3-3- السلاسل الصحيحة(لمتغير حقيقي):

تعريف(1.3.3): نسمي سلسلة صحيحة لمتغير حقيقي x السلسلة التي حدها العام $\forall n\in \mathbb{N}, U_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ ، x_0 قيمة ثابتة وتكتب بالعبارة

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...+....$$

و اليكن $S_n(x)$ مجموعها الجزئي من الرتبة n و بالتالي السلسلة الصحيحة تمثل كثير حدود معمم للمتغير x .

مثال(1.3.3) السلسلة الهندسية $\sum_{n\geq 0} x^n$ ذات الاساس x هي سلسلة صحيحة مجموعها الجزئي $S_n(x)$ حيث $S_n(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$

و الذي له النهاية المحدودة $S_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ من أجل $|x|<1$

هذا المثال يوضح أن دالة المجموع لهذه السلسلة في حالة التقارب هي دالة للمتغير x و منه نستنتج أن المطلوب هو تحديد مجموعة قيم x التي من أجلها تكون السلسلة متقاربة ثم ندرس خواص دالة المجموع.

مجال تقارب السلاسل الصحيحة:

لتبسيط الدراسة ندرس السلاسل الصحيحة من الشكل $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ و سلسلة القيم المطلقة $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$

نظرية(1.3.3)(نظرية ابيل): إذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة من أجل x_0 فهي متقاربة مطلقا من أجل كل x يحقق $|x|\leq|x_0|$

البرهان: ليكن العدد الحقيقي x_0 بحيث تكون $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ متقاربة فإن $a_n x_0^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ و بالتالي $\exists k>0 : |a_n x_0^n|<k$ ، و اليكن x بحيث $|x|<|x_0| \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < k\left|\dfrac{x}{x_0}\right|$

لكن $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1$ ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$

محدودة من الاعلى بسلسلة متقاربة فهي متقاربة و بالتالي متقاربة مطلقا من أجل $|x_0|>|x|$

.

لتكن E مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة r بحيث $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ تكون متقاربة مما سبق ، إذا كان $r_0 \in E$ فإن $[0, r_0] \subset E$ أي E غير خالية نميز حالتين

1) المجموعة E تقبل عنصر حاد من الاعلى R تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا إذا كان $|x| < R$ و تكون متباعدة إذا كان $|x| > R$ ، نسمي R نصف قطر التقارب كما يسمى $]-R, R[$ مجال التقارب عندما $R = 0$ السلسلة متقاربة من أجل $x = 0$

2) إذا كانت المجموعة E عنصر حاد من الاعلى فأن السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا من أجل كل $x \in IR$ و مجال تقاربها غير محدود.

الطريقة العملية لإيجاد نصف قطر التقارب

بتطبيق مقياسي دالنبير أو كوشي على السلاسل المتقاربة مطلقا أي

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = l|x|$$ حيث $l = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ و حسب شرط دالنبير السلسلة $\sum_{n\geq 0}|a_n x^n|$ متقاربة إذا كان $l|x| < 1 \Rightarrow |x| < 1/l$

و متباعدة إذا كان $|x| > 1/l$ ومنه نضع $R = 1/l$ (في حالة $l = 0 \Rightarrow R = +\infty$)

وبنفس الطريقة في حالة استخدام مقياس كوشي $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = l|x|$ و $R = 1/l$

ملاحظة(1.3.3): في حالة $|x| = R$ أي عند حدود مجال التقارب تدرس كل حالة بمفردها

مثال(2.3.3): حدد نصف قطر التقارب و طبيعة كل سلسلة من السلاسل التالية عند حدود مجال تقاربها إن أمكن:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \quad ، \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \quad ، \sum_{n\geq 1} n^{2n} x^n$$

الحل: 1) حسب مقياس دالنبير

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{|x|^n} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1\times|x|$$ أي $l = 1 \Rightarrow R = 1$

طبيعة السلسلة على اطراف مجال تقاربها

من أجل $x = -1$ ، السلسلة $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ هي سلسلة توافقية متقاربة حسب لبنز

من أجل $x=1$ ، السلسلة $\sum_{n\geq 1} 1/n$ هي سلسلة متباعدة

2) بنفس الطريقة السلسلة الثانية حسب مقياس النسبة

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\times|x|$$ أي $l=0\Rightarrow R=+\infty$

3) لتعيين نصف قطر التقارب للسلسة الثالثة نستعمل مقياس كوشي

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{2n}|x|^n}=\lim_{n\to+\infty}n^2|x|=+\infty\times|x|$$ أي $l=+\infty\Rightarrow R=0$.

