Chapitre 3 : Hydrostatique

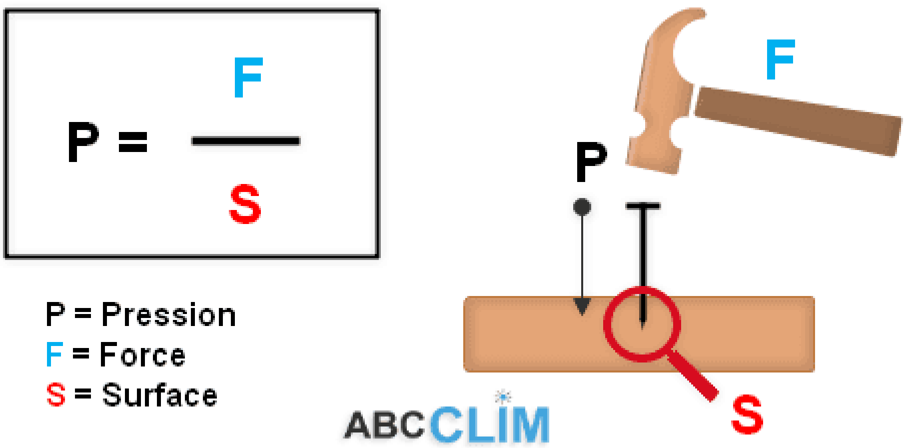
1. Introduction

- Lors d'une plongée sous-marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous-marins, les réservoirs…
- Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués.
- **l'hydrostatique :** La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides

2. Loi fondamentale de l'hydrostatique

➢ **Notions de pression**

- La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :



- L'unité légale (SI) de pression est le Pascal. 1 Pa= N/m^2
- On utilise également l'hectopascal (h Pa) 1hPa = 100 Pa
- Autres unités :
  - ❖ le bar: 1bar = 10^5 Pa = 105 2 m N
  - ❖ l'atmosphère : 1atm = 101325 Pa = 1013 h Pa appelée pression atmosphérique.

➢ **Principe fondamental de l'hydrostatique**

- Le fluide est au repos. On applique 2^{ier} loi de Newton $\sum \vec{F} = \vec{0}$

- Pour établir le bilan de force, on définit un volume de référence appelé '' volume connexe '', il est caractérisé par :
  - ❖ C'est un volume fermé.
  - ❖ Contenant que du fluide (même fluide).
  - ❖ Délimité par une surface 's'.
- Comme le gaz suivant :

