Série d'exercices N° 2

Exercice 1 *Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés de X, on a $f(\cap_{n\geq 0} F_n) = \cap_{n\geq 0} f(F_n)$.*

Exercice 2 *Soient X un espace compact et $f : X \to X$ une application continue. Montrer qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que $f(K) = K$.*

Exercice 3 *Soient (X, d) un espace métrique et A une partie compacte de X.*

1. *Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $a \in A$, tel que $d(a, x) = d(x, A)$.*
2. *Montrer si B une partie compacte, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$, tel que $d(A, B) = d(a, b)$.*

Exercice 4 *Soit (X, d) un espace métrique et (Y, δ) un espace compact, $f : X \to Y$.*
Rappelons, $G = graphe(f) = \{(x, y) \in X \times X, y = f(x)\}$.

1. *Montrer que si f est continue, alors G est fermé.*
2. *Montrer que si G est fermé dans $X \times Y$ et Y compact, alors f est continue.*
3. *Montrer si X est compact et f est continue, alors f est fermée.*

Exercice 5 *Soit (X, d) un espace métrique et soit $f : X \to X$ une fonction continue.*

1. *Montrer que $F = \{x \in X, f(x) = x\}$ est fermé.*
2. *Si (X, d) est compact et $F = \emptyset$, montrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in X, d(x, f(x)) \geq \delta$.*

Exercice 6 *Soient (X, d) un espace métrique compact non vide et $f : X \to X$ une application tels que $d(f(x), f(y) < d(x, y)$.*

1. *Donner un exemple qui prouve f est n'est pas necessairement contractante.*
2. *Montrer que f admet un point fixe dans X.*