المحور الأول: مبادئ الاحتمالات

1- مقدمة:

كثيرا ما يقصد بكلمة احتمال فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، حيث تستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها،ما يهمنا هنا هو المجال الاقتصادي حيث نلجأ لدراسة الاحتمالات خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

2- بعض المفاهيم:

أ. التجربة العشوائية: Randomized Experiment

هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة " ويرمز لها بالرمز H أو" ظهور الكتابة "ويرمز لها بالرمز T أي أن النتائج الممكنة هي:$\{H , T\}$ وقبل إلقاء القطعة لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

ب . فراغ العينة: Sample Space

هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز $n(S)$ ومن الأمثلة على ذلك: عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة نجد أن فراغ العينة هو $S:\{H , T\}$ وعدد النتائج هي: $n(S) =2$

عند رمي حجر نرد غير متحيز مرة واحدة، فإن فراغ العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي {

S:{1, 2, 3, 4, 5, 6 أي أن 6= n(S)

ج . الحادث: Event

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحادث بحرف من الحروف الهجائية[A, B, C,...]

نفترض أننا نقوم بتجربة ما ،كرمي حجر النرد مثلا و نلاحظ كل النتائج الممكنة و هي ظهور أحد الأوجه الستة 1 أو 2 أو....أو 6 ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي 1 أو 3 أو 5 من التجربة، وهكذا فإن عملية رمي زهرة النرد تسمى تجربة ، وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثا ، ومجموع جميع الحالات الممكنة تسمى بفراغ العينة.

3- تعريف الاحتمال :

إذا كان لدينا تجربة ما ، تقع بطرق عددها (N) طريقة ، وكان من بينها حدث معين (A) مثلاً يقع بطرق عددها (m) طريقة ، فإن احتمال وقوع الحدث (A) ويرمز له بالرمز: P(A) هو :

$$P(A) = \frac{m}{N} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث (A)}}{\text{عدد الحالات الكلية للتجربة}} \qquad m \leq N$$

مثال: ألقي حجر نرد (طاولة) مرة واحدة ، ما هو احتمال ظهور عدد زوجي ؟

عدد زوجي (الحدث) : A

$$P(A) = \frac{m}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3 = عدد مرات ظهور الحدث : m

6 = عدد الحالات الكلية : N

مثال: مصنع للمصابيح الكهربائية . من كل (1000) مصباح يوجد (50) مصباح رديء . ما هو احتمال وجود مصباح جيد ؟

الحل: $N = 1000$ $m = 950$ مصباح جيد (الحدث) : A

$$\therefore p(A) = m / N = 950 / 1000 = .95$$

مما سبق نستنتج ما يلي :

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(A) = 0$ إذا كانت الحادثة مستحيلة

(iii) $P(A) = 1$ إذا كانت الحادثة مؤكدة

(iv) إذا كان احتمال وقوع الحادثة (A) هو p واحتمال عدم وقوعها (q) فإن : $p + q = 1$

أي أن احتمال وقوع أي حادثة + احتمال عدم وقوعها = 1

4- بعض قوانين العد [التوافيق] :

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (x) من الأشياء من بين (n) من هذه الأشياء هو :

$$\binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad [x \leq n]$$

حيث : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1$

فمثلاً : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال: بكم طريقة يتم اختيار رجلين من بين (4) رجال ؟

الحل: $x = 2$ $n = 4$ طرق $\therefore C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$

ب) إذا كان لدينا تجربة ما تقع بطرق عددها (H) طريقة ، تجربة أخرى تقع بطرق عددها (L) طريقة . فإن عدد

مرات إجراء التجربتين معاً هو: $H\times L$

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين بعثة من ((3) رجال و امرأتين) من بين (6) رجال ، (5) نساء ؟

الحل:

$$= C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

عدد طرق اختيار الرجال : (H) طريقة

عدد طرق اختيار النساء :(L) طرق

$$= C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$\therefore$ عدد طرق تكوين البعثة :طريقة $= H \times L = 20\times10 = 200$

5- بعض التعاريف :

. يقال أن الحدثين A , B حدثان مانعان أو متعارضان أو متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر (أي لا يقعان معاً) ، والعكس في حالة الأحداث الغير مانعة .

. يقال إن الحدثين A , B حدثان مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر. والعكس في حالة الأحداث الغير مستقلة .

. الحوادث الشاملة : يقال أن الحوادث "A1,A2,...,An" حوادث شاملة في تجربة معينة ، إذا كان لابد أن يتحقق واحد منها على الأقل عند إجراء التجربة ، ولا توجد نتائج أخرى للتجربة غير هذه الحوادث .

فمثلاً : عند إلقاء حجر النرد ، فإن الأوجه الستة للحجر (1,2,3,4,5,6) تعتبر حوادث شاملة .

