطرها R. على المحور (oz) حركة مستقيمة اذن حركة

النقطة هي حركة اسطوانية أو حلزونية.

2) $\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x' = -R\omega\sin\omega t \\ y' = -R\omega\cos\omega t \\ z' = h\omega \end{cases}$

$\vec{v} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} - R\omega\cos\omega t\,\vec{j} + h\omega\vec{k}$

$\vec{a} \begin{cases} x'' = -R\omega^2\cos\omega t \\ y'' = R\omega^2\sin\omega t \\ z'' = 0 \end{cases}$

$\vec{a} = -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} + R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

3) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2 + R^2\sin^2\omega t - 2R\sin\omega t}$

$\rho = \sqrt{2R^2 + 2R\sin\omega t}$. $\tan\theta = \frac{R(1-\sin\omega t)}{R\cos\omega t}$

$\theta = \arctan\left(\frac{1-\sin\omega t}{\cos\omega t}\right)$

$z = h\omega t$