العمليات الجبرية و نصف قطر التقارب

نظرية(2.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ، $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ سلسلتين للمتغير الحقيقي x و اليكن R_2, R_1 نصفي قطريهما على الترتيب فإن $R\geq \inf(R_1,R_2)$ يمثل نصف قطر التقارب للسلسلتين

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n \quad ، \quad \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n;\quad \forall x, |x|<R .$$

التقارب المنتظم و الاستمرار

دراسة التقارب على مجال مفتوح

نظرية(3.3.3): السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ذات نصف قطر التقارب R تتقارب بانتظام (نظيميا) على كل مجال مفتوح محتوى في D_R (D_R مجال تقاربها).

نظرية(4.3.3): دالة المجموع F للسلسلة الصحيحة للمتغير الحقيقي x ذات نصف قطر التقارب R مستمرة على المجال المفتوح $]-R,R[$

مثال(3.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية: $\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ بين أنها متقاربة بانتظام على $]-R,R[$ و أن دالة مجموعها مستمرة عليه

الحل: السلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على $]-1,1[$ و دالة مجموعها $x\to(x-1)\ln(1-x)+x$ مستمرة عليه.

التقارب عند اطراف المجال

السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ذات نصف قطر التقارب R متقاربة بانتظام على المجال المفتوح $]-R,R[$ و السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ المتناوبة متقاربة حسب لبنز نت أجل كل x من $[-R,R]$ و

بالتالي $\forall x\in[-R,R], \left|\sum_{k\geq 0}a_k x^k\right|\leq |a_{n+1}||x|^{n+1}\leq |a_{n+1}|R^{n+1}$ حسب لبنز $\sum_{n\geq 0}|a_n|R^n$ متقاربة.

مثال(4.3.3): من المثال(3.3.3) $R=1$ و بالتالي السلسلتين $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ ، $\sum_{n\geq 2}\frac{(1)^n}{n(n-1)}$

متقاربتين أي السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ متقاربة عند اطراف المجال.

3-3-2- تكامل سلسلة صحيحة (لمتغير حقيقي)

نظر**ية**(5.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي x و نصف القطر $R(R>0)$ فإنه

$$\forall x\in \Re, 0<|x|<R; \int_0^x\left(\sum_{n\geq 0}a_n t^n\right)dt=\sum_{n\geq 0}a_n\int_0^x t^n dt=\sum_{n\geq 0}a_n\, x^{n+1}/n+1$$

نظرية(6.3.3): للسلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس نصف قطر التقارب $R(R>0)$.

مثال(5.3.3): بين أنه $\forall x\in\left]-1,1\right], \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

الحل: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ سلسلة صحيحة ونصف قطر تقاربها $R=1$ ودالة مجموعها على المجال $\left]-1,1\right[$ هي $x\to\frac{1}{x+1}$ بالمكاملة نجد

$$\int_0^x\frac{dt}{t+1}=\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وباستبدال n بـ $n-1$ يكون لدينا $\forall x\in\left]-1,1\right[, \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

من جهة اخرى لما $x=1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب لبنز و بالتالي

$$\forall x\in\left]-1,1\right], \ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^n/n\,.$$

ملاحظة(2.3.3): للسلسلة الصحيحة و السلسلة الصحيحة الناتجة عن مكاملتها نفس مجال التقارب، لكن قد تكونا من طبيعتين مختلفتين عند أطرافه.

مثال(6.3.3): السلسلتين $\sum_{n\geq 1} x^{n-1}/n$ ، $\sum_{n\geq 1} x^n/n^2$ لهما نفس مجال التقارب $]-1,1[$ لكن من أجل $x=1$ لاحظ أن $\sum_{n\geq 1} 1/n$ متباعدة ، $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ متقاربة.

3-3-3- اشتقاق سلسلة صحيحة (لمتغير حقيقي)

تعريف(2.3.3): لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ سلسلة صحيحة للمتغير الحقيقي x ، نسمي $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ السلسلة المشتقة الأولى وإذا وجد عدد طبيعي $p(p\geq 1)$ نسمي السلسلة $\sum_{n\geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p}$ (باستبدال $n-p$ بـ n نتحصل على السلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_n x^n$) بالسلسلة المشتقة من الرتبة p للسلسلة المعطاة.

نظرية(7.3.3): للسلسلة الصحيحة والسلسلة الصحيحة المشتقة عنها نفس نصف قطر التقارب $R(R>0)$.