6- بعض قوانين الاحتمالات :

حالة الأحداث المانعة $\quad (i) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

حالة الأحداث الغير مانعة $\quad (ii) \quad p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

حالة الأحداث المستقلة $\quad (iii) \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$

حالة الأحداث الغير مستقلة $\quad (iv) \quad P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

حيث:(P(B/A يسمى الاحتمال الشرطي–أي وقوع الحدث(B) بشرط أن يكون الحدث (A) قد وقع فعلاً.

7- أمثلة عامة على الاحتمالات :

أ- حالة الأحداث المانعة :

مثال: ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، ما هو احتمال ظهور الرقم 2 أو رقم فردي ؟

الحل: رقم فردي : B $\qquad$ الرقم 2 : A $\qquad$ حدثان مانعان A,B

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

ب- حالة الأحداث الغير مانعة :

مثال: ألقيت زهرة نرد مرة واحدة . ما هو احتمال أن يكون السطح العلوي يقبل القسمة على 2 أو 3 ؟

A: ÷2 $\qquad$ B: ÷3 $\qquad$ A B حدثان غير مانعين

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \left(\frac{3}{6}.\frac{2}{6}\right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

مثال: في المثال السابق، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من 2 ؟

الحل: عدد أكبر من 2 : B $\qquad$ عدد زوجي : A

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \left(\frac{3}{6}.\frac{4}{6}\right) = \frac{7}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

ج- حالة الأحداث المستقلة :

مثال: إذا كان احتمال وصول الطائرة (A) القادمة من مطار لندن إلى مطار الجزائر في موعدها هو (0.8) ،واحتمال وصول الطائرة (B) القادمة من مطار القاهرة إلى مطار قسنطينة في موعدها هو (0.7). ما هو احتمال أن تكون الطائرتين B و A قد وصلت في موعدها ؟

الحل: وصول الطائرة (A) في موعدها : A

وصول الطائرة (B) في موعدها : B حدثان مستقلان B و A

$$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B) = (.8).(.7) = .56$$

د- حالة الأحداث الغير مستقلة :

مثال(1): صندوق به (5) كرات بيضاء ، (3) حمراء ، سحبت منه عشوائيا كرتان على التوالي (أي بدون إرجاع الكرة الأولى) – ما هو احتمال أن تكون الكرتان بيضاء ؟

الحل: الكرتان بيضاء ← (1) بيضاء و (2) بيضاء

الثانية بيضاء : B الأولى بيضاء : A حدثان غير مستقلان A,B

وذلك لأن احتمال سحب الكرة البيضاء في المرة الثانية يعتمد على سحب الكرة في المرة الأولى .

$$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

مثال(2): في المثال السابق احسب احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء .

الحل: الثانية حمراء : B الأولى بيضاء : A

حدثان غير مستقلان A , B

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{5}{8}.\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

مثال(3): في المثال السابق ، احسب احتمال أن تكون كرة بيضاء و الأخرى حمراء .

الثانية : 2 الأولى : 1 ، كرة حمراء : B كرة بيضاء : A

حدثان غير مستقلان A , B

كرة بيضاء والأخرى حمراء ⟵ [(1) بيضاء و(2) حمراء] أو [(1) حمراء و (2) بيضاء]

الحل:

$$P(A\cap B)=P(A_1).P(B_2/A_1)+P(B_1).P(A_2/B_1)=\frac{5}{8}.\frac{3}{7}+\frac{3}{8}.\frac{5}{7}=\frac{30}{56}$$

ملاحظة هامة: اختلاف الترتيب لايؤثر على قيمة الاحتمال

8- نظرية الاحتمالات الكلية :

إذا كانت A1,A2,...,An هي حوادث مانعة وشاملة ، وكان هناك حادثة أخرى (B) لا تقع إلا مع إحدى حالات الحدث A (أي أن B تقع إذا وقعت واحدة من هذه الحوادث المانعة) فإن:

$$P(B)=\sum_r P(A_r).P(B/A_r).$$

مثال: ثلاثة مصانع I,II,III تنتج المصابيح الكهربائية لإحدى المحلات التجارية . فإذا كانت هذه المصانع تنتج على التوالي : 45% , 35% , 20%

من المصابيح التي يبيعها المحل . وكان احتمال إنتاج مصباح رديء من هذه المصانع هو :

على التوالي .08 , .15 , .12

فإذا اشترى شخص مصباح من هذا المحل ، ما هو احتمال أن يكون المصباح رديء ؟

الحل:

المصباح رديء (من المصنع I ورديء) أو(من المصنع II ورديء) أو(من المصنع III ورديء)

المصنع III : A3   المصنع II : A2   المصنع I : A1   المصباح رديء : B

$$\therefore P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)$$

$$= (.20).(.12) + (.35).(.15) + (.45).(.08) = .02 + .05 + .04 = .11$$

مثال: إذا كان 25% من الطلبة ، 15% من الطالبات يدرسون الرياضيات . وكانت الطالبات يمثلن 40% من العدد الكلي لتلاميذ الكلية .اختير تلميذ عشوائيا ، فما هو احتمال أن يكون ممن يدرسون الرياضيات .