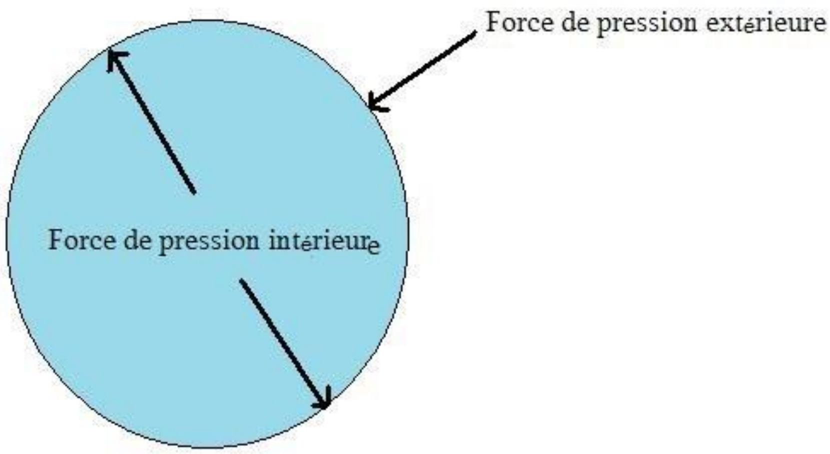
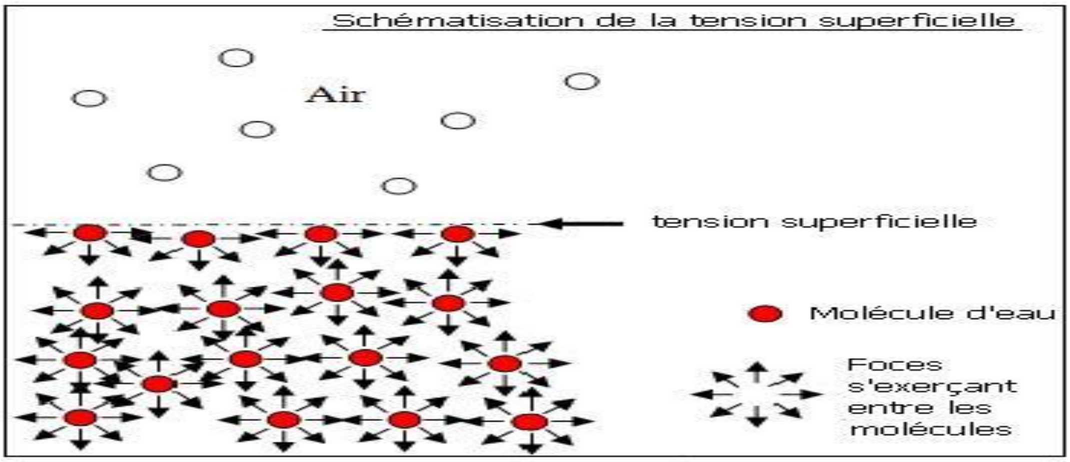


Fig. : Les deux forces exercées sur le volume connexe

a) Forces intérieurs

- Ce sont les forces de frottement (qui sont donc ce cas nulles car le fluide au repos) et les forces d'origine molécule



- Les forces d'origine nucléaire s'apposent deux, elle forcément un système égale à zéro : $\vec{F}_{m/m'} = \vec{F}_{m'/m}$

$$\sum \vec{F}_{nucléaire} = 0$$

b) Forces extérieur

- Il existe 2 types de forces extérieures :

- **Force extérieur** → **De volume** / → **De surface**

❖ **De volume :**

- Aussi appelées **''à distance''.** On suppose que le seuls champ des force aux quelles les particules sont soumises (champs de pesanteur dû à l'attraction terrestre). Cette force n'est autre que le poids, définition un petit élément de volume connexe :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad d\rho = \frac{dm}{dV}$$

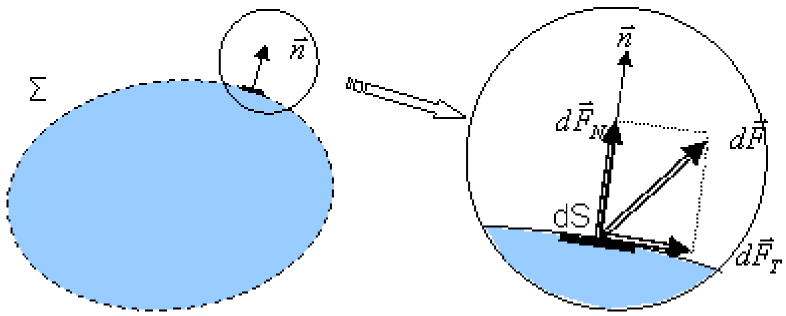
$$P = mg \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dP} = \mathrm{dmg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dP = d\rho V g}$$

-

❖ **De surface :**

- Elles sont appelées forces de contacte
- Toujours présentes dans un fluide
- Elles agissent sur des surfaces
- Définissants sur petit élément de surface ''d s''
- La force de surface appliquée sur cet élément est donnée par l'expression suivante :

$$F = Pds$$



- **Remarque**

  Pour se rendre compte du sens et de la direction de cette force de pression, on utilise le vecteur normal unitaire extérieur caractérisé par

  $\vec{n}\begin{cases}|\vec{n}| = 1 \\ \perp ds\end{cases}$ Normal extérieur sortent

