تمارين إضافية حول التحريك والعمل والطاقة

تمرين ①: نضع كتلة نقطية m في حقل قوى ونعرف الطاقة الكامنة بالصيغة الرياضية:

$$U(x,y,z) = 2x^2 - xy + yz$$

① ما هي القوة $\vec{F}$ التي تؤثر على الكتلة m؟

- الحل ①:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

حيث المشتقات الجزئية هي:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -(4x - y)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -(-x + z)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = y$$

$$\vec{F} = -(4x - y)\vec{i} - (-x + z)\vec{j} + y\vec{k}$$

تمرين ②:

لتكن القوة $\vec{F}$ معطاة كما يلي:

$$\vec{F} = a(x + 2y)\vec{i} + bxy\vec{j}$$

① أحسب عمل هذه القوة لكي انتقالها $O(0,0)$ الى $A(1,1)$ - وذلك باتباع الطريق المائل OA.

② باتباع الطريق OA_1A حيث A_1 هو مسقط A على المحور (Ox).

الحل ②: لدينا القوة متغيرة إذن نكتب العمل:

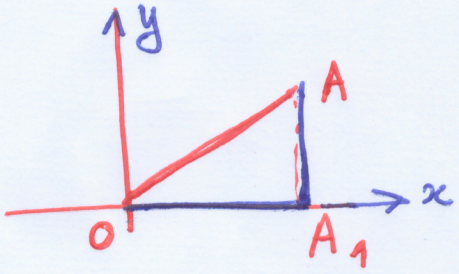
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$W_{O\to A} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

مسار $\underline{OA}$:

$$W_{O\to A} = \int a(x+2y)dx + \int bx.y.dy \longrightarrow (1)$$

طريق المنحنى هو OA هناك علاقة: $y=x$



$$y=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow dx=dy$$

بالتعويض في (1):

$$W_{O\to A} = \int_0^A (a)(x+2x)dx + \int_0^A bx.x\,dx$$

$$W_{O\to A} = \int a(3x\,dx + \int bx^2 dx = \int_0^1 (a3x + bx^2)dx$$

$$W_{O\to A} = 3a\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + b\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3a}{2} + \frac{b}{3}$$

مسار: $\widehat{OAA}$: يمكن الانتقال على مسارين OA_1 و A_1A أي:

$$OA_1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow dy=0$$

$$(1) \Longleftrightarrow W_{O\to A_1} = \int a(x+2x0)dx + \int bx\,x\,0\,dy = \int_0^{A_1} ax\,dx$$

$$W_{O\to A} = a\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}$$

$A_1A \Rightarrow \quad x = 1 \Rightarrow dx = 0$

$$W_{A \to A} = \int a(1+2y)\,0 + \int b(1).y\,dy = \int_0^1 y\,dy.$$

$$W_{A_1 \to A} = \frac{y^2}{2} = \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

$$W_{OA_1A} = W_{OA_1} + W_{A_1A} = \frac{a+b}{2}.$$

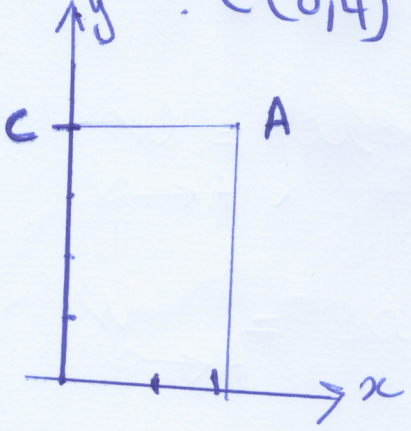
$$W_{OA} \neq W_{OA_1A}.$$

تمرين ③ :

نعتبر :

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y - 2x)\vec{j}$$

① أحسب الشغل لنقل النقطة M من النقطة $O(0,0)$ إلى النقطة $A(2,4)$ مرورا بـ $C(0,4)$.



الحل ③

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz.$$

$$W_{OCA} = W_{OC} + W_{CA},$$

$$W_{OC} = \int_0^c (x - ay)\,0\,dx + \int 3(y - 2x)\,dy.$$

$O \to C \Rightarrow x = 0 \quad dx = 0$. y يتغير $0 \to 4$.

$$W_{OC} = \int_0^4 3(y)\,dy = \frac{3y^2}{2}\Big|_0^4 = 24 \text{ Joule} = W_{OC}$$

$C \to A \Rightarrow y = 4. \quad dy = 0, \quad x \in [0, 2]$

$$W_{CA} = \int_0^2 (x - a.4)\,dx = (2 - 8a) \text{ Joule} = W_{CA}$$

$$W_{OCA} = 26 - 8a \text{ Joule}.$$

تمرين ④ وضع جسم ثقله $P=80N$ على سطح خشن، نطبق عليه قوة شدتها $20N$. تصنع زاوية $30°$ مع الأفق، معامل الاحتكاك سكوني $\mu_s=0,3$ أوجد:

① شدة قوة الاحتكاك السكوني f_s؟

② شدة القوة الناظمية R.