الحل: طالبة : A2   طالب : A1   يدرس الرياضيات : B

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) = (.6)(.25) + (.4)(.15) = .15 + .06 = .21$$

المحور الثاني:المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

1 – المتغير العشوائي :

يصاحب نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى "المتغير العشوائي"وهذا المقدار يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية .

مثال: عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة ،التجربة هنا عشوائية ، المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون : $1,2,\ldots,6$ ويسمى المتغير العشوائي متغيراً : لأنه يأخذ قيماً مختلفة ويسمى عشوائياً : لأنه يرافق نتائج التجربة العشوائية .ويرمز للمتغير العشوائي بالرمز (X) . وفي مثالنا السابق نجد (X) يمكن أن يأخذ القيم $1,2,\ldots,6$.

1.1. المتغير العشوائي المنفصل:

يقال أن المتغير العشوائي (X) متغير منفصل إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة .

مثال: عدد مبيعات سيارات شركة ما شهريا ، يمكن أن يأخذ القيم $1,2,3,\ldots.$

2.2. المتغير العشوائي المستمر:

يقال أن المتغير العشوائي (X) متغير مستمر إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية من مدى تغيره ، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة .

مثال: وزن الطالب ، يمكن أن يأخذ قيماً صحيحة وكذلك قيماً كسرية .

2 – التوزيع الاحتمالي : Probability Dist.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) مثلاً،عبارة عن دالة تعطي الاحتمالات لقيم المتغير x المختلفة وهذه الدالة عبارة عن جدول أو رسم بياني أو صيغة رياضية تبين قيم المتغير x والاحتمالات المقابلة لكل منها ، وتحقق بعض الشروط نذكرها فيما بعد .

1.2. التوزيع الاحتمالي المنفصل:

إذا كانت x متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم :

$$x1 \ , \ x2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ xn$$

باحتمالات $P(x1)\ , P(x2)\ , \ .\ \ldots\ldots, P(xn)$

بشرط : لجميع قيم x $\quad (1)\ \ P(x) \ \geq 0$

$$(2) \ \ \sum P(x) = 1$$

فإنه يقال أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي منفصل دالته الاحتمالية $P(x)$

أولاً : حالة الأحداث الغير مستقلة :

مثال: نرمي قطعتي نرد مرة واحدة ، نهتم بأكبر العددين الذين يظهرا على وجهي الحجرين .

من الواضح أن عدد حوادث التجربة هو : 6x6=36

يمكن الحصول على قانون التوزيع كما يلي :

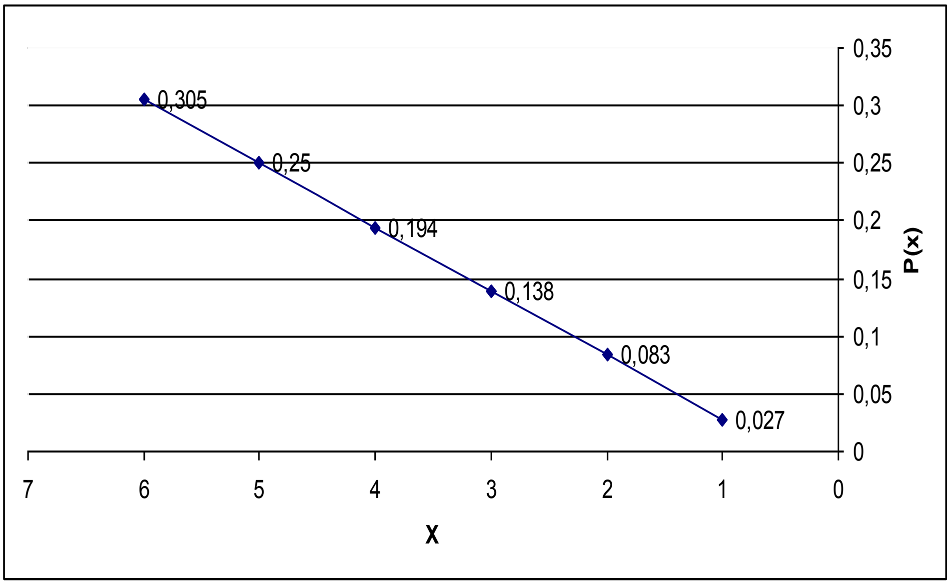
X												P(x)
1	1 1											1/36
2	1 2	2 2	2 1									3/36
3	1 3	2 3	3 3	3 2	3 1							5/36
4	1 4	2 4	3 4	4 4	4 3	4 2	4 1					7/36
5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	5 4	5 3	5 2	5 1			9/36
6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6	6 5	6 4	6 3	6 2	6 1	11/36

لنتحصل على جدول التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{36}{36}$

$\therefore$ X متغير عشوائي منفصل له توزيع احتمالي دالته الاحتمالية P(x) ونلاحظ هنا توفر الشرطين .