نظرية(8.3.3): اذا كانت F دالة المجموعة للسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ للمتغير الحقيقي x و نصف قطر التقارب $R(R>0)$ و كانت F_p دالة المجموع للسلسلة المشتقة من الرتبة $p(p\in \mathbb{N}^*)$ فإنه $\forall p\in \mathbb{N}^*, \forall x\in]-R,R[; F_p(x)=F^{(p)}(x)$ حيث $F^{(p)}$ تمثل الدالة المشتقة من الرتبة p للدالة F

وكذلك $$\forall p\in \mathbb{N}^*, \forall x\in]-R,R[; \sum_{n\geq p} \frac{d^p}{dx^p}(a_n x^n)=\frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n\geq p} a_n x^n\right)$$

مثال(7.3.3): نعتبر السلسلة الصحيحة التالية $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$

1) عين نصف قطر التقارب، 2) جد السلسلتين المشتقتين الاولى والثانية

3) جد دالة المجموع للسلسلة المشتقة الثانية، 4) استنتج دالة المجموع للسلسلة المعطاة

الحل: 1) حسب مقياس النسبة $R=\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n(n-1)}=1$

2) السلسلة الصحيحة متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في $]-1,1[$ و بالتالي

حسب النظرية(8.3.3) لدينا $\left(\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}\right)' = \sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)}$

السلسلة الناتجة أيضا متقاربة بانتظام على كل مجال مغلق محتوى في $]-1,1[$ و

بالتالي $\left(\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)}\right)' = \sum_{n\geq 2}x^{n-2}$ و باستبدال $n-2$ بـ n تكون السلسلة

$\sum_{n\geq 0}x^n = \sum_{n\geq 2}x^{n-2}$ ، 3) نعلم بأن دالة المجموع للسلسلة $\sum_{n\geq 0}x^n$ هي الدالة $x \to \frac{1}{1-x}$

، 4) بالمكاملة مرتين للدالة المحصل عليها نستنتج الدالة $x \to (1-x)\ln(1-x) + x$

و التي تمثل دالة المجموع للسلسلة المعطاة.

3-3-4- النشر الى سلسلة صحيحة

الدوال القابلة للنشر:

تعريف(3.3.3): نقول عن الدالة $f\left(f : IR \to IR\right)$ أنها قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار الصفر(المبدأ) إذا وفقط إذا وجدت سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ ذات نصف قطر $R(R\geq 0)$ و جوار U للصفر بحيث

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{n\geq 0}a_n x^n \ .$$

مثال(8.3.3): $\underset{x\to 1/(1-x)}{f : IR \to IR}$ دالة قابلة للنشر في جوار الصفر الى سلسلة صحيحة و $\forall x \in IR, |x| < 1; 1/(1-x) = \sum_{n\geq 0}x^n$

نظرية(9.3.3): إذا كانت $f : IR \to IR$ قابلة للنشر **في** جواره فإن $f \in C^{\infty}(U(0))$ و السلسلة هي $\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

نظرية(10.3.3): تعطى $f : IR \to IR$ بحيث $f \in C^{\infty}(U(a)), a \in IR$

$f \in C^{\infty}(U(a)), a \in IR_+$ نسمي السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}\alpha_n (x-a)^n$ حيث $\alpha_n = f^{(n)}(a)/n!$ نشر تايلور للدلة f في جوار النقطة a ، في حالة $a=0$ نسمي $\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ سلسلة ماكلوران للدلة f

نظرية(11.3.3): إذا كانت $f:IR\to IR$ قابلة للنشر إلى سلسلة صحيحة في جوار0(جوار a) فإن هذا النشر وحيد.

النشر باستعمال شكل ماكلوران:

لتكن $f:IR\to IR$ من الصنف $C^{\infty}(]-a,a[),a\in IR_{+}$ قابلة الى النشر الى سلسلة ماكلوران بباقي($R_n(x)\neq 0$)

باستعمال متباينة تليلور-لاقرانج

لدينا باقي لاقرانج $\forall n\in \mathrm{N}^*,\forall x\in V(0);R_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{n!}x^k$ و

بالتالي $|R_n(x)|\leq \frac{|x|^n}{n!}\sup\limits_{t\in[0,x]}\left|f^{(n)}(t)\right|\Rightarrow |R_n(x)|\leq \frac{|x|^n}{n!}\left\|f^{n}(t)\right\|_{\infty}$

حسب التعريف لكي تكون f قابلة للنشر الى سلسلة صحيحة في جوار0 يجب أن يوجد عدد $\alpha>0$ بحيث $\forall x\in\left]-\alpha,\alpha\right[\subset V(0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|R_n(x)|=0$

هذا الشرط يحقق وجود $M>0$ بحيث $\forall t\in\left]-\alpha,\alpha\right[;\left|f^{n}(t)\right|\leq M$

وبالتالي $\forall x\in\left]-\alpha,\alpha\right[,|R_n(x)|\leq M\frac{\alpha^n}{n!}$ ، العدد $M\frac{\alpha^n}{n!}$ يمثل حد عام في سلسلة متقاربة حسب دالنبير ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}|R_n(x)|=0$.