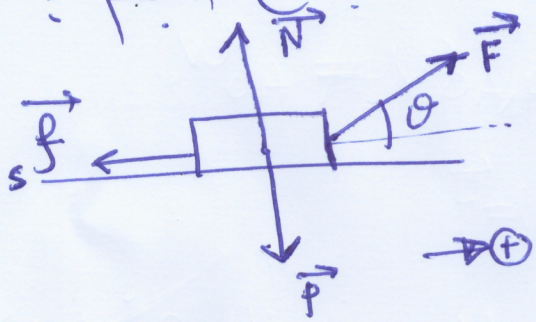
③ شدة قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية P

④ كم يجب أن تبلغ شدة القوة المطبقة حتى يقتلع الجسم؟

الحل:

$\vec{F}=\vec{0}$

$\vec{f_s}+\vec{N}+\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$



ox:

① ox $F\cos\theta - f_s = 0$ $\Rightarrow$ $f_s = F.\cos\theta = 20\cos 30$

oy: $N - P + F\sin\theta = 0$

$\boxed{f_s = 17,3\,N}$

② N? $N = P - F\sin\theta = \boxed{70N}$

③ يكون هو الاحتكاك الأعظمي:

$f_{s_{max}} = \mu_s . N = 21N = 0,3 \times 70 = \boxed{21N}$

④:

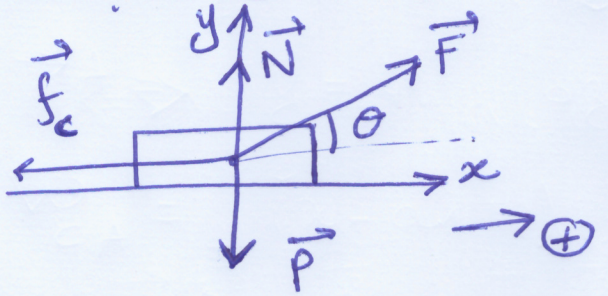
$F\cos\theta - f_{s_{max}} = 0 \Rightarrow F = \frac{f_{s\,max}}{\cos\theta} = \frac{21}{\cos 30} = 24,1N$

تمرين 05: باستعمال معطيات التمرين ④ السابق

نعتبر أن الجسم يتحرك:

الحل ⑤

$\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}+\vec{f_c}=m\vec{a}$



$ox \Rightarrow F\cos\theta - f_c = ma$

$oy \Rightarrow F\sin\theta - P + N = 0$

ومنه $N = (P - F\sin\theta)$

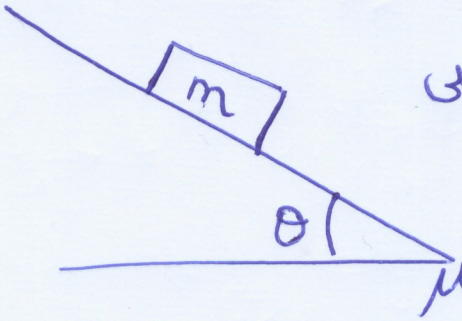
$\mu_c N = (P - F\sin\theta)\mu_c$

ومنه عبارة f_c:

$f_c = \mu_c(P - F\sin\theta)$

④ $f_c = \mu_c(P - F\sin\theta)$

تمرين (5)



يبين الشكل جسما كتلته m موضوعا على مستوى خشن مائل بزاوية $\theta = 35^\circ$ و معامل الاحتكاك الحركي $\mu_c = 0,4$ حيث $g = 10 m/s^2$ (نأخذ هذه القيمة)

① ما هي نوعية الحركة المطلوبة لكي يقلع الجسم؟ (سرعة ثابتة)

② ما هي شدة f_c؟

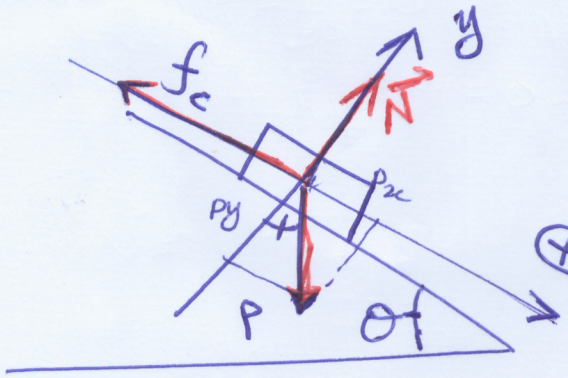
③ ما هي القوة الناظمية عندما $\theta = 35^\circ$؟

④ احسب f_c عند هذا الميل؟ وتسارعه؟

الحل 5:

لكي يقلع الجسم بسرعة ثابتة يعني أن $\vec{a} = 0$ أي:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_c} = 0$$



على oy: $N - P\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{N = Pmg \cdot \cos\theta} \rightarrow ①$$

على ox: $-f_c + P\sin\theta = 0$

$$\boxed{f_c = mg\sin\theta} \rightarrow ②$$

$f_c = \mu_c \cdot N \Rightarrow$ ② / ① $\Rightarrow \dfrac{\mu_s N}{N} = \dfrac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta}$

$\Rightarrow \tan\theta = \mu_c = 0,4 \Rightarrow \boxed{\theta = 21,80^\circ}$

② N؟ ① $\Leftrightarrow N = mg \cdot \cos\theta = 8 \times 10 \cdot \cos 37 = \boxed{63,55\ N}$

③ $f_c = \mu_c \cdot N = \boxed{25,42\ N}$

④ $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$ على ox $\Rightarrow mg\sin\theta - f_c = ma$

$\Rightarrow a = \dfrac{mg\sin\theta - f_c}{m} \Rightarrow \boxed{a = 2,96\ m/s^2}$