كما يمكن التوضيح بيانيا كما يلي :



مثال: من المثال السابق ، ما هو احتمال أن يكون أكبر عدد ظهر :

(i) خمسة على الأقل　　　　(ii) ثلاثة على الأكثر

الحل:

$$P(x \geq 5) = P(x = 5) + P(x = 6)(ii) = \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{20}{36} \qquad (i)$$

$$P(x \leq 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$$

وهكذا يمكن استخراج أي احتمالات مطلوبة من التوزيع الاحتمالي .

خصائص التوزيع الاحتمالي المنفصل :

(1) توقع التوزيع [التوقع الرياضي – متوسط التوزيع] : Mathematical Expectation

$$E(x) = \mu = \sum xi\, P(xi)$$

(2) تباين التوزيع : Variance $v(x) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$

(3) الانحراف المعياري : Standard Deviation $\sqrt{V(x)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

مثال: من المثال السابق ، أوجد :1- متوسط التوزيع 2- تباين التوزيع وانحرافه المعياري .

الحل:

x	P(x)	xP(x)	$X^2P(x)$
1	1/36	1/36	1/36
2	3/36	6/36	12/36
3	5/36	15/36	45/36
4	7/36	28/36	112/36
5	9/36	45/36	225/36
6	11/36	66/36	396/36
$\sum$	1	161/36	791/36

$$\mu = E(x) = \sum xP(x) = \frac{161}{36} = 4{,}47$$

$$\sigma^2 = V(x) = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = \frac{791}{36} - (4{,}47)^2 = 21{,}97 - 19{,}98 = 1.99$$

$$\sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41$$

ثانياً : حالة الأحداث المستقلة :

مثال : نرمي حجر نرد مرة واحدة ، شكل جدول للتوزيع الاحتمالي ثم أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

ونحدد الخصائص من خلال الجدول التالي:

x	P(x)	xP(x)	$X^2P(x)$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
$\sum$	1	21/6	91/6

$$\mu = E(x) = \sum xP(x) = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\sigma^2 = V(x) = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = \frac{91}{6} - (3,5)^2 = 15,16 - 12,25 = 2,91$$

$$\sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,91} = 1,7$$

ثالثا: أهم التوزيعات المنفصلة :

أ. توزيع ذي الحدين : Binomial Dist.

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر (n) مرة ، وكان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p ، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q ، فإن احتمال ظهور الحدث (x) مرة من بين الـ n مرة ، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$X = 0,1,2,...,n \quad p > 0 \ , q < 1 \ , p + q = 1$$

n: عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات)

p: احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح)

q: احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل)

x: عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم 0,1,2,...,n

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً ، لابد أن يكون :

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع ، هو توزيع منفصل ، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ، ويتوقف على قيمة الاحتمال ، مع الشروط الأربعة التالية:

1. عدد الاختبارات محدود
2. لكل اختبار نتيجتين فقط : نجاح أو فشل
3. احتمال النجاح يبقى ثابت في كل الاختبارات
4. الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض.

خصائص التوزيع :

متوسط التوزيع (القيمة المتوقعة – التوقع الرياضي) : $\mu = np$

تباين التوزيع : $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري للتوزيع: $\sigma = \sqrt{npq}$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة ، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي ، كما يستعمل في حالة تقارب النجاح والفشل أي : $p \cong q$ و $n \leq 30$

مثال: إذا كان احتمال وصول الطائرة إلى مطار الجزائر في موعدها هو (3/4) انطلقت (3) طائرات متجهة إلى مطار الجزائر . أوجد :

التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها .

متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري .

احتمال وصول طائرتين على الأقل في موعدها .

الحل: $n = 3 \qquad p = \frac{3}{4} \qquad q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

X (الحدث) : عدد الطائرات التي تصل في موعدها .

X : متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0,1,2,3$ ، ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = C_x^n \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} ; x = 0,1,2,3.$$

1– التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها :

$$P(x=0) = C_0^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1x1x\frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

$$P(x=1) = C_1^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3x\frac{3}{4}x\frac{1}{16} = \frac{9}{64}$$

$$P(x=2) = C_2^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3x\frac{9}{16}x\frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

$$P(x=3) = C_3^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1x\frac{27}{64}x1 = \frac{27}{64}$$

$$\sum = 1$$

2- متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري :

$$\mu = np = 3x\frac{3}{4} = 2.25$$

$$\sigma^2 = npq = 3x\frac{3}{4}x\frac{1}{4} = \frac{9}{16} \quad , \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = .75$$

3- احتمال وصول طائرتين على الأقل في موعدها :

x = 2 أو 3

$$P(x \geq 2) = P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64}$$

ب- توزيع بواسون : Poisson Dist

هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة ، مثل : الحرائق في إحدى المدن ، الزلازل ، الحوادث على إحدى الطرق ، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب ، ، ... الخ . ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة .

فإذا كانت(X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة ، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,......., \infty$$

متوسط التوزيع : $\mu=\lambda$ e : مقدار ثابت = 2.718

ويتحدد هذا التوزيع بمعرفة المتوسط λ. وحتى يكون هذا التوزيع احتماليا ، لابد أن يكون :

$$\sum P(x) = \sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1$$

<u>خصائص التوزيع :</u>

متوسط التوزيع $\mu = \lambda$

تباين التوزيع $\sigma^2 = \lambda$

الانحراف المعياري للتوزيع $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال: إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب ما هو (3) أخطاء . أوجد :

أ . احتمال عدم ظهور أي خطأ .

ب . احتمال ظهور خطأين .

ج . احتمال ظهور خطأين على الأكثر .

د . احتمال ظهور خطأين على الأقل .

الحل: $\lambda = \mu = 3$ $\quad e^{-3} = 0.05$

X (الحدث) . عدد الأخطاء المطبعية

X : متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0,1,2,3,4 ..\ ....\ ...\ .\infty$

ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^x}{x!} = \frac{(.05)3^x}{x!}$$

أ- احتمال عدم ظهور أي خطأ :

x = 0

$$\therefore P(x=0) = \frac{(.05)3^0}{0!} = .05$$

ب- احتمال ظهور خطأين :

$$\therefore P(x=2) = \frac{(.05)3^2}{2!} = \frac{(.05)9}{2x1} = .225$$

x = 2

ج- احتمال ظهور خطأين على الأكثر : 2 أو 1 أو 0 = x

$$P(x \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$
$$= .05 + \frac{(.05)3^1}{1!} + .225 = .05 + .15 + .225 = .425$$

د- احتمال ظهور خطأين على الأقل : ∞.............. أو 4 أو 3 أو 2 = x

$$P(x \ge 2) = P(x=2) + P(x=3) + ...$$
$$= 1 - \left[P(x=o) + P(x=1)\right]$$
$$= 1 - (.05 + .15) = 1 - .20 = .8$$

ويمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما تكون n كبيرة وتكون p أو 1-p صغيرة

. [n>30,np<5 or n(1-p)<5]

2.2- التوزيع الاحتمالي المستمر :

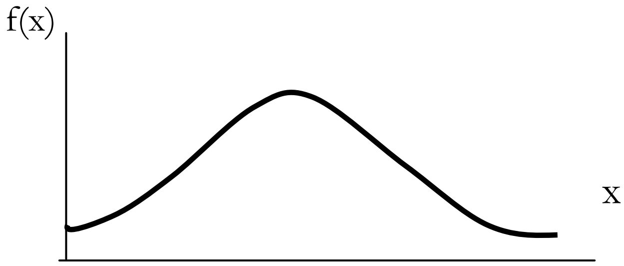
أولا: مفهومه

عند دراستنا للمتغير العشوائي المنفصل، ذكرنا أن المتغير (X) يأخذ قيم صحيحة فقط وينتمي إلى مجموعة معدودة، أما في حالة المتغير العشوائي المستمر، فإن المتغير (X) يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره، والمتغير المستمر يعطى في صورة دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمال ويرمز لها بالرمز f(x) ، ولا بد أن يتوفر فيها الشرطين الآتية :

لجميع قيم x $\quad f(x) \geq 0$

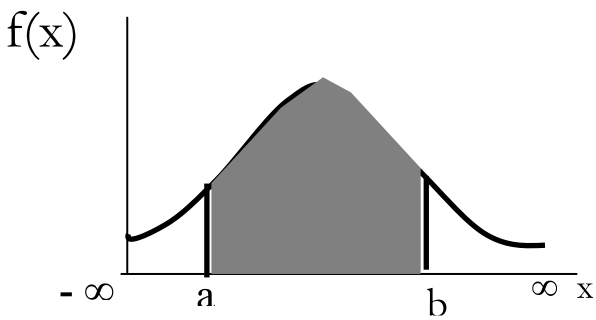
$$\int f(x)dx = 1$$

والمتغير المستمر يمثل بيانيا بمنحنى

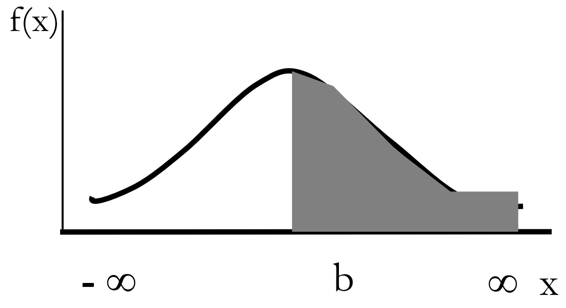


ومن الدالة يمكن إيجاد أي احتمال داخل المدى ، أي المساحة أسفل المنحنى .

