Série d'exercices N° 3

Exercice 1 *Soit* (f_n) *une suite des fonctions définie dans* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(t) = (1 + \frac{t}{n})^2$.

1. *Montrer que pour tout* $x \geq 0$,*on a* $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{x+1}$.
2. *En deduire, quel que soit* $t \in \mathbb{R}$ *la suite* $(f_n(t))_{n\geq 0}$ *est croissante.*
3. *Démontrer que* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + \frac{t}{n})^n dt = e - 1$.

Exercice 2 *Soit* (f_n) *une suite des fonctions définie dans* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(t) = \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t}$.

1. *Montrer que pour tout réel* $t > 0$, *la suite* $(f_n(t))$ *est croissante.*
2. *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (t^2 + 1) f_n(t)dt = 2e - 3$.

Exercice 3 *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions continues sur*$[a, b]$*et dérivable sur* $]a, b[$,*telle que pour tout* $n \geq 0$,*et pour tout*$x \in [a, b]$ *on ait* $|f_n'(x)| \leq K$.*Supposons que* (f_n) *est convergente vers* f *sur* $[a, b]$.

1. *Montrer que la suite* $(f_n(t))_{n\geq 0}$ *est uniformément convergente vers* f *dans* $[a, b]$.
2. *Soit* $M > 0$, *étudier la convergence uniforme de* (f_n) *définie sur* $[-M, M]$ *par* $f_n(t) = n(e^{\frac{t}{t+n}} - 1)$.

Exercice 4 *Soient* $(X, d), (Y, \delta)$ *deux espaces métriques tels que* X *est compacte et* $\mathcal{H}$ *une partie équicontinue de* $C(X, Y)$.
Montrer que $\mathcal{H}$ *est uniformément équicontinue.*

Exercice 5 *Soient* $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue et* B *une partie bornée de* $E = (C([a, b], \mathbb{R}), D_\infty)$. *Pour tout* $f \in B$ *on définit l'application :*

$$K(f(t)) = \int_0^b G(s, t) f(t) dt.$$

1. *Montrer que la partie* $\mathcal{H} = \{K(f), f \in B\}$ *est uniformément équicontinue.*
2. *Montrer que* $\mathcal{H}$ *est une partie relativement compacte.*