باستعمال شكل تليلور بباقي تكاملي

لدينا $\forall n\in \mathrm{N}^*,\forall x\in V(0);f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int\limits_{0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$

أي $R_n(x)=\int\limits_{0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$

و لكي تكون f قابلة للنشر الى سلسلة صحيحة في جوار0 يجب أن يوجد $\alpha>0$ بحيث

$$\forall x\in\left]-\alpha,\alpha\right[,\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt=0$$

تطبيقات:

1) $f(x)=e^x$ نعلم بأنه

$\forall n\in IN,\forall x\in IR;f^{(n)}(x)=e^x\leq e^R,R>0,|x|<R$ و بالتالي

لاحظ أن $\left|R_n(x)\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^x dx\right| < \frac{|x|^n}{n!} e^x$ يمثل حد عام في $\frac{|x|^n}{n!} e^x$
سلسلة عددية ذات حدود موجبة وهي متقاربة حسب مقياس دالبير و بالتالي
$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ أي أنه يمكن نشر الدالة f على شكل سلسلة صحيحة في جوار
الصفر تسمى سلسلة ماكلوران ونكتب $(R = +\infty)$ $e^x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $g(x) = \cos x$ كذلك يمكن التحقق من أنه

$$\forall x \in IR, \forall n \in IN; \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2) \Rightarrow \left|\cos^{(n)} x\right| \leq 1$$

و بالتالي $\left|R_n(x)\right| \leq \frac{R^n}{n!}$ أي محدود بحد عام لسلسلة متقاربة، و منه

$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ و بالتالي $(R = +\infty)$ $\cos x = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

بنفس الطريقة يمكن نشر الدالة $h(x) = \sin x$ إلى سلسلة ماكلوان أي

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R = +\infty)$$

3) الدوال الزائدية: الدالتين $ch(x), shx$ من الصنف $C^\infty(IR^*)$ و $C^\infty(IR)$ على
الترتيب وبالتالي النشر غير المنتهي لمكلوران لكل منهما هو على الترتيب

$$shx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R = +\infty) \quad ، chx = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ (R = +\infty)$$

4) الدوال من الشكل: $k(x) = (1+x)^\alpha; \alpha \in Q$ الدالة k من الصنف $C^\infty(I)$ حيث

$$\forall x \in I = \left]-1, +\infty\right], k^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

و بالتالي سلسلة ماكلوران المرفقة بالدالة k هي

$(R = 1)$

$$k(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!} x^{\alpha-n}$$

مثال(9.3.3): نشر ماكلوران للدالة $x \to \sqrt[3]{1+x}$ هو

$$\sqrt[3]{1+x}=1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{5}{27}x^3+.....=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/3(-2/3)....(1/3-n+1)}{n!}x^{1/3-n}$$

3-3-5- طرق اخرى للنشر على شكل سلسلة صحيحة

مكاملة نشر معلوم:

بتطبيق النظريات حول السلاسل و التكامل لدينا الأمثلة

نعلم بأنه $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}x^n$ بالمكاملة طرفا الى طرف نجد

$(R=1)$ $\forall x\in\left[-1,1\right[;\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{x^n}{n}$ و باستبدال $(-x)$ بـ x

نتحصل على النشر $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right];\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

كذلك باستبدال $(-x^2)$ بـ x نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n x^{2n}$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;Arctgx=\sum_{n=0}^{n=+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

كذلك باستبدال (x^2) بـ x نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}x^{2n}$

بالمكاملة طرفا الى طرف نجد $(R=1)$ $\forall x\in\left]-1,1\right[;Argthx=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

اشتقاق نشر معلوم:

بتطبيق النظريات على النشر و الاشتقاق لدينا

مثال(3.3.9): جد دالة المجموع للسلسلة $(R=1)$ $\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^n$ ،

لاحظ يمكن كتابة السلسلة المعطاة على الشكل$(R=1)$ $x\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^{n-1}$

وباستبدال $n-1$ بـ n نجد

$(R=1)$ $x\sum_{n=1}^{n=+\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ كذلك لاحظ أن السلسلة

($R=1$) $\sum_{n=2}^{n=+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ تمثل السلسلة المشتقة الثانية للسلسلة $\sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n$ و التي دالة مجموعها $x \to \frac{1}{1-x}$ ، اذن لإيجاد دالة المجموع للسلسلة المعطاة يكفي أن نشتق الدالة السابقة مرتين في المجال $]-1,1[$ ثم نضرب في x فنتحصل على الدالة $x \to \frac{2x}{(1-x)^3}$ وهو المطلوب.