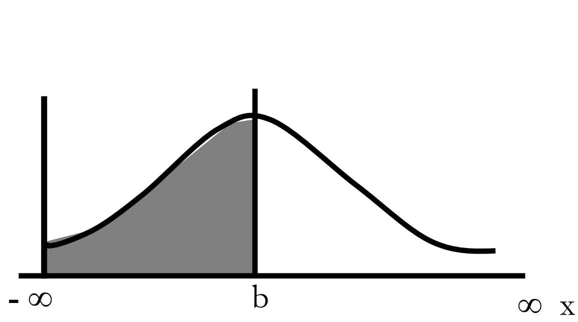
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



$$P(x \geq b) = \int_b^{\infty} f(x)dx$$



$$P(x \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$



ثانيا: <u>خصائص التوزيع</u>

$$E(x) = \mu = \int xf(x)dx$$

متوسط التوزيع (التوقع الرياضي)

$$v(x) = \sigma^2 = \int x^2 f(x)dx - \mu^2$$

تباين التوزيع

$$\sqrt{v(x)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

الانحراف المعياري للتوزيع

مثال1: أثبت أن الدالة الآتية دالة احتمالية : $0 \leq x \leq 4$ $\quad f(x) = \frac{1}{8}x$

ثم أوجد : (1) المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع .

(2) $P(x < 3)$ $\quad P(x > 2)$

الحل: لإثبات أن الدالة احتمالية لابد أن يكون تكاملها على المدى = 1 كما يلي :

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{8}.\frac{16}{2} = 1$$

1-المتوسط

$$\mu = \int_R xf(x)dx = \int_0^4 x\frac{1}{8}xdx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{24}(4^3) = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

التباين

$$\sigma^2 = \int_R x^2 f(x)dx - \mu^2$$

$$= \int_0^4 x^2 \frac{1}{8} \ x \ dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 - \frac{64}{9}$$

$$= \frac{256}{32} - \frac{64}{9}$$

$$= 8 - \frac{64}{9}$$

$$= \frac{72-64}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

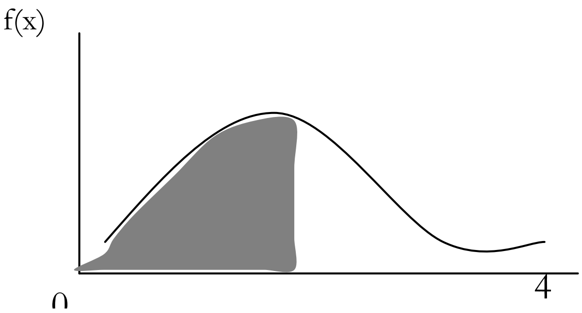
الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = .94$$

-2

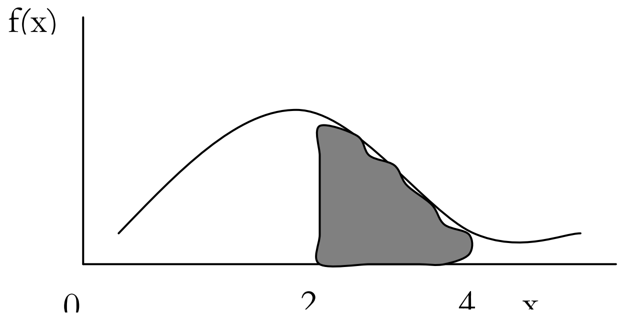
$$P(x<3) = \int_0^3 \frac{1}{8} x \ \ dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{16}(3^2) = \frac{9}{16} = .56$$



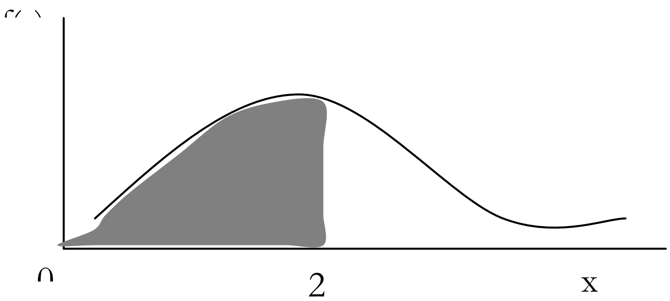
-3

$$P(x>2)=\int_{2}^{4}\frac{1}{8}x\ dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{1}{16}(4^{2}-2^{2})$$
$$=\frac{1}{16}(16-4)=\frac{12}{16}=.75$$



حل آخر

$$P(x>2)=1-P(x<2)$$
$$=1-\int_{0}^{2}\frac{1}{8}x\ dx=1-\frac{1}{8}\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{2}$$
$$=1-\frac{4}{16}=\frac{12}{16}=.75$$



ثالثا:. أهم التوزيعات المتصلة

التوزيع الطبيعي (المعتدل) : Normal Dist.

1– مقدمة :

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة ، ويمتد طرفاه إلى ∞ ، وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأوزان – الأطوال – الأعمار ..الخ. تأخذ شكلاً قريبا من المنحنى الطبيعي .