- La force de pression est donnée alors par : $\mp \int Pn_i ds$

➢ Force interne + ⇒ exerce par le fluide

➢ Force externe - ⇒ exerce par la molécule

- Pour résoudre ce problème, il suffit de transformer l'intégrale

$$\int_S Pn_i ds = \int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dV_i \quad \Rightarrow \quad \int_V \left[\rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}\right] dV = 0$$

- Pour que l'intégrale précédente soit identiquement nulle, il faut que :

$\rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$ .... (A)

- Projection l'équation (A) en coordonnées cartésienne, donc :

O x: $\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow P \neq f(x)$ talque $\rho g_x = 0$

O y: $\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow P \neq f(y)$ talque $\rho g_y = 0$

O z: $-\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \rho g_z = \frac{\partial P}{\partial z}$ .... (s)

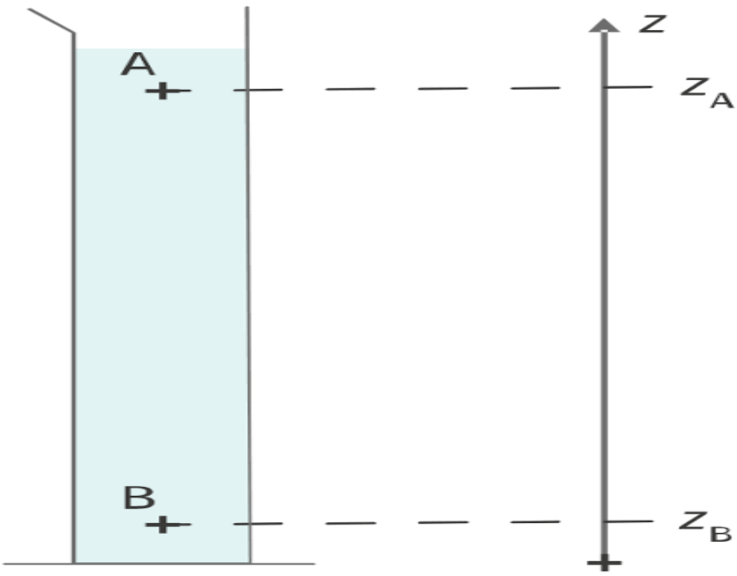
(s) $\Rightarrow$ $\boxed{-\boldsymbol{\rho g_z} - \frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial z}} = \boldsymbol{0}}$ **relation fondamentale de la statique des fluides**

3. Pression hydrostatique dans un fluide incompressible

- La masse volumique du fluide est en tout point la même : ρ = cste (fluide incompressible). Par ailleurs, on peut considérer que l'accélération de la pesanteur est une constante : g = cste. Par conséquent :

$$-\boldsymbol{\rho g} = \frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial z}} = \mathbf{cste}$$

- Et par intégration : $P(z) = \int \frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial z}} = -\int \rho g \ \Rightarrow \ P(z) = -\rho g z + cst$



- Soit : $\boxed{P(z) + \rho g z = cst}$ **relation fondamentale de la statique des fluides pour un fluide incompressible**
- Dans la figure la pression P_B égale $\Rightarrow$ $P_B = P_A + \rho g (z_A - z_B)$

Remarque : en pratique, on utilise la pression motrice noté (P*)

$$P^* = P + \rho g z$$

- **(P*)** : Pression motrice
- **P** : pression statique
- **ρgz** : pression potentiel de la position E p p

4. Pression hydrostatique dans un fluide compressible

- **gaz parfait :**

- D'une façon générale, il s'agit des gaz puisque leur densité dépend de la pression. Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un gaz parfait : PV=nRT

  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT}P$ (La masse volumique dépend de la pression ⇒ compressibilité)

- Pour connaître la pression en tout point du gaz, on part de l'équation fondamentale de la statique des fluides et on l'intègre :

- $\boldsymbol{\frac{dP}{dz} = -\rho P g = -\frac{M}{RT}\rho g dz \Rightarrow \frac{dP}{p} = -\frac{M}{RT}gdz}$

$\boldsymbol{\int\frac{dP}{p} = -\int\frac{M}{RT}gdz = cst}$ **Avec** $\boldsymbol{\frac{M}{RT}g}$ $\boldsymbol{cst}$ si la température est homogène.