2– الصورة العامة لمعادلة التوزيع الطبيعي : **(التوزيع الطبيعي العادي)**

إذا كانت (X) متغير عشوائي مستمر (متصل) دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$$

$$-\infty\le x\le\infty$$

π: constant=3.14 **e** : constant=2.7 : **حيث**

فإنه يقال إن X يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ويكتب باختصار

$$x \sim N(\mu,\sigma^2)$$

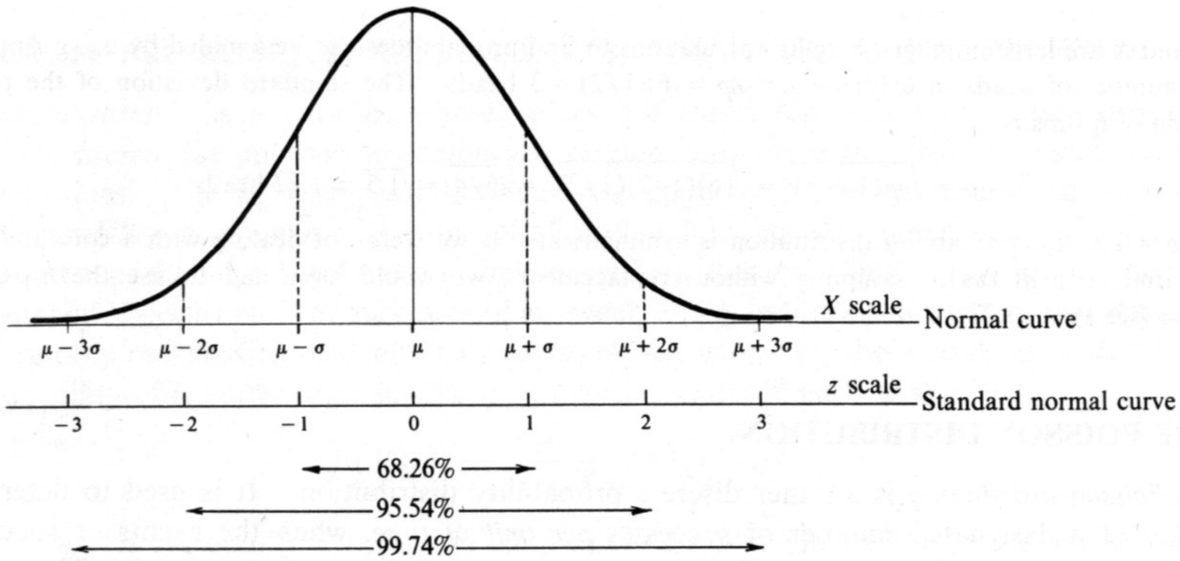


Fig. 3-4

أي أن المساحة التي تنحصر بين .95 = $\mu \pm \sigma 2$ والتي تنحصر بين .99 = $\mu \pm 3\sigma$

3– <u>التوزيع الطبيعي القياسي</u> :

بوضع $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى

توزيع طبيعي قياسي ، متوسطه μ=0 ، انحرافه المعياري σ=1 ، ويكتب $Z \sim N(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty \le z \le \infty$$

وقد وضعت جداول توضح المساحة أسفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تستخدم بشرط توافر

الشروط الثلاثة الآتية :

$$\mu \neq 0, \sigma \neq 1: \qquad (x)$$

1- المسألة تكون في صورة توزيع طبيعي عادي

نحولها إلى توزيع طبيعي قياسي (z) : $\mu=0,\sigma=1$

بالتحويلة $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

2- جميع قيم الاحتمالات في الجدول محسوبة للنصف الموجب وما يقال عن النصف الموجب ينطبق على النصف السالب لأن التوزيع متماثل .

3- الاحتمالات في الجدول محسوبة كلها من الصفر .

* توجد صفحة ملحق خاصة بالتوزيع الطبيعي القياسي موجودة في نهاية المطبوعة.

مثال 1: إذا كان دخل (1000)أسرة في مدينة ما يتبع توزيع طبيعي متوسطه (μ) 1800 ون وانحرافه المعياري (σ) 300 ون .احسب احتمال الحصول على دخل :

1- أكبر من 2400 ون 2- أكبر من 1500 ون .

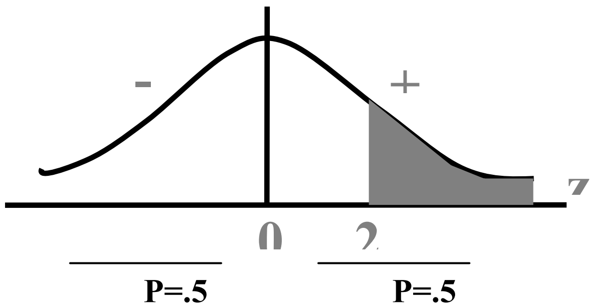
3- أقل من 2550 ون 4- أقل من 1200 ون

5- ينحصر بين 2250 ، 1650 ون .6- ينحصر بين 2550 , 2400 ون .

7- أوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500 ريال .

الحل: (x) متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي عادي متوسط μ = 1800 ريال ، وانحرافه المعياري 300 σ = ريال . نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي (z) بالتحويلة $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}=\dfrac{x-1800}{300}$

1- $P(x\geq 2400):$

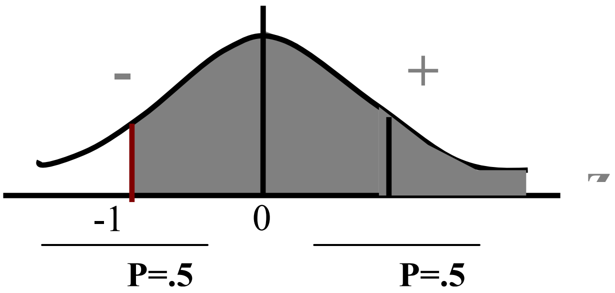


$x = 2400 \quad \therefore z = \dfrac{2400-1800}{300} = 2$

$\therefore P(x \geq 2400) = P(z \geq 2) = .5 - .4772 = .0228$ (من جدول z)

2- $P(x \geq 1500)$:

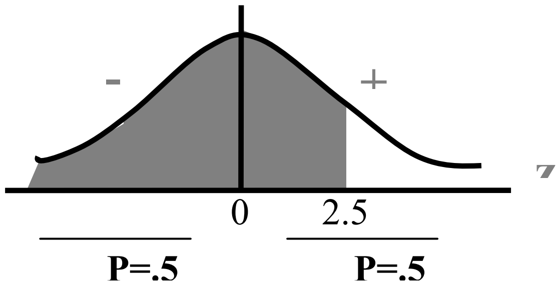
$x = 1500 \quad \therefore z = \dfrac{1500-1800}{300} = -1$



$\therefore P(x \geq 1500) = P(z \geq -1) = .5 + .341 = .8413$ (من جدول z)

3- $P(x \leq 2550)$:

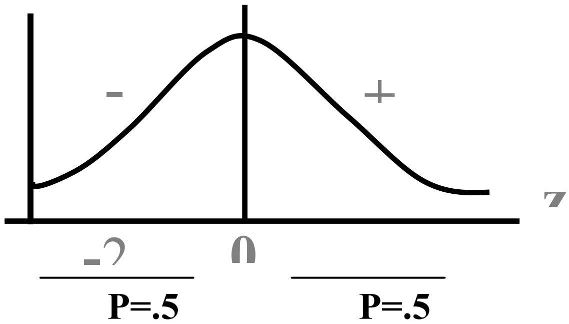
$x = 2550 \; \therefore z = \dfrac{2550-1800}{300} = 2.5$



$\therefore P(x \leq 2550) = P(z \leq 2.5) = .5 + .4938 = .9938$

4. $P(x \leq 1200)$:

$x = 1200 \qquad \therefore z = \dfrac{1200-1800}{300} = -2$



$\therefore P(x \leq 1200) = P(z \leq -2) = .5 - .4772 = .0228$

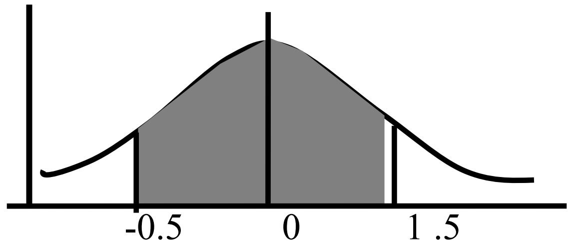
(من جدول z) وهي نفس قيمة المطلوب (1) بخاصية التماثل .

5- $P(1650 \leq x \leq 2250)$:

$$x = 1650 \ \therefore z = \frac{1650-1800}{300} = -\frac{1}{2}, \ x = 2250 \ \therefore z = \frac{2250-1800}{300} = 1\frac{1}{2}$$

$$\therefore P(1650 \leq x \leq 2250) = P(-\frac{1}{2} \leq z \leq 1\frac{1}{2})$$

$$= .1915 + .4332 = .6247$$

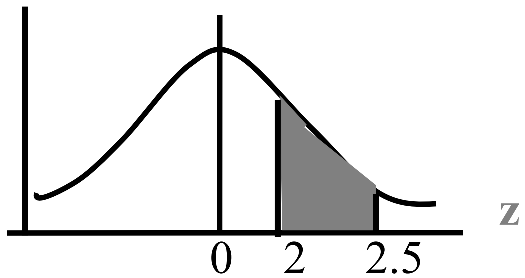


6- $P(2400 \leq x \leq 2550)$:

$x = 2400 \ \therefore z = 2$ من (**1**) $\qquad x = 2550 \ \therefore z = 2.5$ من(**3**)

$$\therefore P(2400 \leq x \leq 2550) = P(2 \leq z \leq 2.5)$$

$$= .4938 - .4772 = .0166$$



7- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن = جملة عدد الأسر × $P(X \geq 1500)$

=1000 x .8413 (من المطلوب 2)

= 841.3 = 841 أسرة