$lnP = -\frac{M}{RT}gz + cst$ Donc : $p(z) = cst\exp(-\frac{M}{RT}gz)$

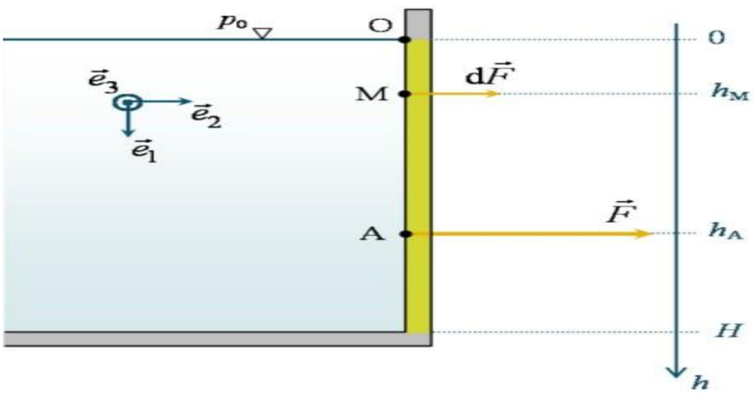
$talque:\ cst = P_0\exp(\frac{M}{RT}gz_0)$

Donc : $\boxed{p(z) = P_0\exp\left(-\frac{M}{RT}g(z-z_0)\right)}$ **relation fondamentale de la statique des fluides pour un fluide compressible : gaz parfait**

5. POUSSEE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

5.1. Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie (G, Yr). G est son centre de surface. D'un côté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ, de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. On désigne par P_G la pression au centre de surface G du côté fluide.



5.2. Eléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression P_G au point G, la pression P_M au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_M - P_G = w(Y_G - Y_M)$

Dans le repère (G,$\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$) défini sur la figure : Y_G=0 et Y_M =Y, donc $P_M = P_G - wy$

Exprimons la force de pression en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - wy)ds\vec{X}$

Soit {τ poussée} le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\left\{\text{τ poussée}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \overrightarrow{\int dF} \\ = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{array} \right._G$$

5.3. Résultante

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \int (\boldsymbol{P_G} - w.y).ds.\vec{X}$$

- Que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{\boldsymbol{R}} = [\boldsymbol{P_G}\int \boldsymbol{ds} - w\int Yds].\vec{X}$$

On note que $\int \mathrm{ds} = \mathrm{s}$ (aire de la paroi),

$\int \boldsymbol{Y.ds} = \boldsymbol{y_G\,.s} = \boldsymbol{0}$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe (G, Z), donc :

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{P_G.S.\vec{X}}$$

5.4. Centre de poussée

On cherche à déterminer un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe (G, Y) et il est tel que : $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{G0}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{G}} + \overrightarrow{\mathbf{G_G G}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$

Ecrivons alors que : $\overrightarrow{\mathbf{G_G G}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{G}}$

Avec les résultats précédents, on obtient $\boldsymbol{y_0} = -\frac{w.I}{\boldsymbol{P_G S}}$

Go existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

6. THEOREME D'ARCHIMEDE

- Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

  $P_{ARCH}=\rho_{\text{fluide}}.\,V_{\text{imm}}.g$
- De ce qui précédé, on a vu que la résultante des forces de pression hydrostatique s'exerçant sur un solide immergé dans un fluide au repos est donné par l'expression :

$$\int Pn_i\,ds$$

Remarque

Donc, la poussé d'archi n'est chute que la résultante des forces de pression hydrostatique